

1  
Devoir obligatoire à télécharger sur Moodle et à rendre d'ici 15 jours sur Moodle.

# APPROXIMATION NUMERIQUE ET OPTIMISATION

G. ALLAIRE

11 Septembre 2018

FIN DU CHAPITRE II (différences finies)

- ☞ Schémas multi-niveaux.
- ☞ Schémas multi-dimensionnels.
- ☞ Equation d'advection, équation des ondes.
- ☞ Notion d'équation équivalente (diffusion numérique).

## Schémas multi-niveaux

Exemples pour l'équation de la chaleur:

☞ Schéma de Gear

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

☞ Schéma de Richardson (ou centré en temps)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

☞ Schéma de DuFort-Frankel

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

## Remarques

### ☞ Schéma de Gear

Exo: vérifier qu'il est d'ordre 2 en  $t$  et  $x$ .

### ☞ Schéma de Richardson (ou centré)

Numériquement instable (cf. premier amphi) mais... d'ordre 2 en  $t$  et  $x$ .

### ☞ Schéma de DuFort-Frankel

Correction pour "faire marcher" le schéma de Richardson.

Bizarre... Exo: consistant sous condition CFL !

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} \longrightarrow \infty \\ \Delta t, \Delta x \rightarrow 0 \end{array}$$

## Stabilité des schémas à 3 niveaux

On rappelle que  $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ . On définit

$$U^n = \begin{pmatrix} u^n \\ u^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour un schéma linéaire, il existe deux matrices  $N \times N$ ,  $A_1$  et  $A_2$ , telles que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U^{n+1} = AU^n = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} U^n, \quad \approx \begin{pmatrix} A_1 u_n + A_2 u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

où la **matrice d'itération**  $A$  est donc de taille  $2N$ . Comme précédemment,  $U^n = A^n U^0$  et la stabilité est équivalente à

$$\|A^n\| = \sup_{U^0 \in \mathbb{R}^{2N}, U^0 \neq 0} \frac{\|A^n U^0\|}{\|U^0\|} \leq K \quad \forall n \geq 1.$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} c \cos^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Lemme.** Le schéma de Richardson est instable en norme  $L^2$ .

**Difficulté technique.** Dans la méthode de Fourier (ou de Von Neumann) le coefficient d'amplification  $A(k)$  est une matrice  $2 \times 2$ .

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^{m-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^m + 2u_j^m - u_{j+1}^m}{(\Delta x)^2} = 0 \quad 1 \leq j \leq N \quad + \text{CL périodique}$$

$$u^m(x) = u_j^m \quad \text{si} \quad x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}$$

$$\text{on pose} \quad c = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$u^{m+1}(x) - u^{m-1}(x) + 2c \left( -u^m(x-\Delta x) + 2u^m(x) - u^m(x+\Delta x) \right) = 0$$

$$u^m(x) \text{ périodique} \Leftrightarrow u_m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_m(k) e^{2i\pi k x}$$

$$\hat{u}^{m+1}(k) - \hat{u}^{m-1}(k) + 2c \hat{u}^m(k) \left( -e^{2i\pi k \Delta x} + 2 - e^{-2i\pi k \Delta x} \right) = 0$$

$$4 \sin^2 \pi k \Delta x$$

$$\text{On pose} \quad \hat{v}_m(k) = \begin{pmatrix} \hat{u}_m(k) \\ \hat{u}^{m-1}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$\hat{v}^{m+1}(k) = A_k(k) \hat{v}^m(k)$$

matrice  $2 \times 2$  à coeff complexes

$$A(k) = \begin{pmatrix} -8c \sin^2 \pi h \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}^m(k) = A(k)^m \hat{v}^0(k)$$

$$\lambda^2 + 8c^2 \sin^2 \lambda = 0$$

$$\lambda^- \lambda^+ = 1$$

$$\Rightarrow |\lambda^-| \cdot |\lambda^+| = 1$$

Donc soit  $|\lambda^-| = |\lambda^+| = 1$

soit  $|\lambda^-|$  ou  $|\lambda^+| > 1$

---


$$\Rightarrow \rho(A(k)) > 1 \quad (\text{sauf r\u00e9sonance!})$$

instable

matrice sym\u00e9trique r\u00e9elle donc diag. sur  $\mathbb{R}$   
 $\Rightarrow$  valeurs (ou valeurs propres)  $\lambda^-, \lambda^+ \in \mathbb{R}$

## Condition de stabilité de Von Neumann

**Lemme.** Pour toute norme  $\|A\| = \sup_{U \in \mathbb{R}^{2N}, U \neq 0} \frac{\|AU\|}{\|U\|}$ , le rayon spectral vérifie  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

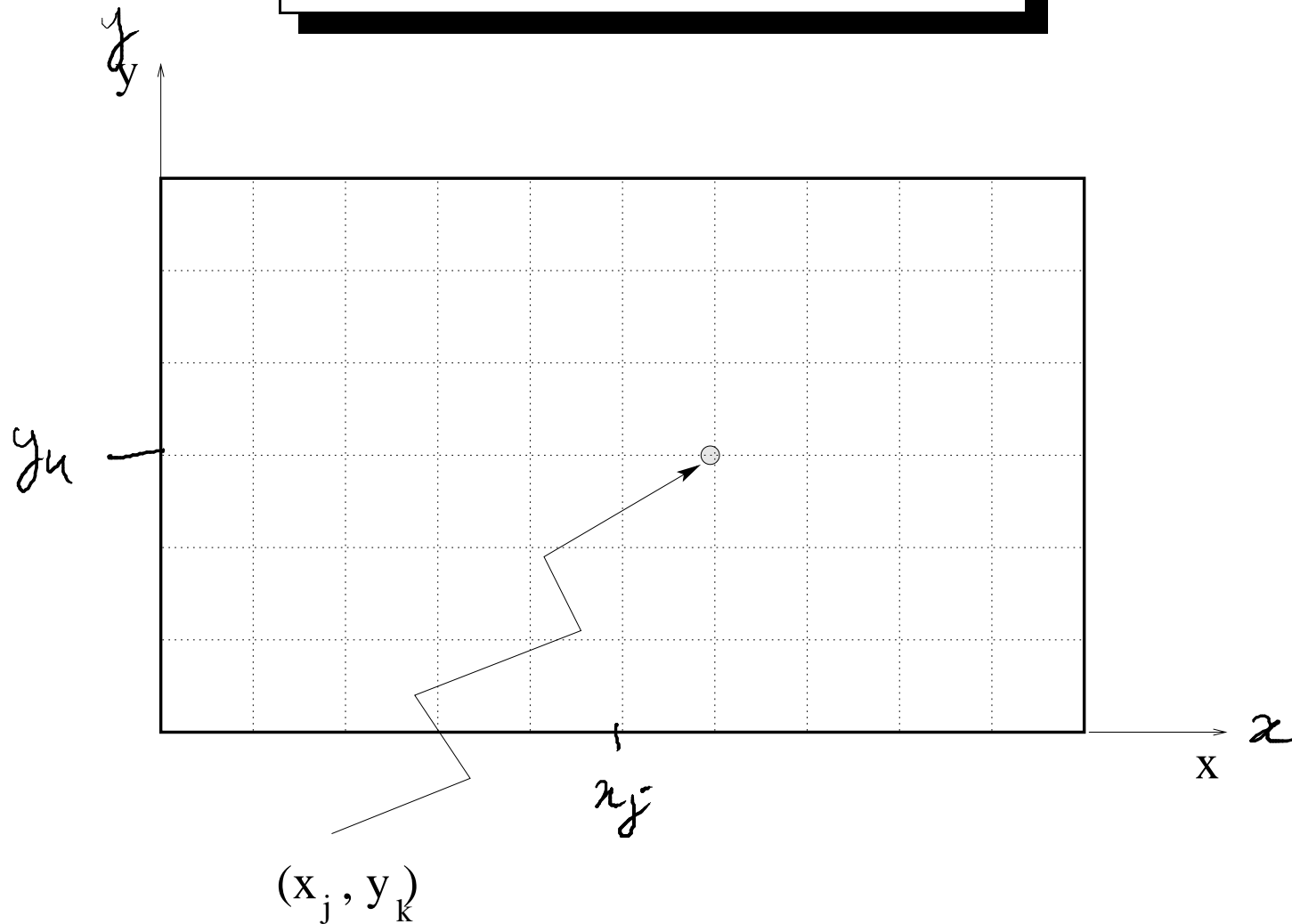
**Définition.** Soit une solution particulière du schéma

$$\begin{pmatrix} u_j^{n+1} \\ u_j^n \end{pmatrix} = A(k)^n \begin{pmatrix} u_j^1 \\ u_j^0 \end{pmatrix} \exp(2i\pi k x_j)$$

où  $A(k)$  est une **matrice** d'amplification  $2 \times 2$ . On appelle **condition de stabilité de Von Neumann** la condition **nécessaire**

$$\rho(A(k)) \leq 1 \text{ pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

## Schémas multidimensionnels



$$x_j = j\Delta x \text{ et } y_k = k\Delta y$$



## Exemples de schémas 2-d pour l'équation de la chaleur

Très simple

**schéma d'Euler explicite:**

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0$$

**schéma d'Euler implicite:**

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j+1,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = 0$  avec en 2-d  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

## Stabilité du schéma explicite

### Condition CFL plus exigeante

Lemme Le schéma explicite est stable  $L^\infty$  sous la condition CFL

$$2v\Delta t \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \leq 1$$

Preuve

principe du max. discret

$$c_x = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$c_y = \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$m_{j,k}^{n+1} = m_{j,k}^n \underbrace{(1 - 2c_x - 2c_y)}_{\geq 0} + c_x \underbrace{\left( m_{j-1,k}^n + m_{j+1,k}^n \right)}_{> 0} + c_y \underbrace{\left( m_{j,k-1}^n + m_{j,k+1}^n \right)}_{> 0}$$

si  $\geq 0$

alors stable  $L^\infty$

Remarque

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow$$

$$\frac{4v\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow (\Delta t)^{2d} \leq \frac{1}{2} (\Delta t)^{1d}$$

$$(\Delta t)^{3d} \leq \frac{1}{3} (\Delta t)^{2d}$$

## Résolution matricielle du schéma implicite

### Très grands systèmes linéaires !

On range les inconnues “colonne par colonne”

$$u^n = (u_{1,1}^n, \dots, u_{1,N_y}^n, u_{2,1}^n, \dots, u_{2,N_y}^n, \dots, u_{N_x,1}^n, \dots, u_{N_x,N_y}^n)$$

On doit résoudre  $Mu^{n+1} = u^n$  avec une matrice symétrique tridiagonale “par blocs”

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & E_1 & & & 0 \\ E_1 & D_2 & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & E_{N_x-2} & D_{N_x-1} & E_{N_x-1} \\ 0 & & E_{N_x-1} & D_{N_x} & \end{pmatrix}$$

Les blocs diagonaux  $D_j$  sont des matrices carrées de taille  $N_y$

$$D_j = \begin{pmatrix} 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y & & & 0 \\ -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y \\ 0 & & & -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) \end{pmatrix}$$

Les blocs extra-diagonaux  $E_j = -c_x \text{Id}$  sont des matrices diagonales de taille  $N_y$  avec

$$c_x = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad \text{et} \quad c_y = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2}$$

Problème de taille mémoire et de coût de calcul !

## Exemples de schémas 2-d pour l'équation de la chaleur

### Plus compliqué

schéma de directions alternées, de type Crank-Nicolson:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k+1}^{n+1/2}}{2(\Delta y)^2} = 0$$

Idée phare: séparation d'opérateurs.

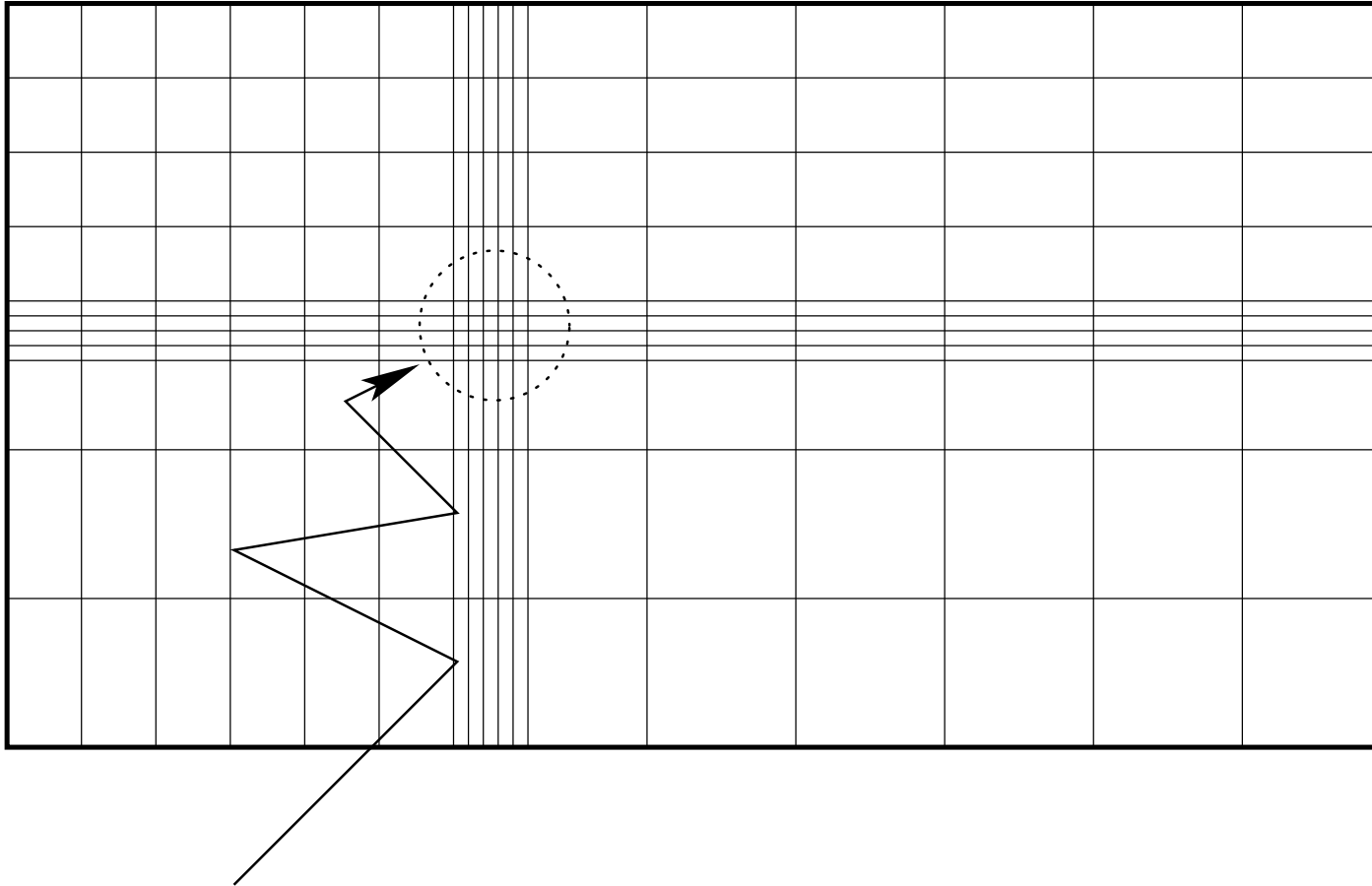
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A u = 0 & \text{sur } [t, t + \Delta t/2] & (A) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + B u = 0 & \text{sur } [t + \Delta t/2, t + \Delta t] & (B) \end{cases}$$

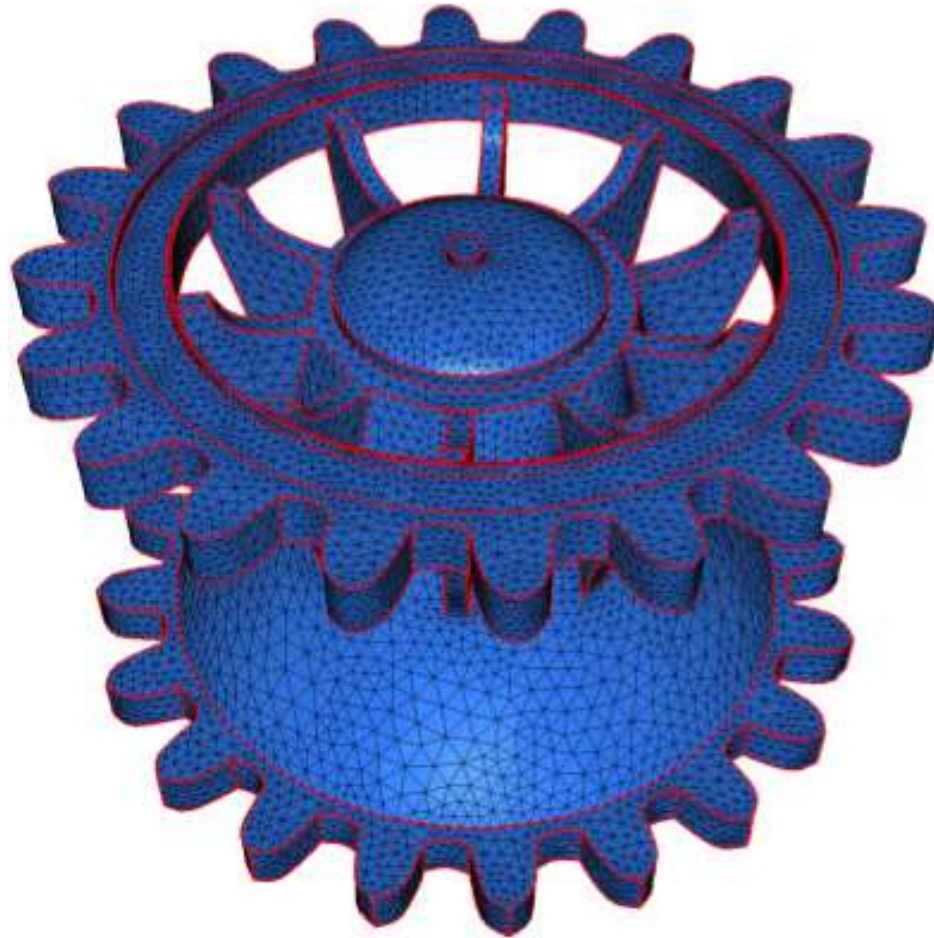
$$\frac{1}{2}(A+B) = \text{éq de la chaleur}$$

Exo vérifier la consistance (qui justifie cette notion de séparation d'opérateurs)

## Difficulté du raffinement local de maillage



Sans parler de la difficulté de mailler des objets compliqués



## Equation d'advection

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{à } t = 0 \end{cases}$$

**Solution explicite:**  $u(x, t) = u_0(x - Vt)$ .

### 1. Schéma explicite **centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Instable quel que soit le choix de  $\Delta t$  !

### 2. Schéma explicite **décentré amont**

$$V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{si } V < 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0.$$

On va chercher l'information en **remontant le courant** (une des idées majeures de l'analyse numérique).



## Autres schémas

☞ Schéma implicite centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

☞ Schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

☞ Schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left( \frac{V^2 \Delta t}{2} \right) \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

## Dérivation du schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

⇓

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Lemme.** Le schéma de Lax-Wendroff est d'ordre 2 en  $t$  et  $x$ .

Construction du schéma de LW: Soit  $u(t, x)$  une solution régulière

$$u(t + \Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^3$$

$$= u(t, x) - \Delta t v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^3$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t v \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 v^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

↑  
approx d'ordre 2

↑  
approx d'ordre 2

preuve du lemme: par construction!

## Stabilité du schéma de Lax-Wendroff

**Lemme.** Le schéma de Lax-Wendroff est stable en norme  $L^2$  sous la condition CFL  $|V|\Delta t \leq \Delta x$ .

Preuve

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + V^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$C = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$$

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2\pi i k x}$$

$$\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^n(k) + \frac{V\Delta t}{\Delta x} \hat{u}^n(k) (i\sin k\Delta x) + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \hat{u}^n(k) (2\cos k\Delta x - 2) = 0$$

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k) \hat{u}^n(k) \quad A(k) \in \mathbb{C}$$

$$|A(k)|^2 = |C \sin \pi k \Delta x|^2 + |1 - 4C^2 \sin^2 \pi k \Delta x|^2 = 1 - 4C(1-C) \sin^2 \pi k \Delta x$$

si  $C \leq 1$   
Condition CFL

$$\Rightarrow |A(k)| \leq 1 \Rightarrow \text{stable } L^2$$

## Stabilité du schéma décentré amont

**Lemme.** Le schéma décentré amont est stable  $L^\infty$  sous la condition CFL  $|V|\Delta t \leq \Delta x$ .

## Consistance du schéma de Lax-Friedrichs

**Lemme.** Le schéma de Lax-Friedrichs est consistant si le rapport  $\Delta t/\Delta x$  est fixe.

Preuve

$$\frac{u_j^{(n+1)} - \frac{u_j^{(n)} + u_{j+1}^{(n)}}{2}}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{(n)} - u_{j-1}^{(n)}}{2\Delta x} = 0$$

Erreur de troncature

$$E_{\Delta t, \Delta x} = \frac{u(t^{(n)}, x_j + \Delta x) + u(t^{(n)}, x_j - \Delta x)}{2} + \frac{V \frac{\partial u}{\partial x}(t^{(n)}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{u + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^3}{\Delta t} \left[ \frac{u + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^3}{2} \right] + V \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} + (\Delta x)^2 + \frac{(\Delta x)^3}{\Delta t}\right)$$

Consistant si  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \rightarrow 0$  ← OK si CFL de stabilité!

# Stabilité L<sup>2</sup> de LF

$$\frac{m_j^{n+1} - \frac{m_{j+1}^n + m_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + v \frac{m_{j+1}^n - m_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

prendre du max disant:

$$m_j^{n+1} = \frac{1}{2} m_{j+1}^n \left( 1 + \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right) + \frac{1}{2} m_{j-1}^n \left( 1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)$$

si condition CFL

$$|v| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

## Remarques sur l'erreur de consistance des schémas

- ☞ Le **comportement pratique** d'un schéma peut s'analyser en regardant le terme dominant dans l'erreur de consistance.
- ☞ En général, on écrit ce terme dominant en terme de dérivées en espace seulement.
- ☞ Selon l'ordre de précision du schéma, le terme dominant n'est pas le même.

## Notion d'équation équivalente

**Définition.** On appelle **équation équivalente** d'un schéma l'équation obtenue en ajoutant au modèle le terme d'ordre dominant de l'erreur de troncature du schéma.

### Remarques.

- ☞ Le schéma est plus précis d'un ordre pour l'équation équivalente.
- ☞ Tous les schémas n'ont pas la même équation équivalente !
- ☞ Des propriétés qualitatives (**diffusion numérique**) se déduisent de l'équation équivalente.



Equation équivalente pour Lax-Friedrichs:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - C_{num} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\uparrow = \frac{1}{2} \Delta t \left( 1 - \left( \frac{V \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right)$$

diffusion numérique

Equation équivalente pour le schéma décentré amont:

Equation équivalente pour Lax-Wendroff:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + C_{num} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

↑  
Coeff de dispersion

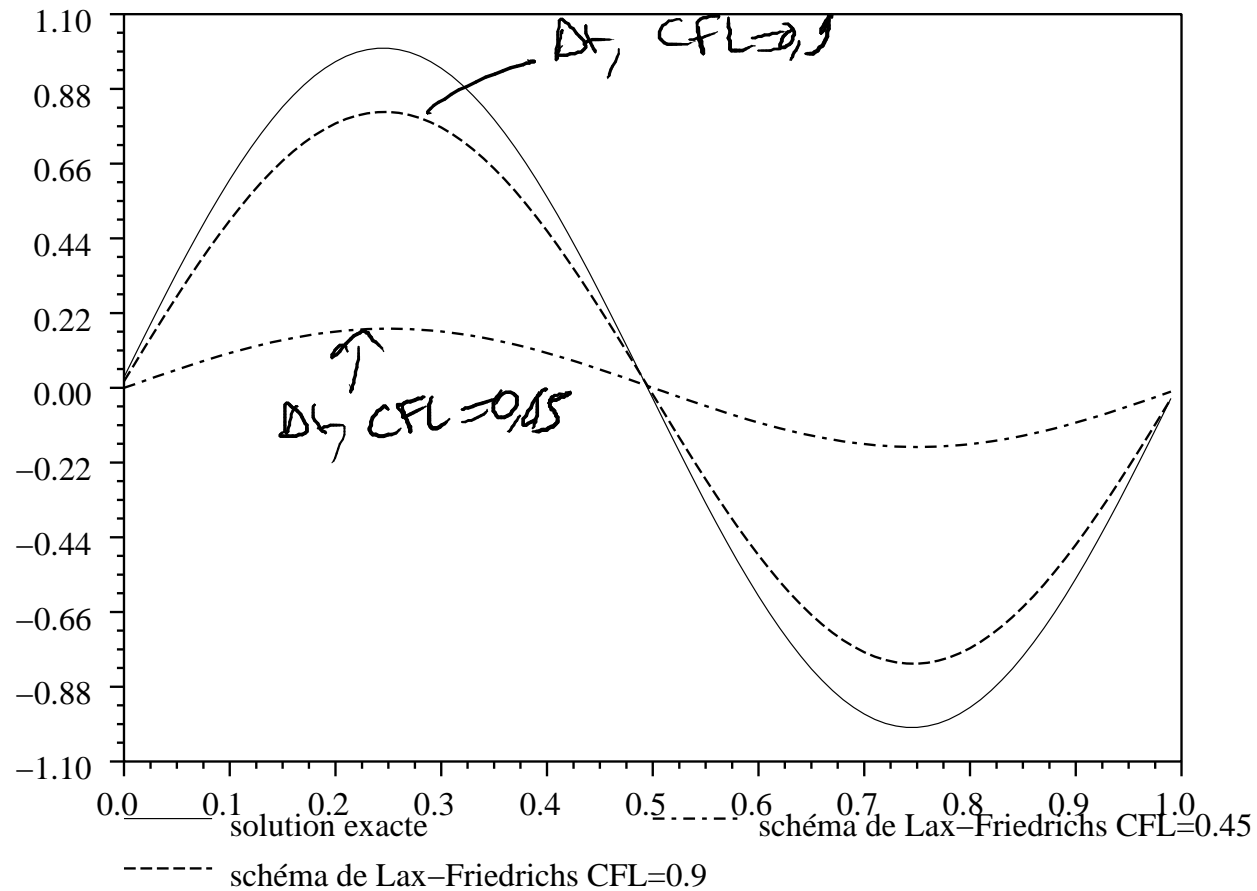
⇓  
effet = modification de la vitesse de propagation  
selon le mode de Fourier

# Influence de la CFL sur la diffusion numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

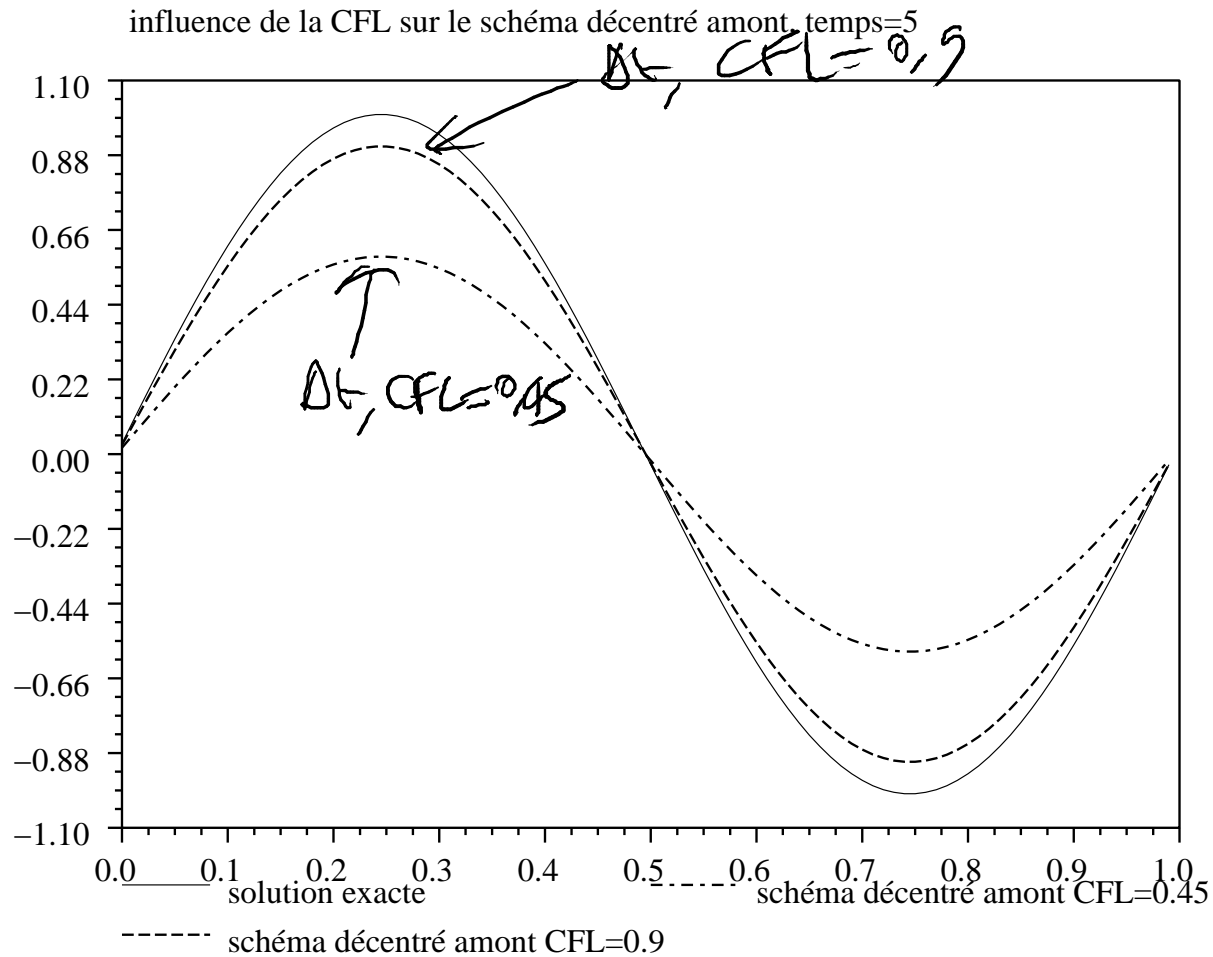
## Schéma de Lax-Friedrichs

influence de la CFL sur le schéma de Lax-Friedrichs, temps=5

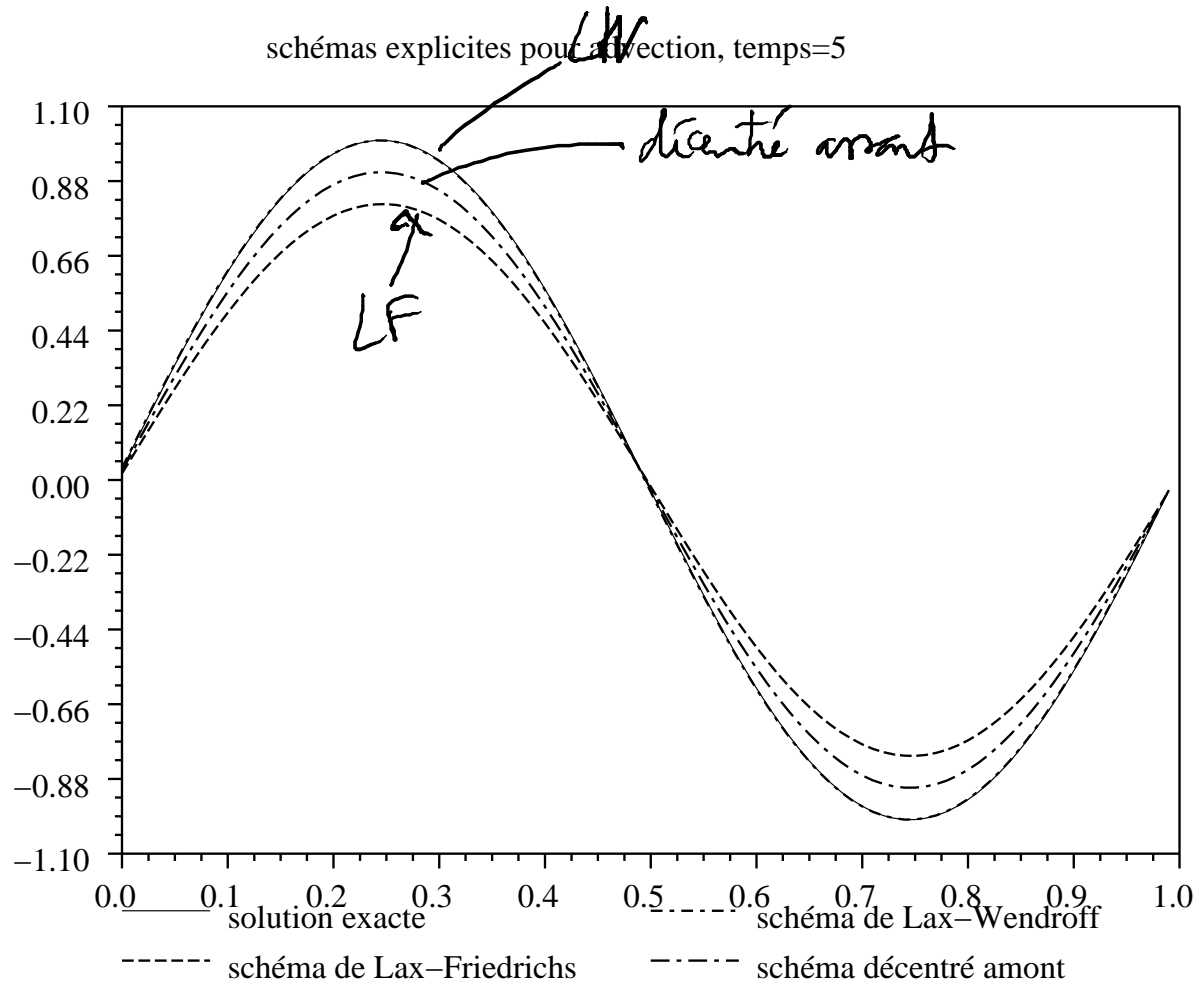


# Influence de la CFL sur la diffusion numérique

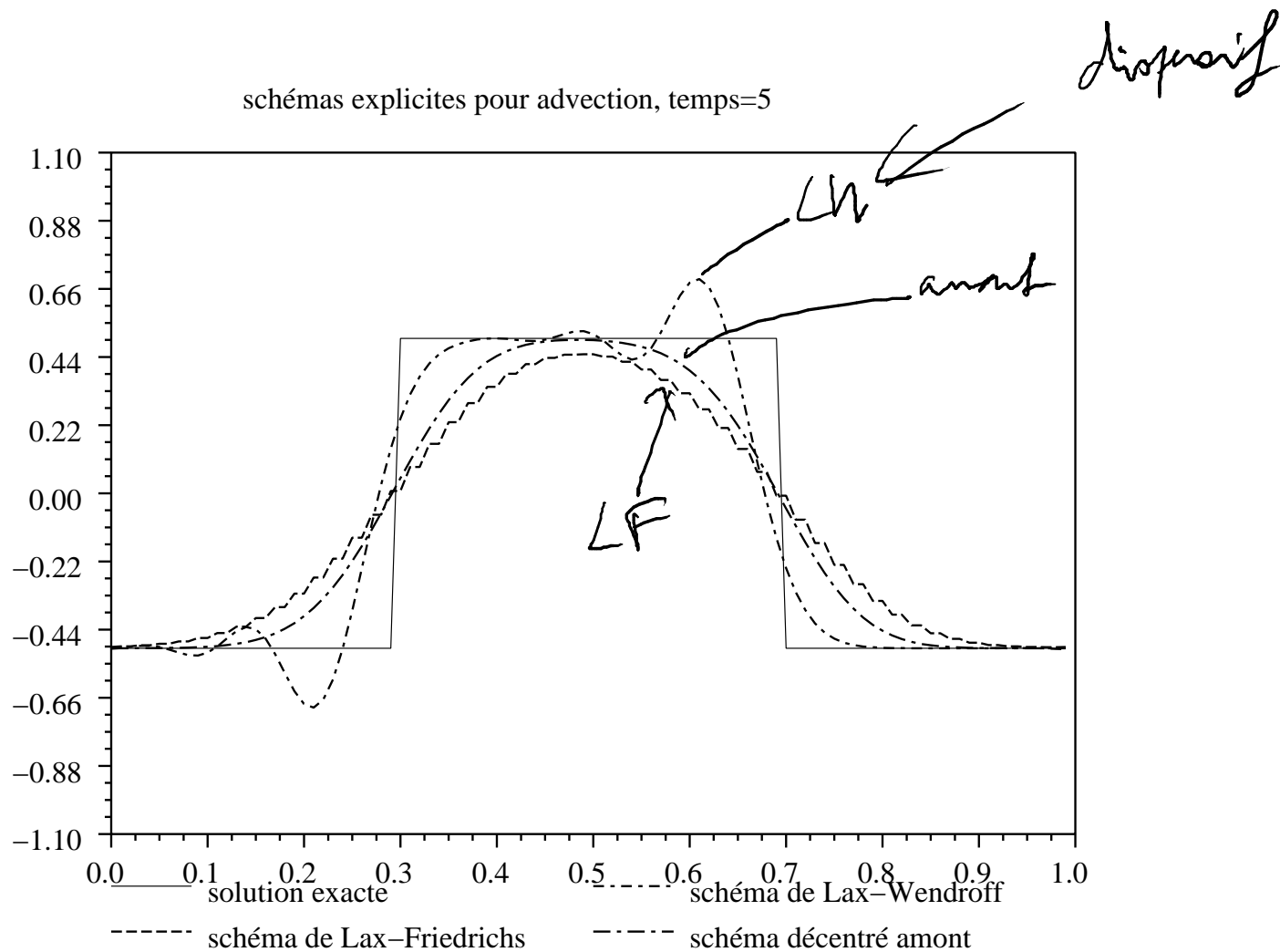
## Schéma décentré amont (upwind)



# Comparaison des schémas (solution régulière)



# Comparaison des schémas (solution discontinue)



## Equation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(t, x + 1) = u(t, x) \text{ pour } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = u_1(x) \text{ pour } x \in (0, 1). \end{array} \right.$$

Pour  $0 \leq \theta \leq 1/2$ ,  $\theta$ -schéma centré:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \theta \frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\ & + (1 - 2\theta) \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \theta \frac{-u_{j-1}^{n-1} + 2u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} = 0 \end{aligned}$$



## Stabilité

**Lemme.** Si  $1/4 \leq \theta \leq 1/2$ , le  $\theta$ -schéma est inconditionnellement stable en norme  $L^2$ . Si  $0 \leq \theta < 1/4$ , il est stable sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{\frac{1}{1 - 4\theta}},$$

et instable si  $\Delta t/\Delta x > 1/\sqrt{1 - 4\theta}$ .

**Remarque.** Le cas limite  $\Delta t/\Delta x = 1/\sqrt{1 - 4\theta}$  est délicat...

## Conservation de l'énergie

**Lemme.** La solution exacte vérifie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx = E(0).$$

## Conservation de l'énergie (suite)

**Lemme.** Le  $\theta$ -schéma conserve l'énergie discrète

$$E^{n+1} = \sum_{j=0}^N \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n+1}, u^n) + \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n) = E^0$$

avec

$$a_{\Delta x}(u, v) = \sum_{j=0}^N \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right) \left( \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x} \right).$$