APPROXIMATION NUMERIQUE ET OPTIMISATION

G. ALLAIRE

28 Novembre 2017

CHAPITRE III (début)

- ☞ Formulations variationnelles.
- ☞ Approximation variationnelle.
- ☞ Eléments finis.

Problème aux limites

Comment peut-on résoudre:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En dimension 1, si $\Omega = (0, L)$, alors

$$u(x) = Cx - \int_0^x \int_0^y f(z)\, dz\, dy \quad \text{avec} \quad C = L^{-1} \int_0^L \int_0^y f(z)\, dz\, dy$$

Mais en dimension plus grande ? Pas de formule explicite...

Idée principale: formulation variationnelle.

Formulation variationnelle en 1-d

Problème aux limites de Dirichlet:

$$(EDP) \quad \begin{cases} -u'' = f & \text{dans } (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 & \text{sur le bord } . \end{cases}$$

Formulation variationnelle: trouver
$u \in V_0 = \left\{ \phi \in C^1[0, L] \text{ tel que } \phi(0) = \phi(L) = 0 \right\}$ qui vérifie

$$(FV) \quad \int_0^L u'(x)\, \phi'(x)\, dx = \int_0^L f(x)\, \phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in V_0.$$

Proposition. Soit $u \in C^2[0, L]$. Alors u est solution de (EDP) si et seulement si $u \in V_0$ est solution de (FV).

(EDP) $\Longrightarrow$ (FV)

Démonstration

equation × fct test $\varphi \in V_0 \longrightarrow \varphi(0) = \varphi(L) = 0$

$$\int_0^L -u''\varphi\,dx = \int_0^L f\varphi\,dx$$

|| intégration par parties

$$\int_0^L + u'\varphi'\,dx - u'(L)\underbrace{\varphi(L)}_{=0} + u'(0)\underbrace{\varphi(0)}_{=0}$$

$$\int_0^L u'\varphi'\,dx = \int_0^L f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in V_0 \qquad \text{(FV)}$$

(FV) $\Longrightarrow$ (EDP)

$\Downarrow$

$$-\int_0^L u''\varphi\,dx + u'(L)\underbrace{\varphi(L)}_{=0} - u'(0)\underbrace{\varphi(0)}_{=0} = \int_0^L f\varphi\,dx$$

$\Rightarrow \int_0^L (u''+f)\varphi\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in V_0$

<u>Lemme</u> Soit $g(x)$ une fct continue sur $[0,L]$.
Si $\int_0^L g(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in V_0$, alors $g(x) \equiv 0$ sur $[0,L]$.

Si le lemme est vrai, alors $-u'' = f$ dans $[0,L]$
et $u \in V_0 \Rightarrow u(0) = u(L) = 0$ (EDP) !

<u>Preuve du lemme</u> $\exists x_0 \in [0,L]$ tq $g(x_0) \neq 0$. On suppose $g(x_0) > 0$
Par continuité on peut supposer que $x_0 \in]0,L[$. $\exists \varepsilon > 0$ petit
tel que $g(x) > 0$ sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ on choisit $\varphi(x) \geq 0$ et à $\varphi \neq 0$
support dans $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \Rightarrow \underbrace{\int_0^L g\varphi\, dx}_{=0} > 0$

contradiction $\Rightarrow g \equiv 0$

<u>Remarque</u> analogie très simple !

Soit A matrice $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$

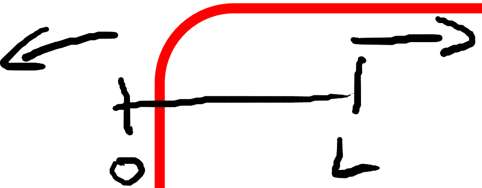
$$Ax = b \iff Ax \cdot y = b \cdot y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Remarque. Si on veut résoudre un problème avec des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } (0, L) \\ u(0) = \alpha,\ u(L) = \beta & \text{sur le bord} \end{cases}$$

alors on pose $u(x) = \tilde{u}(x) + (\alpha(L-x) + \beta x)/L$ et on cherche $\tilde{u}$ solution de

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f & \text{dans } (0, L) \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(L) = 0 & \text{sur le bord} \end{cases}$$



Condition aux limites de Neumann et Fourier

Condition aux limites de Fourier: étant donné un paramètre $\kappa \geq 0$

$$(EDP) \quad \begin{cases} -u'' = f & \text{dans } (0,L) \\ -u'(0) + \kappa u(0) = \alpha,\ u'(L) + \kappa u(L) = \beta & \text{sur le bord .} \end{cases}$$

Les conditions aux limites de Neumman correspondent à $\kappa = 0$.

Formulation variationnelle: trouver $u \in V = C^1[0,L]$ qui vérifie

$$(FV) \quad \int_0^L u'(x)\,\phi'(x)\,dx + \kappa\big(u(L)\phi(L) + u(0)\phi(0)\big) = \int_0^L f(x)\,\phi(x)\,dx + \beta\phi(L) + \alpha\phi(0) \quad \forall \phi \in V.$$

Proposition. Soit $u \in C^2[0,L]$. Alors u est solution de (EDP) si et seulement si $u \in V$ est solution de (FV).

Remarques

- ☞ Dans une formulation variationnelle on a besoin de dériver une fois de moins (pratique !).
- ☞ La condition aux limites de Dirichlet apparait dans la définition de l'espace V_0. On parle de condition aux limites essentielle (ou explicite).
- ☞ La condition aux limites de Neumann ou de Fourier n'apparait pas dans la définition de l'espace V. On parle de condition aux limites naturelle (ou implicite).
- ☞ Dans le cas $\kappa = 0$ (condition aux limites de Neumann), il ne peut exister de solution que s'il y a équilibre des sources

$$\int_0^L f(x)\,dx + \beta + \alpha = 0$$

(EDP) $\Longrightarrow$ (FV)

Démonstration

$$\int_0^L -u''\varphi\,dx = \int_0^L f\varphi\,dx$$

$$\|$$

$$\int_0^L u'\varphi'\,dx \underbrace{-u'(L)}_{=\,+\kappa u(L)-\beta}\varphi(L) + \underbrace{u'(0)}_{=\,\kappa u(0)-\alpha}\varphi(0)$$

$$= \int_0^L u'\varphi'\,dx + \kappa\big(u(L)\varphi(L) + u(0)\varphi(0)\big) - \beta\varphi(L) - \alpha\varphi(0)$$

(FV) $\displaystyle \int_0^L u'\varphi'\,dx + \kappa\,[u\varphi]_0^L = \int_0^L f\varphi\,dx + \beta\varphi(L) + \alpha\varphi(0)$

Réciproque

$$-\int_0^L u''\varphi\,dx + u'(L)\varphi(L) - u'(0)\varphi(0) + \kappa\big(u(L)\varphi(L) + u(0)\varphi(0)\big) = \ldots$$

1°) On choisit φ tel que $\varphi(L) = \varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^L (u'' + f)\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in V_0$$

$$\Rightarrow -u'' = f \quad \text{dans } (0, L)$$

2°) On choisit φ quelconque. On réécrit l'égalité avec l'information $-u'' = f$

$$u'(L)\varphi(L) - u'(0)\varphi(0) + \kappa\big(u(L)\varphi(L) + u(0)\varphi(0)\big) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi(L)$$

$$\underbrace{\varphi(L)}_{\forall \in \mathbb{R}}\Big[\underbrace{u'(L) + \kappa u(L) - \beta}_{=0}\Big] + \underbrace{\varphi(0)}_{\forall \in \mathbb{R}}\Big[\underbrace{-u'(0) + \kappa u(0) - \alpha}_{=0}\Big] = 0$$

CL. de l'EDP

Formulation variationnelle abstraite

Dans tous les cas une formulation variationnelle (FV) se met sous la forme générale suivante: trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, \phi) = L(\phi) \quad \forall \phi \in V$$

avec

- ☞ V un espace vectoriel réel,
- ☞ $L(\cdot)$ une forme linéaire sur V (c'est-à-dire une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$).
- ☞ $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur V (c'est-à-dire une application de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacun de ses deux arguments).
- ☞ Dans ce cours on ne démontre pas l'existence d'une solution de la FV.

Dans le cas Dirichlet on a $V = V_0 = \big\{\phi \in C^1[0,L] \text{ tel que } \phi(0) = \phi(L) = 0\big\}$,

$$a(u,\phi) = \int_0^L u'(x)\phi'(x)\,dx \quad \text{et} \quad L(\phi) = \int_0^L f(x)\,\phi(x)\,dx,$$

tandis que pour Fourier/Neumann on a $V = C^1[0,L]$,

$$a(u,\phi) = \int_0^L u'(x)\,\phi'(x)\,dx + \kappa\big(u(L)\phi(L) + u(0)\phi(0)\big)$$

et

$$L(\phi) = \int_0^L f(x)\,\phi(x)\,dx + \beta\phi(L) + \alpha\phi(0)$$

Remarque (importante pour les éléments finis). Les formulations variationnelles sont toujours bien définies si on remplace $C^1[0,L]$ par $\{\phi \in C^0[0,L]$ dérivable par morceaux $\}$.

Approximation variationnelle

Soit une formulation variationnelle: trouver $u \in V$ tel que $a(u, \phi) = L(\phi)$ pour tout $\phi \in V$.

Soit V_h un sous-espace vectoriel de V, de dimension finie.

On appelle **approximation variationnelle interne** le problème: trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, \phi_h) = L(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h$$

Lemme. On suppose que la forme bilinéaire est coercive

$$\exists \nu > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \nu \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors il existe une unique solution de l'approximation variationnelle interne qui, de plus, s'obtient en résolvant un système linéaire.

Démonstration

dim $V_h = n < +\infty$

Base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V_h

Solution $u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$

Fct test φ_j

$a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j)$

$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = L(\varphi_j) \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$

matrice de rigidité $K = \left(a(\varphi_i, \varphi_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$

$b = (L(\varphi_j))_{1 \leq j \leq n}$

$\boxed{KU = b}$

La matrice K est inversible à cause de la coercivité :

$\forall v \in V_h$ $\qquad v = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i$

$$a(v,v) \geq \nu \|v\|^2 \geq \nu C \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}_{\text{autre norme sur } V_h}$$

norme sur V_h
de dim finie

$\parallel$

$KV.V$

avec $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$

$$\Rightarrow KV.V \geq \underbrace{\nu C}_{>0} |V|^2$$

$$\Rightarrow \ker K = \{0\}$$

Erreur d'approximation

Lemme de Céa. On suppose que la forme bilinéaire est coercive et continue au sens où

$$\exists M > 0 \text{ tel que } |a(v,w)| \leq M\|v\|\|w\| \quad \forall v, w \in V.$$

Soit u la solution de la formulation variationnelle et soit u_h la solution de l'approximation variationnelle interne. On a

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \underbrace{\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|}_{= \text{distance de } u \text{ à } V_h}.$$

Démonstration

(FV) trouver $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$

approximation : trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

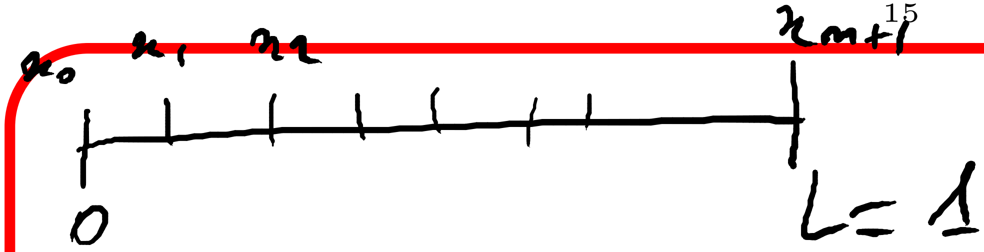
choisir $v = v_h$ et on soustrait :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\nu \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) + \underbrace{a(u - u_h, v_h - u_h)}_{=0}$$

$$\leq M \|u - u_h\| \cdot \|u - v_h\|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h}$$



Eléments finis en 1-d

En 1-d, un maillage du segment $(0,1)$ est une collection de points (appelés sommets ou noeuds) $(x_j)_{0\le j\le n+1}$ tels que

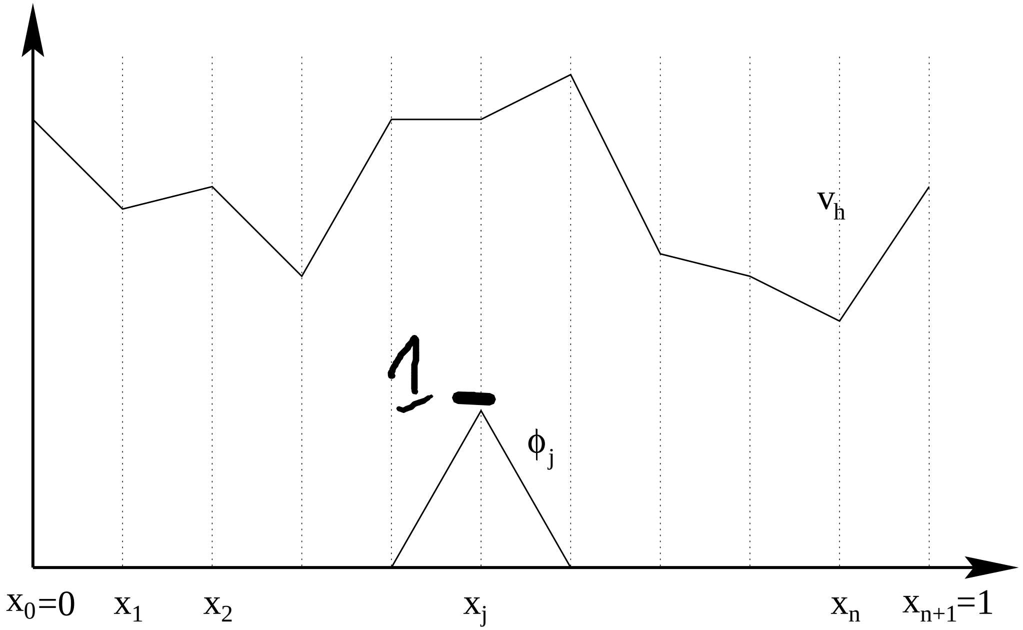
$$x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Le maillage est dit uniforme si les points x_j sont équidistants, c'est-à-dire que

$$x_j = jh \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{n+1},\ 0 \le j \le n+1.$$

On note $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k.

Eléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$

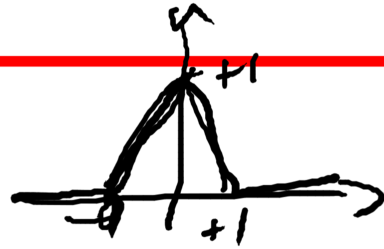


La méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ est la méthode d'approximation variationnelle interne avec

$$V_h = \left\{ v \in C[0,1] \text{ tel que } v\Big|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n \right\},$$

et son sous-espace

$$V_{0h} = \{ v \in V_h \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0 \}.$$



Base de V_h

Soit la "fonction chapeau" $\quad \phi(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x|\le 1, \\ 0 & \text{si } |x|>1. \end{cases}$

Pour un maillage uniforme, on définit les fonctions de base

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \quad 0 \le j \le n+1.$$

Lemme. L'espace V_h est un espace vectoriel de dimension $n+2$, et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets

Lagrange

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j)\phi_j(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

De même, V_{0h} est un espace vectoriel de dimension n, et toute fonction $v_h \in V_{0h}$ vérifie $v_h(x) = \sum_{j=1}^{n} v_h(x_j)\phi_j(x) \quad \forall x \in [0,1]$.

Démonstration

(φ_j) sont libres $\Rightarrow$ base de V_h

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_j \, \varphi_j(x)$$

$$v_h(x_k) = \sum_{j=0}^{n+1} v_j \, \delta_{jk} = v_k$$

Résolution pratique

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

solution $u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x) \in V_{0h}$

$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}$

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\, u_i = L(\varphi_j)$$

$$\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' \, dx \qquad\qquad \int_0^1 f \varphi_j \, dx$$

quadrature

$= 0$ sauf si $|i-j| \le 1$

$$\varphi_i' = \begin{cases} 1/h & x_{i-1} < x < x_i \\ -1/h & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\int_0^1 |\varphi_i'|^2 \, dx = \frac{2}{h} \\ &\int_0^1 \varphi_i' \varphi_{i+1}' \, dx = \frac{-1}{h} \end{aligned}$$

Matrice de rigidité

On définit la matrice de rigidité

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)\,dx \right)_{1 \le i,j \le n},$$

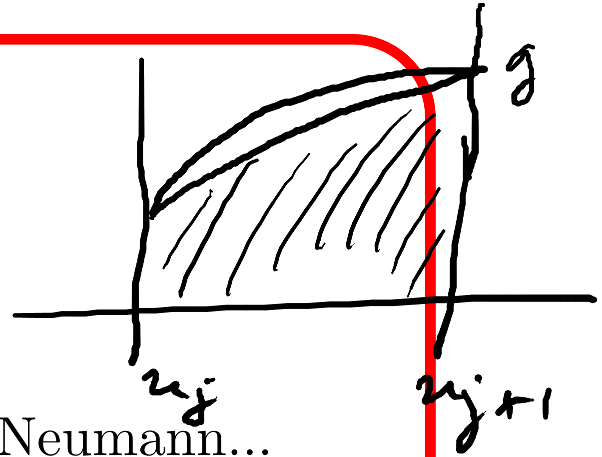
Lemme. La matrice $\mathcal{K}_h$ est tridiagonale

$$\mathcal{K}_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Coïncidence ! En 1-d il y a correspondance entre EF et DF

Démonstration

matrice creuse !



Aspects pratiques

Formules de quadrature, résolution de système linéaire, CL de Neumann...

Comment calculer $\int_0^1 f\varphi_i\,dx$?

Formule des trapèzes : $\displaystyle\int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(g(x_{j+1})+g(x_j)\right)$

Formule de Simpson

Formule du point milieu $\displaystyle\int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x)\,dx \approx h\, g(x_{j+\frac{1}{2}})$

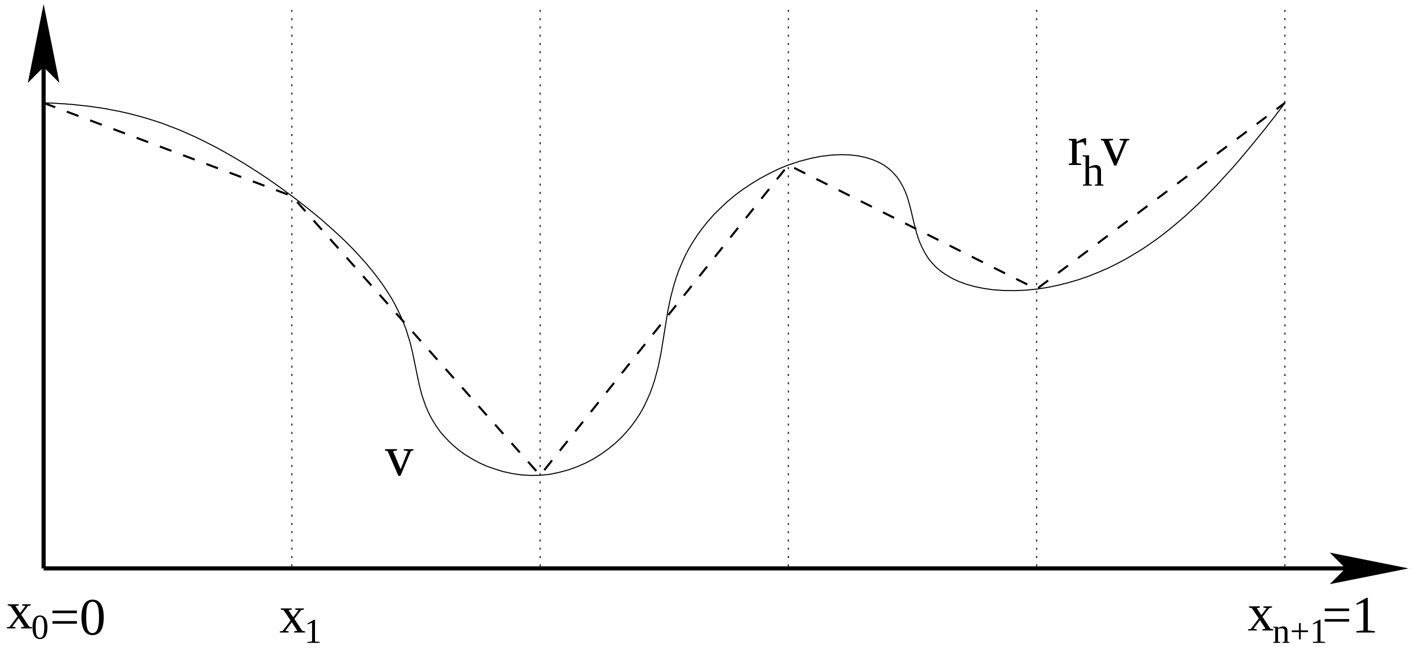
$x_{j+\frac{1}{2}} = (j+\frac{1}{2})h$

Formule de trapèze :

$$\int_0^1 f(x)\varphi_j(x) \simeq \sum_i h\, f(x_i)\, \underbrace{\varphi_j(x_i)}_{=\delta_{ij}}$$

$$\simeq f(x_j)$$

Interpolation



Définition. On appelle opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$ l'application linéaire r_h de $C[0,1]$ dans V_h définie, pour tout $v \in C[0,1]$, par

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j)\phi_j(x).$$

Interpolation (suite)

Lemme. Soit r_h l'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$. Il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout $v \in C^2[0,1]$,

$$\|v - r_h v\|_V \leq Ch\|v''\|_{L^2(0,1)},$$

où la norme de V est définie par $\|w\|_V^2 = \|w\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w'\|_{L^2(0,1)}^2$.

<u>Preuve</u> $\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq C h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}$

$$r_h v(x) = v(x_j) + (x - x_j) \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad \text{si } x \in (x_j, x_{j+1})$$

$$v(x) - r_h v(x) = v(x) - v(x_j) - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \left(v(x_{j+1}) - v(x_j) \right)$$

$$= (x - x_j) v'(x_j + \theta_j) - \frac{x - x_j}{\cancel{(x_{j+1} - x_j)}} \cancel{(x_{j+1} - x_j)} v'(x_j + \tilde{\theta}_j)$$

$$= (x - x_j) \left(v'(x_j + \theta_j) - v'(x_j + \tilde{\theta}_j) \right) \qquad 0 \leq \theta_j, \tilde{\theta}_j \leq h$$

$$= (x - x_j) (\theta_j - \tilde{\theta}_j) v''(x_j + \xi)$$

$$|v(x) - r_h v(x)|^2 \leq h^2 |v''| \quad \Rightarrow \int_0^1 |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq h^4 \int_0^1 |v''|^2 dx$$

Analyse de convergence

Théorème. Soit $u \in C^2[0,1]$ la solution de (D) et soit $u_h \in V_{0h}$ la solution approchée. La méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ converge, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de h et de f telle que

$$\|u - u_h\|_{V_0} \leq Ch\|f\|_{L^2(0,1)},$$

où la norme de V_0 est définie par $\|w\|_{V_0} = \|w'\|_{L^2(0,1)}$.

Démonstration.

1°) Lemme de Céa : $\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$

2°) interpolation : choix particulier $v_h = r_h u$

$\Rightarrow \|u - u_h\| \leq C\|u - r_h u\| \leq C h \|u''\|_{L^2}$

Preuve du lemme d'interpolation