ECOLE POLYTECHNIQUE - Promotion 2015
Approximation Numérique et Optimisation (MAP411)

Examen Classant du 17 Janvier 2016

Sujet proposé par Marc Massot

Durée : 3 heures *(Le problème et l'exercice peuvent être traités indépendamment. Dans le problème, la première sous-partie 1.1 peut être traitée indépendamment du reste.)*

1 Problème I : Discrétisation par différences finies et éléments finis d'équations de diffusion et propriétés qualitatives (14 points)

Dans ce problème, nous allons considérer les solutions d'une hiérarchie de modèles de diffusion avec terme source en dimension un d'espace et sur l'intervalle compact $x \in [0,1]$ de la droite réelle. Le premier niveau, qui va nous occuper pendant les quatre premières sous-parties, est celui de l'équation classique scalaire de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\, \partial_{xx} u = \omega(u), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où la variable $u(t,x)$ appartient à $\mathbb{R}$, ν est le coefficient de diffusion de chaleur, $\nu > 0$, et le terme source est pris comme une perte de chaleur linéaire proportionnelle à la variable u, $\omega = -s\,u$, avec s positif et homogène à l'inverse d'un temps. On considère des conditions aux limites de type Dirichlet et une donnée initiale u_0 qui satisfait ces conditions aux limites.

Pour ce système, ainsi que le système vectoriel étudié en partie 1.5, l'analyse de l'existence et unicité de solutions est acquise et on admettra que l'on travaille avec des solutions régulières globales en temps dans tous les cas.

Les quatre premières parties sont focalisées sur l'équation scalaire de la chaleur, la partie 1.5 étant dédiée au cas vectoriel. La partie 1.1 a pour but d'établir les propriétés qualitatives de la solution de l'équation de la chaleur. La partie 1.2 se focalise sur le système continu en temps mais semi-discrétisé en espace par une méthode de différences finies centrée de l'opérateur de diffusion. Nous abordons ensuite la question de la discrétisation en temps dans la partie 1.3 et enfin la semi-discrétisation en espace par une méthode d'éléments finis en partie 1.4.

1.1 Propriétés qualitatives de l'équation de la chaleur

(a) Rappeler la propriété de principe du maximum vue en cours pour le problème de Cauchy sur l'ensemble de la droite réelle

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \nu\, \partial_{xx} \tilde{u} = \omega(\tilde{u}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

dans le cas $s = 0$, ainsi que l'expression du cours sur laquelle repose la démonstration. Montrer que l'on obtient une solution exacte sur $\mathbb{R}$ sous la même forme dans le cas de la présence d'un terme source $\omega = -s\, u$ avec $s > 0$ (idée : on pourra utiliser la nouvelle variable $v = \exp(st)\, u$). En conclure un principe du maximum pour le cas $s > 0$.

(b) Dans le cas (1) posé sur l'intervalle $[0, 1]$, reformuler cette propriété de principe du maximum en présence de conditions aux limites et d'un terme source sans tenter de la démontrer. On admettra pour la suite que la solution de (1) vérifie ce principe du maximum.

(c) Dans le cadre du problème (1), démontrer l'inégalité de Poincaré

$$2 \int_0^1 v^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 (v')^2 \mathrm{d}x, \tag{3}$$

pour toute fonction v continûment différentiable sur $[0, 1]$ telle que $v(0) = 0$. (Idée : établir dans un premier temps que $v^2(x) \leq x \int_0^x (v')^2(y)\mathrm{d}y$.)

(d) Ecrire une équation différentielle sur l'évolution en temps de la norme L^2 de la solution $E(t) = ||u||_2^2 = \int_0^1 u^2(t, x)\mathrm{d}x$ dont le second membre ne fait intervenir que le gradient de la solution (Idée : on multipliera (1) par la solution et on manipulera l'équation après avoir intégré sur l'intervalle $[0, 1]$). Que peut-on conclure sur cette évolution ?

(e) En utilisant l'inégalité de Poincaré, déduire la décroissance exponentielle en temps de $E(t)$. Quel est le facteur de décroissance ? Dans le cas où $s = 0$ relier le facteur de décroissance à l'expression (1.13) du cours et interpréter l'effet du terme source en lien avec la question (a).

(f) Quelle est le comportement à la limite des temps grands de la solution de (1) ? Proposer une interprétation physique de ce comportement.

1.2 Semi-Discrétisation spatiale par différences finies

L'intervalle spatial est discrétisé en $N + 1$ points avec les notations du cours, on pose $x_j = j/(N + 1)$ pour j allant de 0 à $N + 1$, les points extrémaux étant fixés à 0 et 1 respectivement. On va donc approcher la fonction inconnue $u(t, x)$ par un vecteur $U(t)$ de $N + 2$ coordonnées dont les composantes $U_j(t)$ sont une approximation de $u(t, x_j)$. Comme les conditions aux limites fixent les valeurs de U_0 et U_{N+1}, on va travailler en fait avec un vecteur $U \in \mathbb{R}^N$. Le pas d'espace, noté h ou Δx dans le cours vaut donc $1/(N + 1)$.

1.2.1 Ecriture du système semi-discrétisé en espace

(a) En utilisant une discrétisation centrée d'ordre deux classique de l'opérateur Laplacien $\partial_{xx} u(t, x_j) \approx \frac{U_{j-1}(t) - 2\, U_j(t) + U_{j-1}(t)}{(\Delta x)^2}$ et en conservant une variable temporelle continue, écrire une équation différentielle ordinaire sur le vecteur $U(t) \in \mathbb{R}^N$, $U = (U_1, \dots, U_N)^T$ (où $(\ )^T$ désigne la transposition) du type :

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t U = -\mathbf{A}\, U - \mathbf{S}\, U, \\ U(t=0) = U^0, \end{cases} \tag{4}$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice de taille N de discrétisation du Laplacien et $\mathbf{S}$ la matrice représentant le terme source. Rappeler l'expression de $\mathbf{A}$ et donner celle de $\mathbf{S}$. Que prend-on pour valeur initiale U^0 au temps $t = 0$ du système (4) ?

L'objectif de cette partie est de montrer que l'approximation (4) du système (1) par semi-discrétisation spatiale vérifie une forme discrète des propriétés qualitatives de la solution que nous avons établies dans la partie 1.1, en particulier un principe du maximum discret et une décroissance exponentielle de la norme l^2 de la solution avec le même taux.

1.2.2 Inégalité de Poincaré discrète

(b) Montrer que

$$U_j^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{j} \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 \right) j\, (\Delta x)^2, \quad \forall j \in [1, N+1], \tag{5}$$

par un argument de type Cauchy-Schwarz similaire à la question (c) de la partie 1.1. N.B. On rappelle que $U_0 = U_{N+1} = 0$ et on pourrait aussi écrire la somme pour $j = N+1$ dans le second membre sous la forme $\left(\frac{U_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{U_N}{\Delta x}\right)^2 + \sum_{i=2}^{N} \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x}\right)^2$.

(c) En utilisant la question précédente, montrer l'inégalité de Poincaré discrète suivante :

$$2 \sum_{i=1}^{N} U_i^2 \leq \sum_{i=1}^{N+1} \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \right)^2. \tag{6}$$

(d) Ecrire une équation différentielle ordinaire d'évolution temporelle de la quantité $\tilde{E}(t) = U \cdot U = \sum_{i=1}^{N} U_i^2(t)$ en utilisant le produit scalaire [1] dans l^2, de la forme :

$$\mathrm{d}_t \frac{\tilde{E}(t)}{2} = -U^T \mathbf{A} U - U^T \mathbf{S} U, \tag{7}$$

et montrer que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{S}$ sont symétriques définies positives (Idée : écrire la forme quadratique $U \mapsto U^T \mathbf{A} U$ sous la forme d'une somme de carrés de différences).

(e) Montrer que :

$$\mathrm{d}_t \tilde{E} \leq -2(2\nu + s)\tilde{E}, \tag{8}$$

en utilisant, de manière similaire au cas continu, l'inégalité de Poincaré discrète après avoir remarqué que $U^T \mathbf{A} U$ s'exprime en fonction du gradient discret $\left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x}\right)_{j \in [1, N+1]}$ comme dans le cas continu.

1. On sera attentif au fait que $\tilde{E}(t)$ utilisé ici pour des raisons de simplicité de notation n'est pas une approximation de $E(t)$, il faudrait plutôt utiliser la relation $\overline{E}(t) = \Delta x\, U \cdot U = \Delta x \sum_{i=1}^{N} U_j^2(t)$ pour avoir la bonne normalisation et une approximation de la norme L^2 de la solution. Comme le problème est linéaire et pour éviter de surcharger les notations, on a volontairement "éliminé" le facteur Δx en travaillant avec $\tilde{E}(t)$.

(f) Déduire la décroissance exponentielle de la norme l^2 de la solution semi-discrète. Quel est le taux de décroissance ? Comment se compare-t-il à celui que l'on a obtenu dans le cas continu ? Que pouvez-vous en déduire ?

(g) Démontrer un principe du maximum pour le système semi-discret dans le même esprit que celui énoncé dans la question 1.1.(a) pour le cas continu. On raisonnera par l'absurde et on caractérisera la dynamique d'une des coordonnées de la solution atteignant les bornes de la donnée initiale à partir de l'équation (4).

(h) Que peut-on déduire en termes de stabilité sur le schéma semi-discrétisé en espace ?

(i) Comme on a déjà montré en cours que le schéma est consistant et précis à l'ordre deux, que peut-on conclure sur la convergence ? Formuler l'équivalent d'un théorème de Lax basé sur la consistance et la stabilité permettant de démontrer la convergence.

1.3 Discrétisation en temps - schéma de Crank-Nicolson

Nous allons approcher le système d'équations différentielles ordinaires (4) par un ensemble discret de solutions aux temps $t_n = n\Delta t$ où le pas de discrétisation temporel est noté Δt et la solution approchée de $U(t_n)$ est notée $U^n = (U_1^n, \dots U_N^n)^T$. Nous utilisons un schéma implicite de type Crank-Nicolson (aussi appelé θ-schéma avec $\theta = 1/2$) pour la résolution du système d'équations différentielles ordinaires (4) :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}\, U^{n+1} + \mathbf{S}\, U^{n+1} + \mathbf{A}\, U^n + \mathbf{S}\, U^n\right), \tag{9}$$

(a) Vérifier que l'on obtient bien le schéma de Crank-Nicolson donné en cours et menant à une discrétisation temps-espace de l'équation de départ (1). Donner l'ordre du schéma en temps et en espace et le démontrer.

(b) Montrer que le schéma complètement discrétisé est stable l^∞ si l'on impose une condition supplémentaire sur la petitesse du pas de temps que l'on précisera.

(c) Ecrire le schéma sous la forme suivante :

$$U^{n+1} = \Upsilon U^n, \tag{10}$$

et donner l'expression de la matrice carrée Υ de taille N.

(d) En multipliant (9) par $\frac{U^{n+1}+U^n}{2}$ montrer que l'on obtient une version discrétisée de l'équation (7) et que cette dérivée discrète a un signe. En déduire l'évolution de la norme l^2 de la solution et conclure sur la stabilité l^2.

(e) Montrer que

$$\frac{(U^{n+1})^2 - (U^n)^2}{\Delta t} \leq -2(2\nu + s)\frac{||U^{n+1} + U^n||_2^2}{2}. \tag{11}$$

(f) Majorer $||\frac{U^{n+1}+U^n}{2}||_2^2$ en fonction de $||U^n||_2^2$ et conclure sur la décroissance algébrique de la norme l^2 de la solution. Comparer avec la décroissance obtenue dans le cas semi-discret en espace, que conclure ? Que peut-on dire de la capacité de ce schéma à reproduire les propriétés de la solution de l'équation de départ ?

1.4 Discrétisation spatiale par éléments finis de l'équation de la chaleur

Nous reprenons le cas de la semi-discrétisation en espace par une méthode d'éléments finis qui a été proposée et présentée en cours et l'appliquons à l'équation de la chaleur avec terme source (1).

(a) Rappeler la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur vue en cours.

(b) Avec les notations du cours, on introduit une approximation variationnelle interne à l'aide du sous-espace V_{0h}, où l'on rappelle que $h = \Delta x = 1/(N+1)$. Dans le cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$, montrer que l'on obtient une approximation de la solution sous la forme :

$$u_h(t,x) = \sum_{i=1}^{N} U_i^h(t)\phi_i(x) \tag{12}$$

et où le vecteur de $\mathbb{R}^N$, $U^h = (U_1^h, \ldots, U_N^h)^T$ vérifie le système couplé d'équations différentielle ordinaires :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_h \mathrm{d}_t U^h(t) + \mathcal{K}_h U^h(t) = -\mathcal{S}_h U^h(t), \\ U^h(0) = U^{0,h}, \end{cases} \tag{13}$$

dont on précisera l'expression des matrices carrées de taille N que l'on voit apparaître ici, de masse, de rigidité et du terme source, ainsi que le vecteur de la donnée initiale.

(c) Ecrire une équation différentielle sur l'évolution en temps de la quantité $\int_0^1 u_h^2(t,x)\mathrm{d}x$ que l'on ré-exprimera comme une norme de la variable vectorielle U^h. Comparer avec ce que l'on obtient sur la même quantité $\overline{E}(t)$ dans le cadre de l'approximation par différences finies. Que conclure sur la décroissante en temps de la norme l^2 du carré de la solution approchée par rapport à la solution continue en espace ?

(d) Proposer un schéma de discrétisation en temps de type Crank-Nicolson pour effectuer la discrétisation temporelle du système (13). Quel sera sa propriété en terme de décroissance de la norme l^2 ? Quelle sont ses propriétés en terme de précision et stabilité ? Que conclure en lien avec l'étude menée sur le cas différences finies ?

Pour la dernière étude, on se contentera de travailler sur la semi-discrétisation spatiale, l'extension au cas de l'intégration en temps étant plus calculatoire mais donnant le même type de résultats.

1.5 Extension au cas vectoriel

Un système d'équation plus général, toujours en une dimension d'espace est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U} - \mathcal{D}\, \partial_{xx}\mathcal{U} = \Omega(\mathcal{U}), \\ \mathcal{U}(0,x) = \mathcal{U}_0(x), \\ \mathcal{U}(t,0) = 0, \quad \mathcal{U}(t,1) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

où la variable $\mathcal{U}(t,x)$ appartient à $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, $\mathcal{D}$ est une matrice de taille m symétrique définie positive de diffusion et le terme source est pris comme une perte linéaire proportionnelle à la variable $\mathcal{U}$, $\Omega = -\mathcal{S}\,\mathcal{U}$, avec $\mathcal{S}$ une matrice de taille m symétrique définie positive. On considère des conditions aux limites de type Dirichlet et une donnée initiale $\mathcal{U}_0$ qui satisfait ces conditions aux limites.

(a) Dans le cas continu, établir une expression pour le taux de décroissance de la norme L^2 de la solution après avoir établi une inégalité de Poincaré vectorielle.

(b) Ecrire le système semi-discrétisé en espace où l'on a utilisé le même schéma centré d'ordre deux que dans la partie 1.2 et caractériser les propriétés des matrices en jeu.

(c) En déduire une propriété de décroissance sur la norme l^2 de la solution. Comparer avec le cas d'une seule équation.

2 Exercice II d'optimisation : Reconstruction d'une densité sur l'intervalle $[0,1]$ à partir de la donnée de ses moments par maximisation d'entropie et problème de Hausdorff (6 points)

Pour toute densité $\tilde{P}(x)$ **positive** définie sur l'intervalle $x \in [0,1]$, on appelle moments d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la densité $\tilde{P}$ les réels strictement positifs :

$$\tilde{\mathfrak{m}}_n = \int_0^1 x^n \tilde{P}(x)\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Un problème classique et historique en mathématiques est de savoir dans quelle mesure on peut, connaissant une suite de moments, finie ou infinie, reconstruire une fonction P dont les moments sont exactement cette suite. La question de la régularité des fonctions P n'est pas envisagée dans cet exercice où l'on supposera que l'on travaille toujours avec des fonctions positives régulières mais on pourrait travailler dans le cadre beaucoup plus général des mesures de Borel.

Dans tout l'exercice, nous nous donnons un entier N et un vecteur de moments $\mathcal{M} = (\mathfrak{m}_0, \dots, \mathfrak{m}_N)^T$ dans $\mathbb{R}_+^{N+1}$. L'objectif de l'exercice de construire une densité positive P dont $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N+1}$ est le vecteur de moments

$$\mathfrak{m}_n = \int_0^1 x^n P(x)\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

après avoir établi les conditions d'existence et d'unicité d'une telle mesure en utilisant une technique d'optimisation.

2.1 Problème de Hausdorff : conditions sur $\mathcal{M}$ pour avoir l'existence

On appelle problème de Hausdorff le problème de savoir sous quelles conditions sur $\mathcal{M}$, ce vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ admet au moins une densité positive dont il est le vecteur de moments.

(a) Montrer, dans le cas général pour toute densité positive $\tilde{P}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ entiers, l'inégalité suivante

$$\int_0^1 x^n (1-x)^k \tilde{P}(x)\mathrm{d}x > 0.$$

(b) Montrer que toute densité positive vérifie la condition de complète monotonie de la suite $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(-1)^k \Delta^k \mathfrak{m}_n > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

où $\Delta^k \mathfrak{m}_n$, la différence d'ordre k du moment $\mathfrak{m}_n$ d'ordre n. Elle est définie par récurrence $\Delta^0 \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_n$, $\Delta^1 \mathfrak{m}_n = \Delta^0 \mathfrak{m}_{n+1} - \Delta^0 \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_{n+1} - \mathfrak{m}_n$, $\Delta^2 \mathfrak{m}_n = \Delta^1 \mathfrak{m}_{n+1} - \Delta^1 \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_{n+2} - 2\mathfrak{m}_{n+1} + \mathfrak{m}_n, \ldots$, et peut aussi s'exprimer par $\Delta^k \mathfrak{m}_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \mathfrak{m}_{n+m}$.

On admettra que pour un vecteur de moment $\mathcal{M}$, le fait de vérifier la condition (17), comme l'a démontré Hausdorff en 1921, est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une densité positive dont les moments sont le vecteur $\mathcal{M} \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ considéré. L'ensemble des vecteurs de moments qui vérifient cette condition est appelé espace des moments et est un ouvert convexe de $\mathbb{R}_+^{N+1}$.

2.2 Construction d'une solution par maximisation d'entropie - existence, unicité et algorithme

Le vecteur de moment $\mathcal{M} \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ étant donné, nous supposons qu'il vérifie la condition (17).

Afin de résoudre le problème nous allons travailler en deux temps. Dans un premier temps, nous allons formuler le problème comme une optimisation sous contrainte égalité en dimension infinie permettant d'identifier une classe de forme de densité. Dans un second temps, le problème va être reformulé sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte en dimension finie qui permettra de démontrer l'existence et l'unicité, ainsi que de proposer un algorithme pour construire une densité solution.

Introduisons l'entropie de Shannon $\mathcal{S}(P)$ d'une densité $\tilde{P}$ légèrement adaptée pour notre problème :

$$\mathcal{S}(\tilde{P}) = -\int_0^1 [\tilde{P}(x)\log(\tilde{P}(x)) - \tilde{P}(x)]\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Nous allons construire la densité recherchée P^{ME} comme la densité qui maximise l'entropie de Shannon sous la contrainte que $\int_0^1 x^n P^{ME}(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{m}_n$, pour tous les $n \in [0, N]$. Pour cela nous considérons le Lagrangien suivant en introduisant le vecteur des multiplicateurs de Lagrange appropriés $\Lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_N)^T$:

$$\mathcal{L}(\tilde{P}, \Lambda) = \mathcal{S}(\tilde{P}) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \left(\int_0^1 x^n \tilde{P}(x)\mathrm{d}x - \mathfrak{m}_n \right). \tag{19}$$

(a) Pour toute fonction w, on définit la dérivée de Gateaux $\mathbf{L}$ dans la direction w du Lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{L}_{P,\Lambda}(w) = \lim_{\tau \to 0, \tau > 0} \frac{\mathcal{L}(P + \tau\, w, \Lambda) - \mathcal{L}(P, \Lambda)}{\tau},$$

qui est une forme linéaire. Une densité maximisant l'entropie de Shannon sous la contrainte des moments vérifie $\mathbf{L}_{P^{ME},\Lambda}(w) = 0$ pour toute fonction w. Montrer que cela implique une forme de la densité :

$$P^{ME}(x) = \exp\left(-\sum_{n=0}^{N} \lambda_n x^n \right). \tag{20}$$

Nous allons donc dans la suite chercher une densité sous la forme (20) qui vérifie les contraintes $\int_0^1 x^n P^{ME}(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{m}_n$, $n \in [0, N]$. Cela nous permet de transformer le problème d'optimisation sous contrainte égalité initial posé en dimension infinie en un problème d'optimisation en dimension finie étudié en cours. Pour cela, nous allons construire une fonction (appelée potentiel) convexe des multiplicateurs de Lagrange dont le minimum donnera la solution du problème recherché.

On se donne dans un premier temps le potentiel suivant :

$$\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) = -\int_0^1 \left[\exp\left(-\sum_{n=0}^{N} \lambda_n x^n\right) - 1\right] \mathrm{d}x + \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \mathfrak{m}_n, \tag{21}$$

fonction de $(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

(b) Montrer que les conditions $\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_n} = 0$, $n \in [0, N]$ impliquent que la densité P^{ME} vérifie $\int_0^1 x^n P^{ME}(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{m}_n$, $n \in [0, N]$.

(c) Donner l'expression de la matrice Hessienne des dérivées seconde de Δ dont on montrera qu'elle est définie positive. On montrera dans un premier temps que $\int_0^1 (u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_k x^k)^2 \exp\left(-\sum_{n=0}^{N} \lambda_n x^n\right) \mathrm{d}x > 0$ quel que soit l'entier k et quelque soit le vecteur $(u_0, \ldots, u_k)$ non nul.

(d) Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, on va travailler avec des densités P normalisées, c'est-à-dire dont le premier moment $\mathfrak{m}_0$ vaut 1. Dans ce cadre on peut alors exprimer λ_0 en fonction des autres multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathcal{Z} = \exp(\lambda_0) = \int_0^1 \left[\exp\left(-\sum_{n=1}^{N} \lambda_n x^n\right)\right] \mathrm{d}x. \tag{22}$$

Montrer que si l'on défini un autre potentiel

$$\Gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \log(\mathcal{Z}) + \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathfrak{m}_n,$$

avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, on a $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) = \Gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ quand $\mathfrak{m}_0 = 1$

(e) Montrer que les conditions $\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda_n} = 0$, $n \in [1, N]$, impliquent que la densité P^{ME} vérifie $\int_0^1 x^n P^{ME}(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{m}_n$, $n \in [1, N]$. Donner l'expression de la matrice Hessienne de Γ. On admettra qu'elle est aussi définie positive.

(f) On rappelle que le fait que la matrice Hessienne soit définie positive implique que les potentiels Δ et Γ sont des fonctions strictement convexe de $(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ respectivement. Que peut-on en déduire en terme d'existence ou unicité d'un minimum ?

(g) On considère le cas $N = 1$. Donner l'expression de $\mathcal{Z}$ et $\Gamma(\lambda_1)$ et montrer que sous la condition (17) que l'on exprimera, il existe un unique λ_1 pour lequel le potentiel atteint un minimum global. Donner l'expression de la densité P^{ME}.

(h) Afin d'étudier le comportement du potentiel à l'infini, étant donné un point $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ de $\mathbb{R}^N$ on définit le réel $\tilde{\lambda} \geq 0$ tel que $\lambda_n = \tilde{\lambda}\alpha_n$ et $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 = 1$. On admettra que le comportement de Γ à l'infini est une croissance linéaire avec $\tilde{\lambda}$ sous la condition de complète monotonie de la suite (17). En utilisant votre connaissance du cours, démontrer l'existence d'une densité positive maximisant l'entropie sous la condition de complète monotonie de la suite (17). Démontrer ensuite une propriété d'unicité.

(i) Proposer un algorithme permettant de résoudre le problème par une méthode de Newton. Quelles sont les quantités à évaluer à chaque itération ? Quelle difficulté cela peut-il poser ?