APPROXIMATION NUMERIQUE ET OPTIMISATION

G. ALLAIRE

12 Décembre 2017

CHAPITRE IV (début)

☞ Définitions, notations.

☞ Analyse convexe.

☞ Différentiabilité.

☞ Conditions d'optimalité: cas convexe.

☞ Conditions d'optimalité: cas non convexe.

DEFINITIONS

Soit V un espace vectoriel normé (on suppose que $dim(V) < \infty$ mais certains résultats restent vrais pour des espaces de Hilbert ou de Banach avec $dim(V) = \infty$.)

Soit $K \subset V$ un sous-ensemble non-vide. Soit $J : V \to \mathbb{R}$. On considère

$$\inf_{v \in K \subset V} J(v).$$

Définition. On dit que u est un minimum local de J sur K si

$$u \in K \quad \text{et} \quad \exists \delta > 0 \, , \, \forall v \in K \, , \, \|v - u\| < \delta \Longrightarrow J(v) \geq J(u) \, .$$

On dit que u est un minimum global de J sur K si

$$u \in K \quad \text{et} \quad J(v) \geq J(u) \quad \forall v \in K \, .$$

(différence: théorie $\leftrightarrow$ global / numérique $\leftrightarrow$ local)

Définition. Une suite minimisante du critère J sur l'ensemble K est une suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u^n \in K \;\forall\, n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} J(u^n) = \inf_{v\in K} J(v).$$

Par définition de l'infimum de J sur K **il en existe toujours !**

Remarque. La notation $\inf_{v\in K} J(v)$ désigne aussi un nombre, la valeur infimum.

$$\inf_{v\in K} J(v) = \max\{ c \in \overline{\mathbb{R}} \text{ tq } J(v) \geq c \;\; \forall v \in K \}$$

Supposons qu'il n'existe pas de suites minimisantes

$$\forall u_n \in K \quad \liminf_{n\to+\infty} J(u_n) > \inf_{v} J(v)$$

$$\geq \underbrace{\inf_K J(v) + \varepsilon}_{\text{plus grand minorant de } J \text{ que } \inf J} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

contradiction avec la déf de $\inf J$

Notation (pas universelle).

Si on écrit

$$\min_{v \in K} J(v)$$

c'est que l'on sous-entend que le minimum est atteint

$$\exists v^* \in K \text{ tel que } J(v^*) = \min_{v \in K} J(v)$$

Tandis que si l'on écrit

$$\inf_{v \in K} J(v)$$

on ne sait pas si le minimum est atteint ou pas.

Optimisation en dimension finie $V = \mathbb{R}^N$

Théorème. Soit K un ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}^N$, et J une fonction continue sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété, dite "infinie à l'infini",

$$\forall (u^n)_{n\geq 0} \text{ suite dans } K\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \|u^n\| = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} J(u^n) = +\infty\ .$$

Alors il existe au moins un point de minimum de J sur K. De plus, on peut extraire de toute suite minimisante de J sur K une sous-suite convergeant vers un point de minimum sur K.

(Idée: les fermés bornés sont compacts en dimension finie.)

Remarque. Si K est borné, alors la condition "infinie à l'infini" est vide.

Démonstration

Soit u_n suite minimisante : $J(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_K J$

La propriété infinie à l'infini $\Longrightarrow$ $\|u_n\| \leq C < +\infty \quad \forall n$

En effet si $\exists$ sous-suite $\|u_{n'}\| \to +\infty \Rightarrow J(u_{n'}) \to +\infty$

impossible $\inf J < +\infty$

On peut se u restreindre à $K \cap B(0, C)$ = fermé borné

J fct continue sur un fermé borné $\equiv$ compact en dim finie

$\Rightarrow$ donc J atteint son minimum sur ce compact.

Optimisation en dimension infinie

Problème: une fonction continue sur un fermé borné n'atteint pas toujours son minimum !

Exemple de non-existence: Soit l'espace de Hilbert (de dimension infinie) des suites de carré sommable dans $\mathbb{R}$

$$\ell_2(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_i)_{i \geq 1} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$ et de la norme associée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On considère le problème

$$\inf_{x \in \ell_2(\mathbb{R})} \left\{ J(x) = \left(\|x\|^2 - 1 \right)^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i^2}{i} \right\}$$

qui n'admet pas de point de minimum.

$J(x) \geq 0 \quad \forall x \in l_2(\mathbb{R})$

Démonstration

on construit une suite minimisante

$$x^n = (x_i^n)_{i \geq 1} = (0 - 0 \; \underset{\underset{n}{\uparrow}}{1} \; 0 - 0 \ldots)$$

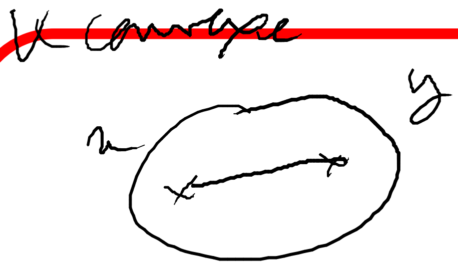
$$x_i^n = \delta_{in} \qquad \|x^n\| = 1$$

$$J(x) = (\|x\|^2 - 1)^2 + \sum_{i \geq 0} \frac{x_i^2}{i}$$

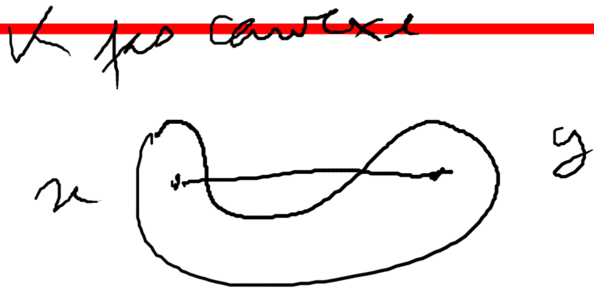
$$J(x^n) = 0 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \implies \boxed{\inf_{l_2(\mathbb{R})} J = 0}$$

$\exists$? x^* tel que $J(x^*) = 0$ NON

$\|x^*\| = 1$ et $x_i^* = 0$ impossible



Analyse convexe

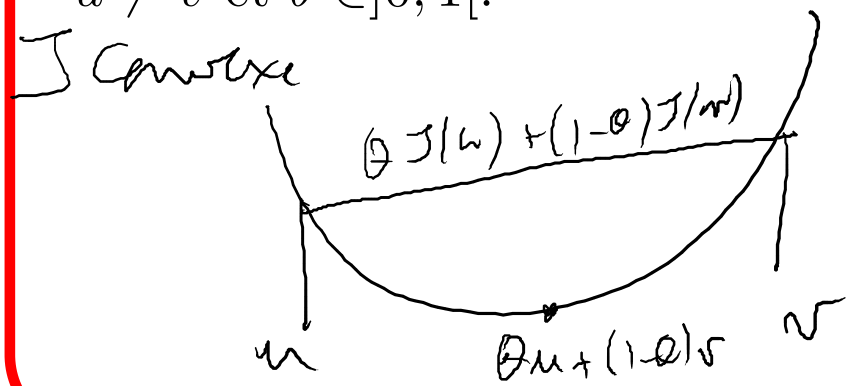


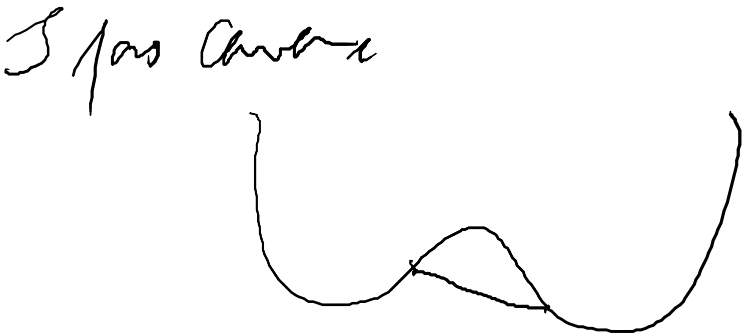
Définition. Un ensemble $K \subset V$ est dit **convexe** si, pour tout $x, y \in K$ et tout réel $\theta \in [0,1]$, l'élément $(\theta x + (1-\theta)y)$ appartient à K.

Définition. On dit qu'une fonction J définie sur un ensemble convexe non vide $K \in V$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **convexe** sur K si et seulement si

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v) \quad \forall\, u, v \in K \ , \ \forall\, \theta \in [0,1] \ .$$

De plus, J est dite **strictement convexe** si l'inégalité est stricte lorsque $u \neq v$ et $\theta \in]0,1[$.





Unicité

Proposition. Si J est strictement convexe, alors il existe au plus un point de minimum.

Preuve. Soit deux points de minimum u_1 et u_2

On suppose que $u_1 \neq u_2$

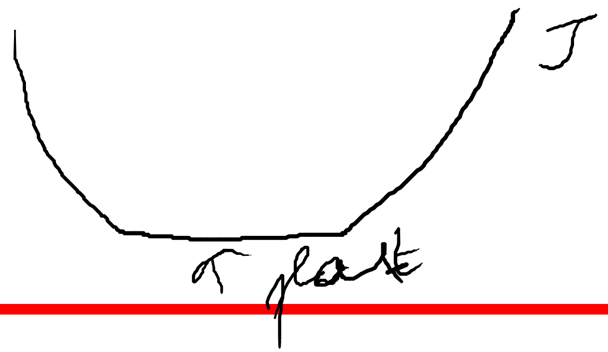
$$J \text{ convexe} \Rightarrow J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2} J(u_1) + \frac{1}{2} J(u_2) = \min_v J(v)$$

Contradiction

$$\Longrightarrow u_1 = u_2$$

---

si J est convexe mais pas strict convexe $\Rightarrow$ pas d'unicité



$\boxed{\text{Convexe} \Rightarrow \text{local=global}}$

Proposition. Si J est une fonction convexe sur un ensemble convexe K, tout point de minimum local de J sur K est un minimum global.

Preuve. Soit $u \in K$ un point de min local
Soit $v \in K$ ______ global

$\exists \delta > 0 \quad \forall w \quad \|u - w\| \leq \delta \qquad J(w) \geq J(u)$

$w = \theta v + (1-\theta) u \qquad \theta$ petit $\Rightarrow \|w - u\| = \theta \|v - u\| \leq \delta$

$\uparrow$ petit

$J(w) \geq J(u)$

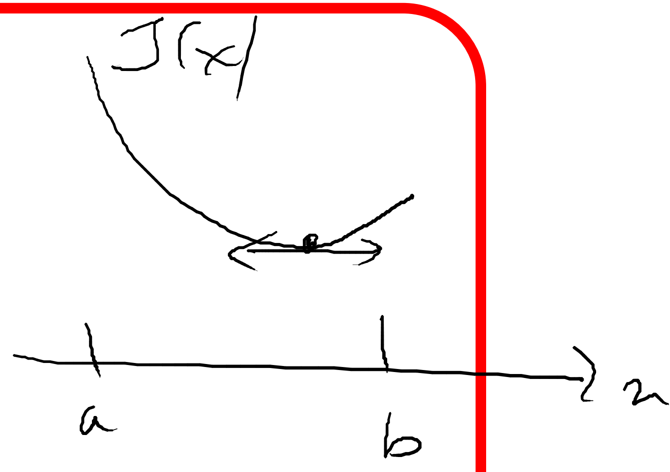
J convexe $\Rightarrow J(u) \leq J(w) \leq \theta J(v) + (1-\theta) J(u) \qquad \theta \neq 0$

$\theta \in [0,1]$

$\Rightarrow J(v) \geq J(u)$ contradiction

sauf si $J(w) = J(u) \Rightarrow u$ min global

Conditions d'optimalité



Pour caractériser ou calculer les solutions de

$$\inf_{v \in K \subset V} J(v)$$

on écrit les conditions d'optimalité (conditions sur les dérivées de J).

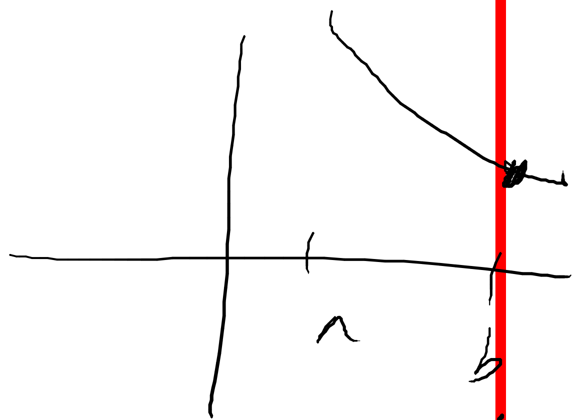
Rappel $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ segment borné $[a,b]$

$J \; C^1$

les points de min de J se trouvent :

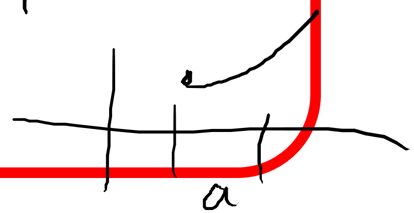
. là où $J'(x) = 0$

. des points extrêmes a, b



$J(b) = \min_{[a,b]} J(x)$ si $J'(b) \leq 0$

$J(a) = \min_{[a,b]} J(x)$ si $J'(a) \geq 0$



Différentiabilité

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et d'une norme associée $\|u\|$.

Définition. On dit que la fonction J, définie sur un voisinage de $u \in V$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est différentiable au sens de Fréchet en u s'il existe une forme linéaire continue $L : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(u+w) = J(u) + L(w) + o(w) \quad \text{avec} \quad \lim_{w\to 0} \frac{|o(w)|}{\|w\|} = 0\ .$$

On appelle L la différentielle (ou la dérivée, ou le gradient) de J en u et on note $L = J'(u)$.

- ☞ Une forme linéaire L sur V est continue s'il existe $C > 0$ telle que $|L(w)| \leq C\|w\|$ pour tout $w \in V$.
- ☞ En dimension finie (par exemple, si $V = \mathbb{R}^N$) toute forme linéaire est continue, donc il n'y a rien à vérifier en ce qui concerne la continuité !

Remarques

- ☞ En dimension finie (et même dans un espace de Hilbert), on sait, grâce au théorème de représentation de Riesz , que pour toute forme linéaire continue L il existe un unique $p \in V$ tel que $\langle p, w \rangle = L(w)$. Par conséquent, on peut simplifier la définition en

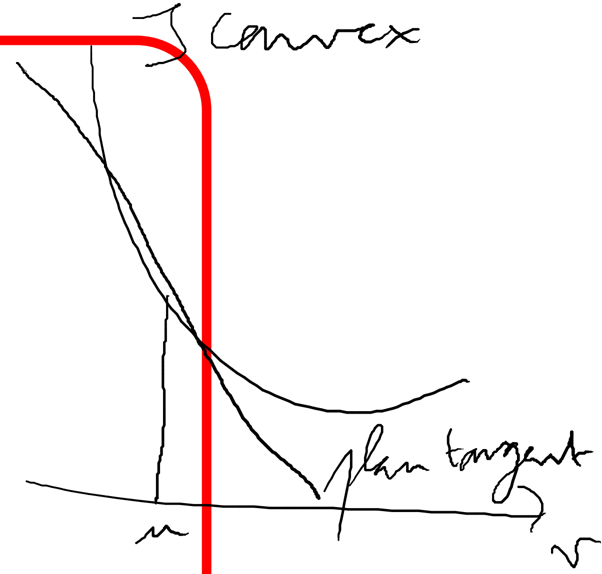
$$J(u+w) = J(u) + \langle p, w \rangle + o(w) \quad \text{avec} \quad \lim_{w \to 0} \frac{|o(w)|}{\|w\|} = 0 \; .$$

- ☞ Pour calculer la dérivée (mais pas pour prouver la différentiabilité Fréchet !) on peut calculer la dérivée directionnelle. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $u, v \in V$, on pose

$$j(t) = J(u + tv)$$

et on dérive $t \to j(t)$

$$j'(0) = J'(u)(v) = \langle J'(u), v \rangle.$$



Convexité

Proposition. Soit J une application différentiable de V dans $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(1) $$J \quad \text{est convexe sur} \quad V\ ,$$

(2) $$J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u\rangle \quad \forall\, u,v \in V\ ,$$

(3) $$\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle \geq 0 \quad \forall\, u,v \in V\ .$$

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta) J(v)$$

$$\|$$

$$J(v + \theta(u-v)) = J(v) + \theta J'(v).(u-v) + o(\theta\|u-v\|)$$

$$\cancel{\theta} J(v) + \cancel{\theta} J'(v).(u-v) + \underset{\downarrow 0}{o(\cancel{\theta})} \leq \cancel{\theta} J(u)$$

$$J(v) + J'(v).(u-v) \leq J(u) \Leftrightarrow (2)$$ en inversant u et v

$(2) \Rightarrow (3)$ $\begin{cases} J(u) \geq J(v) + J'(v)\cdot(u-v) \\ J(v) \geq J(u) + J'(u)\cdot(v-u) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{0 \geq \left(J'(v) - J'(u)\right)\cdot(u-v)}$ $\underline{\underline{(3)!}}$

$(3) \Rightarrow (1)$ on introduit $\varphi(t) = J(u + t(v-u))$ $t \in \mathbb{R}$

$(1)!$

$\varphi'(t) = J'(u + t(v-u))\cdot(v-u)$

on réécrit (3) en remplaçant u par $u + t(v-u)$

v par $u + s(v-u)$

$s \in \mathbb{R}$

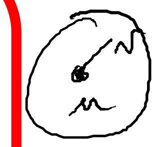
$\boxed{\begin{array}{l} \varphi(\theta) - \varphi(0) \geq \theta\varphi'(t) \\ (1-\theta)\left(\varphi(\theta) - \varphi(0)\right) \geq \theta\left(\varphi(1) - \varphi(\theta)\right) \end{array}}$

$\left(J'(w) - J'(u)\right)\cdot(v-u) \geq 0$

$\left(J'(u + s(v-u)) - J'(u + t(v-u))\right)\cdot(v-u)(s-t) \geq 0$

Si $s \geq t \Rightarrow \varphi'(s) \geq \varphi'(t)$

$\left(\varphi'(s) - \varphi'(t)\right)(s-t) \geq 0$ On intègre $\int_0^\theta ds$ puis $\int_\theta^1 dt$



Conditions d'optimalité: K convexe

Théorème (Inéquation d'Euler). Soit $u \in K$ convexe. On suppose que J est différentiable en u. Si u est un point de minimum local de J sur K, alors

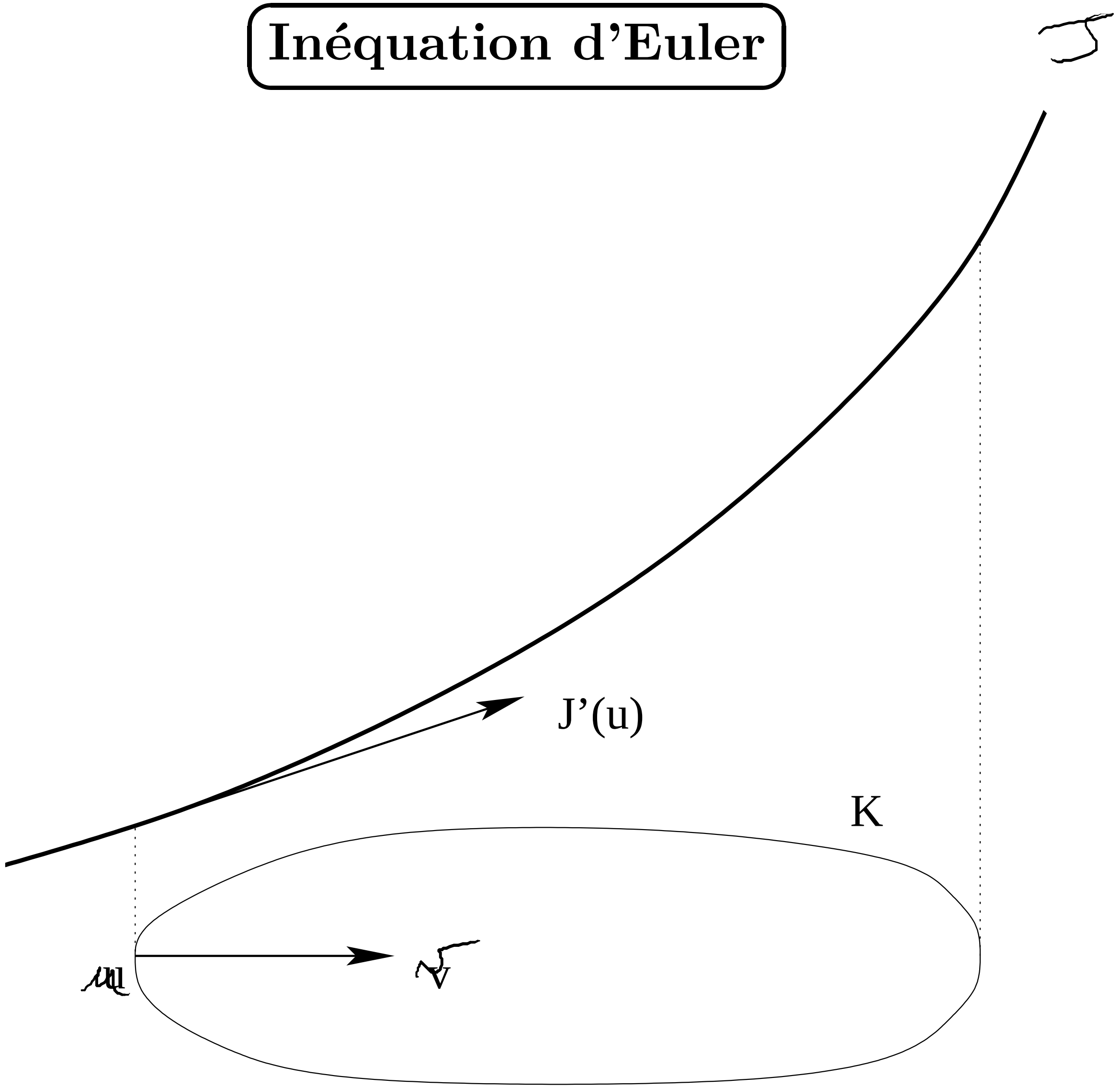
$$\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in K \ .$$

Réciproquement, si $u \in K$ vérifie cette inéquation et si J est convexe, alors u est un minimum global de J sur K.

Remarques.

- ☞ Si u est intérieur à K, on obtient l'équation d'Euler $J'(u) = 0$.
- ☞ L'inéquation d'Euler est seulement nécessaire en général. Pour les fonctions convexes, elle est nécessaire et suffisante.

Inéquation d'Euler



Angle aigu entre la dérivée $J'(u)$ et la direction rentrante $(v - u)$.

Démonstration

u min local $\quad J(u) \leq J(\theta v + (1-\theta)u)$ pour $\theta \geq 0$ petit

$$\|\theta v + (1-\theta)u - u\| = \theta \|v-u\| \leq \delta$$

$$J(u+\theta(v-u)) = J(u) + \theta J'(u).(v-u) + o(\theta)$$

$$0 \leq \cancel{\theta} J'(u).(v-u) + o(\cancel{\theta}) \qquad \theta > 0$$

$$\downarrow$$
$$0$$

$$0 \leq J'(u).(v-u)$$ condition nécessaire d'optimalité

Si J est convexe, condition suffisante

$$J(v) \geq J(u) + \underbrace{J'(u).(v-u)}_{\geq 0} \geq J(u) \Longrightarrow u \text{ min global}$$

$j(t) = J(y + tz)$

Exemple 1

Projection sur un convexe fermé K. Pour $x \in V$, on cherche la projection orthogonale $x_K \in K$ de x sur K

$$\|x - x_K\|^2 = \min_{y \in K} \|x - y\|^2.$$

La condition nécessaire et suffisante d'optimalité est

$$x_K \in K, \quad \langle x_K - x, y - x_K \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

$J(y) = \|x - y\|^2$

$J'(y) \cdot z = 2(x - y) \cdot (-z)$

$= 2(y - x) \cdot z$

$J'(x_K) \cdot (y - x_K) \geq 0$

$(x_K - x) \cdot (y - x_K) \geq 0$

Exemple 2

Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive. Soit B une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m \leq n$. Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère

$$\inf_{x \in \ker B} \left\{ J(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x \right\}.$$

→ si $B = 0$ alors le point de min vérifie $Ax^* = b$

Il existe une unique solution $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$Ax^* - b = B^* p \ \text{ avec } p \in \mathbb{R}^m.$$

avec p solution de $BA^{-1}B^*p = -BA^{-1}b$.

Preuve   inéquation d'Euler $K = \ker B$

(A dp $\geq 0 \Rightarrow J$ convexe strict)

$J'(x) \cdot y = Ax \cdot y - by \Rightarrow J'(x) = Ax - b$

Euler : $(Ax^* - b) \cdot (y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \ker B$ soit

$\forall z \in \ker B \ \exists y$ tq $z = y - x^*$

Enfin $(Ax^* - b) \cdot z \geq 0 \quad \forall z \in \operatorname{Ker} B$

z et $-z$ $\Rightarrow$ $(Ax^* - b) \cdot z = 0 \quad \forall z \in \operatorname{Ker} B$

$\Leftrightarrow (Ax^* - b) \perp \operatorname{Ker} B$

<u>Lemme</u> $(\operatorname{Ker} B)^\perp = \operatorname{Im} B^*$ (exercice : faire la preuve)

$\Rightarrow (Ax^* - b) \in \operatorname{Im} B^*$, $\exists p \in \mathbb{R}^m$

$$\boxed{Ax^* - b = B^* p}$$

Or $x^* \in \operatorname{Ker} B$ $\quad x^* = A^{-1}(B^* p + b)$

$Bx^* = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{BA^{-1}B^* p = -BA^{-1} b}$

En particulier si $\operatorname{rg} B = m \Rightarrow (BA^{-1}B^*)$ est inversible

$\Rightarrow$ la valeur de p est unique

Exemple 3

Soit $L > 0$ et une fonction continue $f(x)$. On considère

$$\inf_{v \in V_0} \left\{ J(v) = \frac{1}{2} \int_0^L (v'(x))^2 \, dx - \int_0^L f(x) v(x) \, dx \right\}.$$

avec

$$V_0 = \left\{ v \in C^1[0, L] \text{ tel que } v(0) = v(L) = 0 \right\}.$$

La condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour u est: trouver $u \in V_0$ tel que

$$\int_0^L u'(x) v'(x) \, dx = \int_0^L f(x) v(x) \, dx \quad \forall v \in V_0.$$

$t \in \mathbb{R}$

$$j(t) = J(u + tv) = \frac{1}{2} \int_0^L \left((u')^2 + t^2 (v')^2 + 2t u'v' \right) dx - \int_0^L f(u + tv) \, dx$$

$$= J(u) + t \underbrace{\left[\int_0^L u'v' \, dx - \int_0^L f v \, dx \right]}_{= \langle J'(u), v \rangle} + t^2 \int_0^L (v')^2 \, dx$$

Conditions d'optimalité: K non convexe

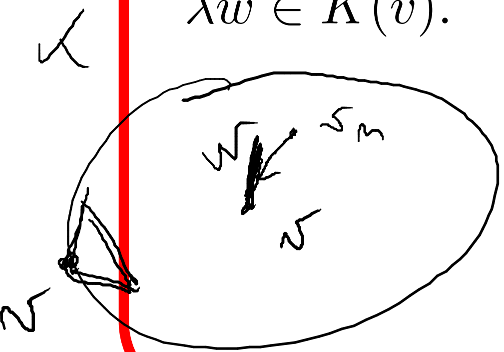
Exemples de K non convexe:

$$K = \{v \in V \text{ tel que } F(v) = 0\} \quad \text{ou} \quad K = \{v \in V \text{ tel que } F(v) \leq 0\}$$

Définition. Pour $v \in K$, on appelle cône des directions admissibles au point v

$$K(v) = \left\{ \begin{array}{l} w \in V \text{ tel que } \exists\, (v^n)_{n \geq 0} \in K\,,\ \exists\, (\varepsilon^n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}_+^* \text{ vérifiant} \\ \\ \lim_{n \to +\infty} v^n = v\,,\ \lim_{n \to +\infty} \varepsilon^n = 0\,,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{v^n - v}{\varepsilon^n} = w \end{array} \right\}$$

Remarque. $0 \in K(v)$ et $K(v)$ est un cône car si $w \in K(v)$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda w \in K(v)$.



$v_n = v + \varepsilon_n w + o(\varepsilon_n)$

si $v \in \mathrm{Int}\,(K) \Rightarrow K(v) = V$

si $v \in \mathrm{Bnd}\,(K) \Rightarrow K(v) \subsetneq V$

Inéquation d'Euler (cas général)

Proposition. Soit u un minimum local de J sur K. Si J est différentiable en u, on a

$$\langle J'(u), w\rangle \geq 0 \quad \forall\, w \in K(u)\ .$$

Remarque. Tout le problème est d'identifier $K(u)$!

Preuve. Soit $u_n \in K$ $\quad u_n \longrightarrow u \qquad \frac{u_n - u}{\varepsilon_n} \longrightarrow w \in K(u)$

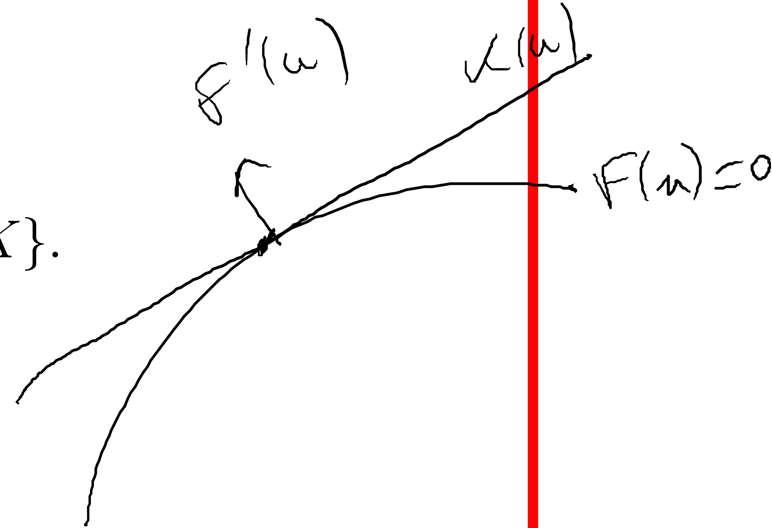
$$J(u_n) = J\left(u + \varepsilon_n w + o(\varepsilon_n)\right) = \cancel{J(u)} + \cancel{\varepsilon_n} J'(u) \cdot w + o(\cancel{\varepsilon_n})$$

$$\geq \cancel{J(u)} \qquad \qquad o(\varepsilon_n) \to 0$$

$$\boxed{J'(u) \cdot w \geq 0 \quad \forall w \in K(u)}$$

Exemples de cône $K(u)$

☞ Si u est intérieur à K, alors $K(u) = V$. Déjà dit



☞ Si K est convexe, alors $K(u) = \{w = v - u \text{ avec } v \in K\}$.

exercice à faire

☞ Soit $F : V \to \mathbb{R}$ fonction régulière. Si $K = \{v \in V \text{ tel que } F(v) = 0\}$ et si $F'(u) \neq 0$, alors $K(u) = [F'(u)]^{\perp}$ (hyperplan tangent en u à la surface K).

Soit u_n suite tq $F(u_n) = 0$ et $u_n = u + \varepsilon_n w + o(\varepsilon_n)$

$0 = F(u_n) = \underbrace{F(u)}_{=0} + \varepsilon_n F'(u) \cdot w + o(\varepsilon_n) \Longrightarrow F'(u) \cdot w = 0 \ \forall w \in K(u)$

$F'(u) \subset [K(u)]^{\perp}$