

# APPROXIMATION NUMERIQUE ET OPTIMISATION

G. ALLAIRE

25 Septembre 2018

CHAPITRE III (suite)

- ☞ Approximation variationnelle et lemme de Céa
- ☞ Convergence de la méthode des éléments finis.
- ☞ Éléments finis  $\mathbb{P}_2$ .
- ☞ Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

## Rappel: formulation variationnelle en 1-d

### Problème aux limites de Dirichlet:

$$(EDP) \quad \begin{cases} -u'' = f & \text{dans } (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 & \text{sur le bord .} \end{cases}$$

### Formulation variationnelle:

$$(FV) \quad \text{trouver } u \in V_0 \text{ tel que } a(u, \phi) = L(\phi) \quad \forall \phi \in V_0$$

☞ avec  $V_0 = \{ \phi \in C^1[0, L] \text{ tel que } \phi(0) = \phi(L) = 0 \}$ ,

☞ une forme linéaire  $L(\phi) = \int_0^L f(x) \phi(x) dx$ ,

☞ une forme bilinéaire  $a(u, \phi) = \int_0^L u'(x) \phi'(x) dx$ .

**Proposition.** Soit  $u \in C^2[0, L]$ . Alors  $u$  est solution de (EDP) **si et seulement si**  $u \in V_0$  est solution de (FV).

## Rappel: approximation variationnelle

Soit  $V_h$  un sous-espace vectoriel de  $V$ , de dimension finie.

On appelle **approximation variationnelle interne** le problème: trouver  $u_h \in V_h$  tel que

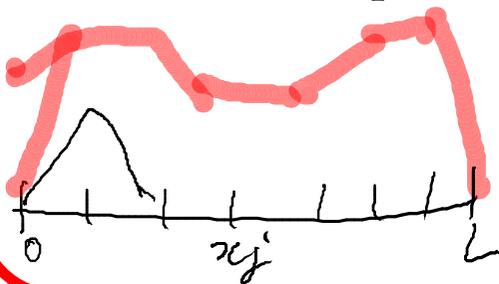
$$a(u_h, \phi_h) = L(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h$$

**Exemple.** La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  est la méthode d'approximation variationnelle interne avec

$$V_h = \{v \in C[0, 1] \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n\},$$

et son sous-espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0\}.$$



## Erreur d'approximation

**Lemme de Céa.** On suppose que la forme bilinéaire est **coercive** au sens où

$$\exists \nu > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \nu \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

et **continue** au sens où

$$\exists M > 0 \text{ tel que } |a(v, w)| \leq M \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V.$$

Soit  $u$  la solution de la formulation variationnelle et soit  $u_h$  la solution de l'approximation variationnelle interne. Alors

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

**Remarque.** La distance entre la solution exacte  $u$  et la solution approchée  $u_h$  est de l'ordre de la distance entre  $u$  et le sous-espace  $V_h$ .

Démonstration

(#v) exacte: trouver  $u \in V$  tel que  $a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$

approximation: trouver  $u_h \in V_h$  tel que  $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

1°) On choisit  $v = v_h \in V_h \subset V$  et on soustrait:

$$a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0 \Rightarrow a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

2°) On étudie

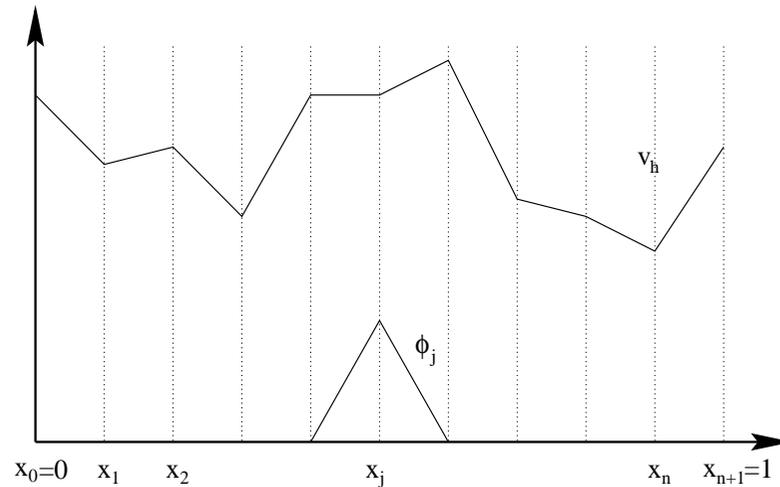
$$\begin{aligned} \forall \|u - u_h\|^2 &\stackrel{\text{coercivité}}{\leq} a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &\leq \eta \|u - u_h\| \cdot \|u - v_h\| \quad \underbrace{a(u - u_h, v_h - u_h)}_{=0 \text{ (cause du 1°)}} \\ &\stackrel{\text{continuité}}{\leq} \eta \|u - u_h\| \cdot \|u - v_h\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\eta}{\nu} \|u - v_h\|$$

$\forall v_h \in V_h$

## Eléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange en 1-d



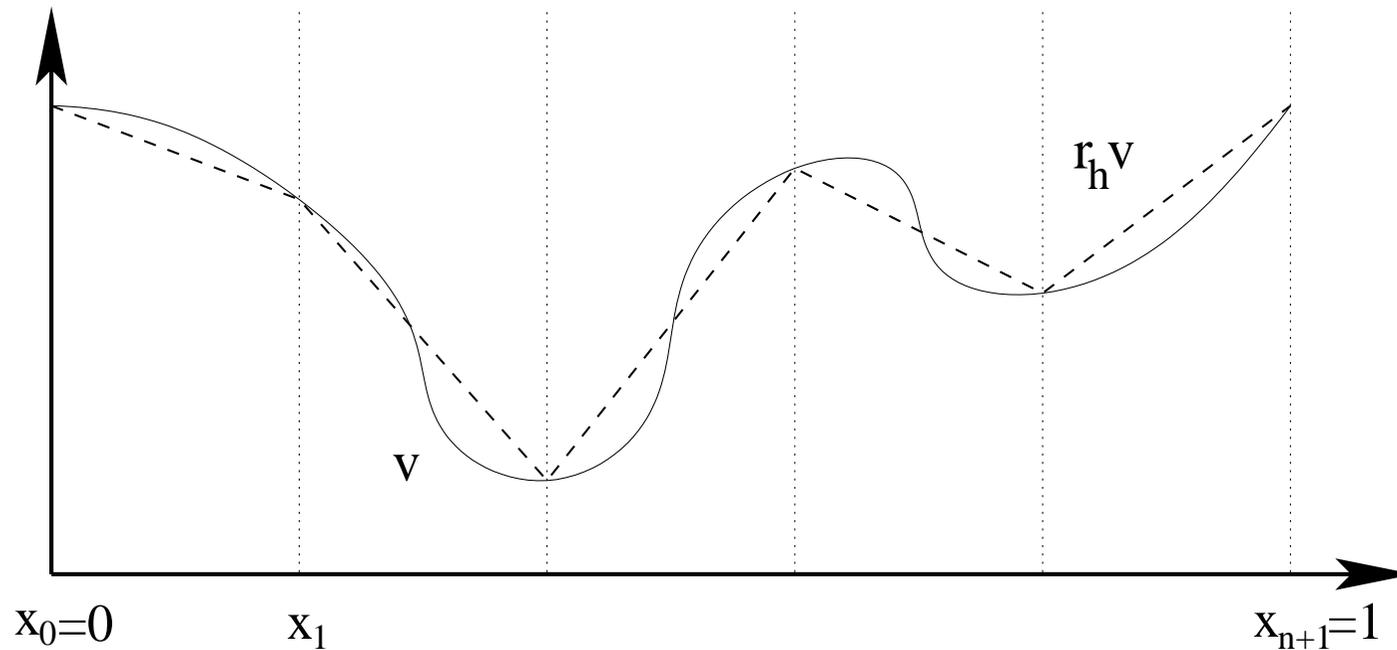
En 1-d, soit le maillage uniforme  $x_j = jh$  avec  $h = \frac{1}{n+1}$ ,  $0 \leq j \leq n+1$ .

Soit la “fonction chapeau” 
$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

On définit les fonctions de base de  $V_h$  par

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) \quad 0 \leq j \leq n+1.$$

## Interpolation



**Définition.** On appelle **opérateur d'interpolation**  $\mathbb{P}_1$  l'application linéaire  $r_h$  de  $C[0, 1]$  dans  $V_h$  définie, pour tout  $v \in C[0, 1]$ , par

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j) \phi_j(x).$$

*↑ fonctions de base  $\mathbb{P}_1$*

### Interpolation (suite)

**Lemme.** Soit  $r_h$  l'opérateur d'interpolation  $\mathbb{P}_1$ . Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que, pour tout  $v \in C^2[0, 1]$ ,

$$\|v - r_h v\|_V \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)},$$

où la norme de  $V$  est définie par  $\|w\|_V^2 = \|w\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w'\|_{L^2(0,1)}^2$ .

## Analyse de convergence

**Théorème.** Soit  $u \in C^2[0, 1]$  la solution de (D) et soit  $u_h \in V_{0h}$  la solution approchée. La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  converge, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et de  $f$  telle que

$$\|u - u_h\|_{V_0} \leq Ch \|f\|_{L^2(0,1)},$$

où la norme de  $V_0$  est définie par  $\|w\|_{V_0} = \|w'\|_{L^2(0,1)}$ .

### Démonstration.

Remarque on vérifie facilement que  $\|w'\|_{L^2(0,1)}$  est une norme sur  $V_0$ .

En effet  $\|w'\| = 0 \Leftrightarrow w = \text{cte}$  mais  $w \in V_0$   $w(0) = w(1) = 0 \Rightarrow w = 0$

Démonstration      lemme de Céa + lemme d'interpolation

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\eta}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \leq \frac{\eta}{\nu} \|u - \mathcal{R}u\|$$

interpolation  $\Rightarrow \|u - \mathcal{R}u\| \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = Ch \|f\|_{L^2(0,1)}$

## Analogie avec les différences finies

**Rappel.** Le Théorème de Lax démontre que la convergence d'un schéma aux différences finies découle de **sa stabilité et de sa consistance**.

Le rôle de la consistance pour les éléments finis est joué par le lemme d'interpolation, tandis que le rôle de la stabilité est tenu par la propriété de coercivité de la forme bilinéaire.

## Preuve du lemme d'interpolation

Soit  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ Soit  $v \in C^2[0,1]$ 

$$v(x) - \mathcal{P}_h v(x) = v(x) - \left( v(x_j) + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (v(x_{j+1}) - v(x_j)) \right)$$

$$= v(x) - v(x_j) - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (v(x_{j+1}) - v(x_j))$$

$$= \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt$$

$$= (x - x_j) v'(\tilde{x}_j) - (x - x_j) v'(\hat{x}_j)$$

avec  $\tilde{x}_j \in (x_j, x)$   
 $\hat{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$ 

$$= (x - x_j) \int_{\tilde{x}_j}^{\hat{x}_j} v''(t) dt$$

Cauchy Schwartz

On majora:

$$|v(x) - \mathcal{P}_h v(x)|^2 \leq h^2 \left( \int_{\tilde{x}_j}^{\hat{x}_j} v''(t) dt \right)^2 \leq h^2 \underbrace{|\tilde{x}_j - \hat{x}_j|}_{\leq h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''|^2 dt$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - \mathcal{P}_h v(x)|^2 dx \leq h^4 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''|^2 dx \leq h^3 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''|^2 dx$$

On somme sur  $j$ :

$$\int_0^1 |v(x) - (Rv)(x)|^2 dx \leq h^4 \int_0^1 |v''(x)|^2 dx$$

$$\|v - (Rv)\|_{L^2(0,1)} \leq h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)} \quad \underline{\text{PiEUX !}}$$

Regardons maintenant la dérivée:  $x \in [x_j, x_{j+1}]$

$$v'(x) - (Rv)'(x) = v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = v'(x) - v'(\tilde{x}_j) \quad \text{avec } \tilde{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$$

$$= \int_{x_j}^x v''(t) dt$$

$$|v'(x) - (Rv)'(x)|^2 \leq h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''|^2 dt \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

$$\Rightarrow \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(v)')|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''|^2 dx$$

On somme  $\Rightarrow$

$$\int_0^1 |v' - (Rv)')|^2 dx \leq h^2 \int_0^1 |v''|^2 dx$$

## Eléments finis $\mathbb{P}_2$ de Lagrange en 1-d

La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  repose sur l'espace discret

$$V_h = \{v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_2 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n\},$$

et sur son sous-espace  $V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0\}$ .

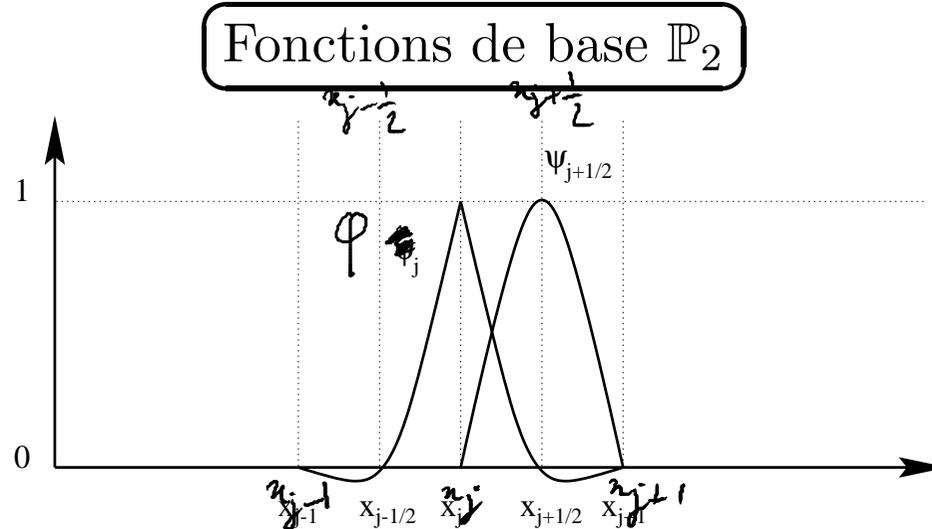
**Rappel.** EF de Lagrange = fonctions de  $V_h$  définies par ses valeurs en des **noeuds** du maillage.

Un polynôme  $\mathbb{P}_2$  est défini par une constante de plus qu'un polynôme  $\mathbb{P}_1$ .

**Donc il n'y a pas assez points  $x_j = jh$ , sommets du maillage !**

On introduit les **points milieux** des segments  $[x_j, x_{j+1}]$  définis par  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$  pour  $0 \leq j \leq n$ .

**Conclusion.** Une fonction de  $V_h$  pour la méthode  $\mathbb{P}_2$  est définie par ses valeurs aux sommets  $x_j$  et aux points milieux  $x_{j+1/2}$ .



Pour un maillage uniforme, on définit les fonctions de base

$$\psi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right), \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad \text{et} \quad \psi_{j+1/2}(x) = \psi\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{h}\right), \quad 0 \leq j \leq n,$$

avec les deux fonctions “mères”

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2. \end{cases}$$



**Théorème (admis).** Soit  $u \in C^3([0, 1])$  la solution exacte et  $u_h \in V_{0h}$  la solution approchée par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_2$ . Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

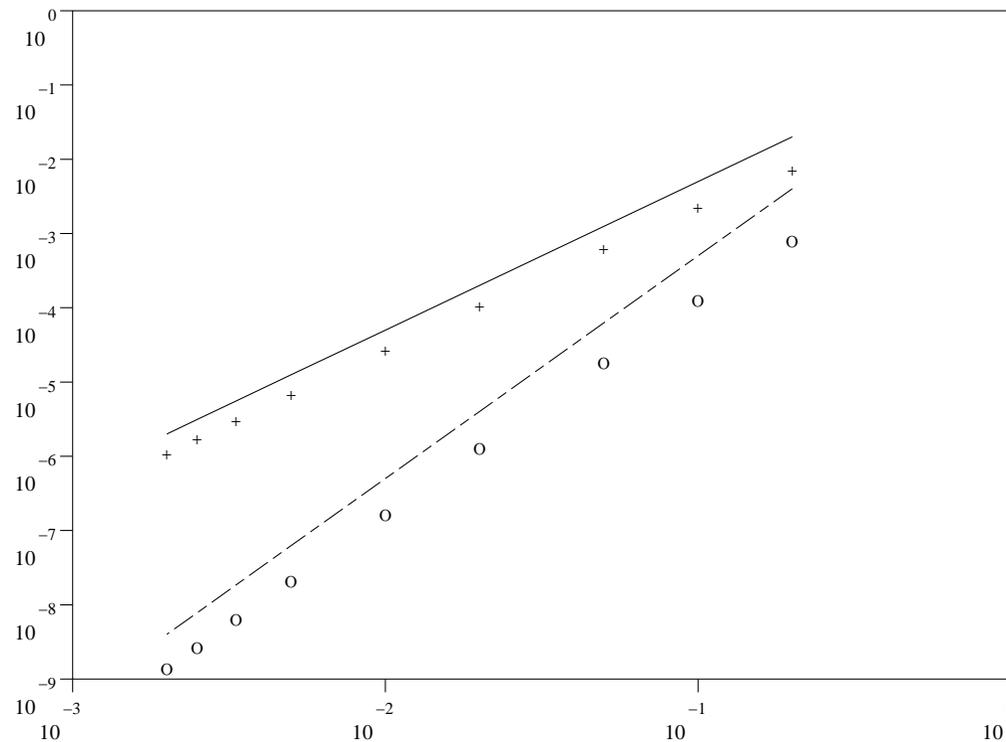
$$\|u - u_h\|_{V_0} \leq Ch^2 \|f'\|_{L^2(0,1)}.$$

*ou bien  $\|u'''\|_{L^2(0,1)}$*

**Remarque (comparaison  $\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_1$ ).** Il y a 2 fois plus d'inconnues pour  $\mathbb{P}_2$  que pour  $\mathbb{P}_1$  et la matrice de rigidité est plus "pleine". Mais la méthode  $\mathbb{P}_2$  converge beaucoup plus vite que celle  $\mathbb{P}_1$ .

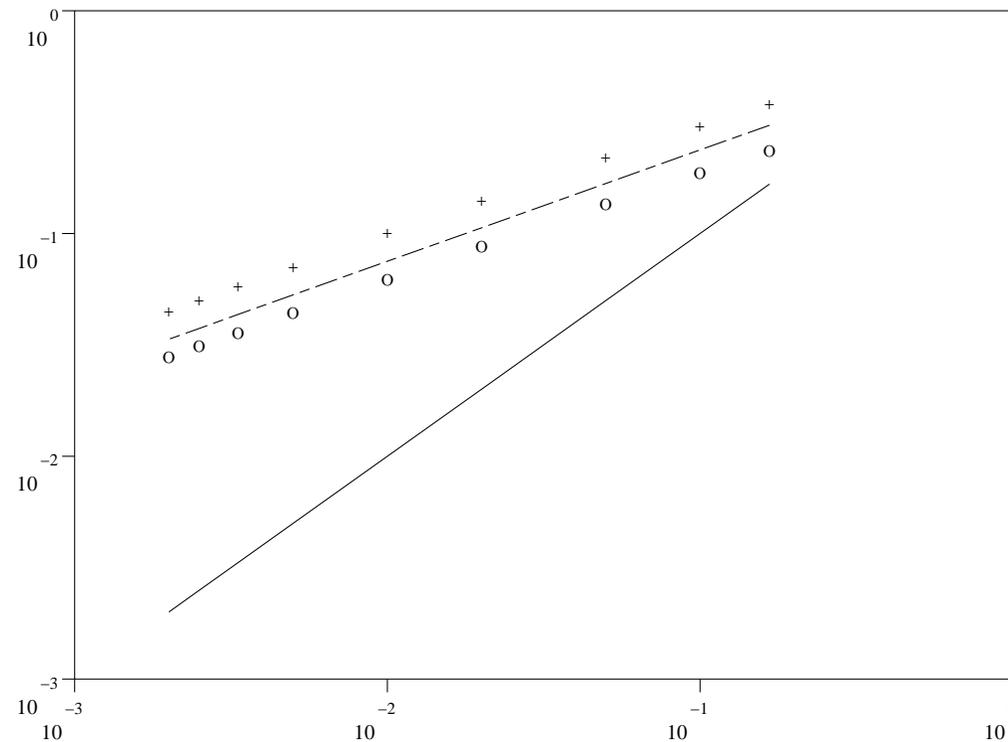
**Attention !** La meilleure convergence de  $\mathbb{P}_2$  n'est valable que pour des solutions régulières...

$\|u - u_h\|$  en échelle log



$h$  en échelle log

Cas d'une solution régulière. Courbe de convergence de la norme discrète  $\|u - u_h\|_{V_0}$  de l'erreur en fonction du pas  $h$  du maillage (les croix correspondent aux éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , les ronds aux éléments finis  $\mathbb{P}_2$ , les droites sont les tracés de  $h \rightarrow h^2$  et  $h \rightarrow h^3$ ). ← "super-convergence"



Cas d'une solution non régulière. Courbe de convergence de la norme discrète  $\|u - u_h\|_{V_0}$  de l'erreur en fonction du pas  $h$  du maillage (les croix correspondent aux éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , les ronds aux éléments finis  $\mathbb{P}_2$ , les droites sont les tracés de  $h \rightarrow \sqrt{h}$  et  $h \rightarrow h$ ).

## Résolution des systèmes linéaires (suite et fin)

$$Ax = b$$

- ☞ **Problème crucial** en temps CPU et place mémoire dans le calcul scientifique.
- ☞ On ne calcule jamais la matrice **inverse**  $A^{-1}$  !
- ☞ Deux classes de méthodes: **directes** et **itératives**.
- ☞ On ne stocke pas toute la matrice  $A$  qui est souvent **creuse** (contient beaucoup d'éléments nuls).

$$A = \begin{pmatrix} & & F \\ E & & \end{pmatrix}$$

## Méthodes itératives

Soit  $A$  une matrice inversible avec  $A = M - N$  et  $M$  inversible. Pour résoudre  $Ax = b$  on définit une méthode itérative basée sur la décomposition  $(M, N)$  par

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n, \\ Mx_{k+1} = Nx_k + b \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

### Exemples:

☞ **Jacobi:**  $M = \text{diag}(A)$  et  $N = \text{diag}(A) - A$

☞ **Gauss-Seidel:** si  $A = D - E - F$  avec  $D$  diagonal,  $E$  triangulaire inférieur et  $F$  triangulaire supérieur, alors  $M = D - E$  et  $N = F$ .

☞ **Gradient conjugué:** plus compliqué !

$$\text{Si } n \rightarrow \infty \Rightarrow An_{\infty} = Nn_{\infty} + b \Leftrightarrow An_{\infty} = b$$

## Méthodes itératives

**Définition.** Une méthode itérative est dite convergente si, pour tout vecteur initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la suite  $x_k$  converge vers la solution exacte  $x$ .

**Lemme.** La méthode itérative converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice d'itération  $M^{-1}N$  vérifie  $\rho(M^{-1}N) < 1$ .

**Preuve.**  $\Pi x^{k+1} = A x^k + b \Leftrightarrow x^{k+1} = \Pi^{-1} A x^k + \Pi^{-1} b$  ou  $x = \Pi^{-1} A x + \Pi^{-1} b$

Soit l'erreur  $e^k = x_k - x \Rightarrow$  on construit  $e^{k+1} = \Pi^{-1} N e^k$

Donc  $e^k = (\Pi^{-1} N)^k e^0$

Si  $\rho(\Pi^{-1} N) \geq 1 \Rightarrow \exists$  valeur propre  $\lambda$  telle que  $|\lambda| \geq 1$  et un vecteur propre  $v$  tel que

$$\Pi^{-1} N v = \lambda v \Rightarrow \text{on choisit } e^0 = v \Leftrightarrow x = x + v$$

$$\Rightarrow \boxed{e^k = \lambda^k v} \quad \lambda^k \not\rightarrow 0$$

Donc non convergente.

Si  $\rho(N^{-1}) < 1$ , alors :

Lemme  $\exists$  une norme telle que  $\|N^{-1}\| < 1$ . matricielle subordonnée

Preuve : voir poly. On choisit la norme qui dépend de  $N^{-1}$  !

Dans ce cas  $\|N^{-1}\| \approx \rho(N^{-1})$

---

$$\|e^k\| \leq \| (N^{-1})^k \| \|e_0\| \leq \|N^{-1}\|^k \|e_0\| \rightarrow 0$$

Donc  $e_k \rightarrow 0$   
On converge.

## Préconditionnement

Idée cruciale !

Soit une matrice inversible  $C$  proche de  $A$  mais plus facile à inverser. Comme

$$Ax = b \Leftrightarrow C^{-1}Ax = C^{-1}b,$$

on applique une méthode itérative à  $C^{-1}A$  en **espérant** que  $\rho(M^{-1}N)$  sera plus petit pour  $C^{-1}A$  que pour  $A$ .

**Exemple:**  $C = \text{diag}(A)$  ou bien  $C =$  approximation de  $LU$ .  
 $=$  factorisation incomplète  $ILU(0)$

lemme (conditionnement)

$$Ax = b \quad \text{ou} \quad A(x+\delta x) = b + \delta b$$

avec  $\delta b \in \mathbb{R}^m$  petit (erreurs d'arrondi)

$$\|\delta x\| \leq ? \|\delta b\|$$

Preuve on partait  $Ax = b \quad \hat{=} \quad A(x+\delta x) = b + \delta b$

$$\Rightarrow A\delta x = \delta b \quad \Rightarrow \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

en relatif

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta b\|}{\|b\| \|A\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\text{car } Ax = b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad \text{et} \quad \text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Remarque  
 $\text{cond}(A) \geq 1$



Il ne s'agit pas comme une récurrence à 2 termes  $\mathcal{N}a^{k+1} = \mathcal{N}a^k + b$   
 mais comme une récurrence à 3 termes.

## Gradient conjugué

lien avec l'optimisation:  
 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x \right) = \frac{1}{2} \begin{matrix} Ax^* \cdot x^* \\ - b \cdot x^* \end{matrix}$   
 $x^*$  vérifie  $Ax^* = b$

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive, et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $(x_k, r_k, p_k)$  trois suites définies par les relations de récurrence

$$p_0 = r_0 = b - Ax_0, \text{ et pour } 0 \leq k \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \\ r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \\ p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \end{array} \right. \Rightarrow r_0 = b - Ax_0$$

← suite de directions conjuguées

avec

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{Ap_k \cdot p_k} \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2}.$$

Alors, la suite  $(x_k)$  de la méthode du gradient conjugué converge en moins de  $n$  itérations vers la solution du système linéaire  $Ax = b$ .