ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2013
Approximation Numérique et Optimisation (MAP411)

Examen classant du 21 janvier 2015
Durée : 3 heures
Correction

Sujet proposé par X. Blanc

Exercice I. Minimisation sous contrainte

Question 1. Si $c < 0$, alors l'ensemble des points x vérifiant les contraintes est vide car Q est définie positive. Le problème n'a donc pas de sens. Si $c = 0$, alors l'ensemble des points vérifiant les contraintes est réduit au singleton $\{0\}$. Le problème est donc trivial.

Question 2. L'ensemble des points vérifiant les contraintes est fermé et borné, donc compact, car $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie. L'application que l'on cherche à minimiser est linéaire, donc continue (car la dimension est finie). Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ vérifiant les contraintes.

Question 3. Le Lagrangien du problème s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, \mu_1, \mu_2) = a \cdot x - b + \mu_1 \left(\frac{1}{2} Qx \cdot x - c \right) + \mu_2 \left(a \cdot x \right).$$

Question 4. Les contraintes s'écrivent $F_1(x) = \frac{1}{2} Qx \cdot x - c \leq 0$ et $F_2(x) = a \cdot x \leq 0$. Les différentielles correspondantes sont donc

$$F_1'(x) = Qx, \quad F_2'(x) = a.$$

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires par hypothèse, les contraintes sont qualifiées.

Question 5. On vient de voir que, comme Qx^* et a ne sont pas colinéaires, les contraintes sont qualifiées. Donc si x^* est solution de (1), alors il existe des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que

$$a + \lambda_1 Q x^* + \lambda_2 a = 0.$$

Puisque le système (Qx^*, a) est libre, ceci implique $\lambda_1 = 0$ et $1 + \lambda_2 = 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\lambda_2 \geq 0$.

Question 6. La question précédente implique que, si (1) admet une solution x^*, alors nécessairement, Qx^* et a sont colinéaires. On restreint donc la recherche de solution à de tels x : on pose $Qx = ta$, donc $x = tQ^{-1}a$, et on note

$$J(t) = a \cdot x - b = t \left(Q^{-1} a \cdot a \right) - b, \quad F_1(t) = \frac{1}{2} Qx \cdot x - c = \frac{t^2}{2} Q^{-1} a \cdot a - c, \quad F_2(t) = a \cdot x = t \left(Q^{-1} a \cdot a \right).$$

Et on s'intéresse donc au problème de minimiser $J(t)$ sous la contrainte $F_1(t) \leq 0$ et $F_2(t) \leq 0$. Les contraintes sont donc équivalentes à

$$-\sqrt{\frac{2c}{Q^{-1} a \cdot a}} \leq t \leq 0.$$

La fonction J est une fonction affine strictement croissante, car $a \neq 0$ et Q^{-1} symétrique définie positive. Donc son minimum sur l'intervalle considéré est atteint à l'extrémité gauche de l'intervalle. Donc (1) admet comme unique minimiseur

$$x^* = -\sqrt{\frac{2c}{Q^{-1}a \cdot a}}\, a.$$

Exercice II. Équation de Laplace

Question 1. Pour tout entier j compris entre 0 et $n+1$, on écrit une formule aux différences finies centrées d'ordre 2 :

$$\frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} = f_j.$$

À noter que pour $j = 0$ et $j = n+1$, on utilise des valeurs u_{-1} et u_{n+2} qui ne sont a priori pas définies. Leur définition est l'objet de la question suivante.

Question 2. Comme $\gamma > 0$, on peut diviser par γ. Les expressions proposées permettent de déterminer u_{-1} et u_{n+2} :

$$u_{-1} = \left(1 - \frac{h}{\gamma}\right) u_0 + \frac{h}{\gamma}\alpha, \quad u_{n+2} = \left(1 - \frac{h}{\gamma}\right) u_{n+1} + \frac{h}{\gamma}\beta.$$

Ainsi, la ligne $j = 0$ du schéma devient

$$\frac{1}{h^2}\left[2u_0 - u_1 - \left(1 - \frac{h}{\gamma}\right) u_0 - \frac{h}{\gamma}\alpha\right] = f_0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma}{h^2}(u_0 - u_1) + \frac{1}{h}(u_0 - \alpha) = \gamma f_0.$$

De même, pour la ligne $j = n+1$ du schéma, on obtient

$$\frac{1}{h^2}\left[2u_{n+1} - u_n - \left(1 - \frac{h}{\gamma}\right) u_{n+1} - \frac{h}{\gamma}\beta\right] = f_{n+1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma}{h^2}(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{h}(u_{n+1} - \beta) = \gamma f_{n+1}.$$

Les différences finies centrées sont des approximations consistantes d'ordre 2 de la dérivée seconde. Donc, à part les lignes $j = 0$ et $j = n+1$, le schéma est consistant d'ordre 2. Cependant, en utilisant un développement de Taylor sur la ligne 0 du schéma, on obtient, en supposant u de classe C^3,

$$u(0) - u(h) = -u'(0)h - \frac{h^2}{2}u''(0) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi)$$

où $\xi \in [0, h]$. Ainsi, on obtient une erreur de consistance qui vaut

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\gamma}{h^2}(u(0) - u(h)) + \frac{1}{h}(u(0) - \alpha) - \gamma f(0) \\ &= -\frac{\gamma}{h}u'(0) - \frac{\gamma}{2}u''(0) - \frac{\gamma h}{6}u^{(3)}(\xi) + \frac{1}{h}(u(0) - \alpha) - \gamma f(0). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que u vérifie l'équation et les conditions de bord, on obtient une erreur de consistance égale à

$$E_0 = -\frac{\gamma}{2}f(0) + \frac{\gamma h}{6}u^{(3)}(\xi) = O(h),$$

puisque $f(0) = 0$. Le schéma est donc consistant d'ordre 1. Le terme de bord en 1 se traite exactement de la même façon.

Remarquons toutefois que, si $\gamma f(0) \neq 0$, alors E_0 ne tend pas vers 0 et le schéma n'est pas consistant d'ordre 1 en norme $\|\cdot\|_\infty$. On peut cependant démontrer que, comme l'erreur n'est présente que sur les termes de bord, le schéma est consistant en norme L^2. Son ordre est alors $1/2$.

Question 3. Pour obtenir une approximation d'ordre 2 des conditions de bord, on utilise des différences finies centrées pour approcher la dérivée dans la condition de bord. On obtient donc

$$u_0 + \gamma \frac{u_{-1} - u_1}{2h} = \alpha, \quad u_{n+1} + \gamma \frac{u_{n+2} - u_n}{2h} = \beta.$$

Ceci permet, ici encore, d'exprimer u_{-1} et u_{n+2} :

$$u_{-1} = u_1 - \frac{2h}{\gamma} u_0 + \frac{2h}{\gamma}\alpha, \quad u_{n+2} = u_n - \frac{2h}{\gamma} u_{n+1} + \frac{2h}{\gamma}\beta.$$

En insérant ces expressions dans le schéma, on a

$$\frac{1}{h^2}\left[2u_0 - 2u_1 + \frac{2h}{\gamma}u_0 - \frac{2h}{\gamma}\alpha\right] = f_0, \quad \frac{1}{h^2}\left[2u_{n+1} - 2u_n + \frac{2h}{\gamma}u_{n+1} - \frac{2h}{\gamma}\beta\right] = f_{n+1}.$$

En multipliant ces expressions par γ, on obtient bien les équations demandées. Pour étudier la consistance du schéma, on remarque à nouveau que, pour les lignes autres que $j = 0$ et $j = n+1$, le schéma est consistant d'ordre 2. Pour la ligne $j = 0$, on utilise ici encore un développement de Taylor :

$$u(h) = u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi),$$

où $\xi \in [0, h]$. En introduisant cela dans la ligne $j = 0$ du schéma, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{2\gamma}{h^2}\left[-hu'(0) - \frac{h^2}{2}u''(0) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi)\right] + \frac{2}{h}(u(0) - \alpha) - \gamma f(0) \\ = \frac{2}{h}\big(u(0) - \gamma u'(0) - \alpha\big) - \gamma\left(u''(0) + f(0)\right) - \frac{\gamma h}{3}u^{(3)}(\xi).\end{aligned}$$

Comme u est solution de (6), on obtient donc une erreur de consistance proportionnelle à $\gamma h u^{(3)}(\xi)$. Le schéma est donc consistant d'ordre 1. À noter que si $\gamma = 0$, ce terme est nul, et on peut alors montrer que le schéma est d'ordre 2.

Question 4. Si $u = (u_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ est minimale en j_0, et si $j_0 \neq 0$ et $j_0 \neq n+1$, alors $2u_{j_0} - u_{j_0+1} - u_{j_0-1} = h^2 f_{j_0} \geq 0$. Donc $2u_{j_0} \geq u_{j_0+1} + u_{j_0-1} \geq 2u_{j_0}$. Cette suite d'inégalités est donc une suite d'égalité, ce qui ne peut être le cas que si $u_{j_0} = u_{j_0+1} = u_{j_0-1}$. En répétant ce raisonnement, on obtient que u_j est indépendant de j. On est donc ramené au cas où $j_0 = 0$ ou $j_0 = n+1$. En utilisant l'équation (5), on obtient alors que $u_0 \geq 0$ (si $j_0 = 0$) ou $u_{n+1} \geq 0$ (si $j_0 = n+1$). Dans les deux cas, on en déduit que $u_j \geq 0$, pour tout j compris entre 1 et $n+1$.

Question 5.
5.a. On reproduit le raisonnement de la question précédente : si u est maximum en j_0, alors $2u_{j_0} = u_{j_0+1} + u_{j_0-1} \leq 2u_{j_0}$. Ici encore, ceci ne peut être vrai que si $u_{j_0} = u_{j_0+1} = u_{j_0-1}$. Ainsi, en répétant ce raisonnement, u atteint son maximum en $j = 0$ ou $j = n+1$.
5.b. Si le maximum est atteint en $j = 0$, la ligne correspondante du schéma donne, puisque $u_0 - u_1 \geq 0$ et $f_0 = 0$, $u_0 \leq \alpha$. Si le maximum est atteint en $j = n+1$, on obtient de la même façon $u_{n+1} \leq \beta$. Dans les deux cas, on obtient donc que $\max u \leq \max(\alpha, \beta)$.
5.c. on reprend la question précédente en changeant u en $-u$, ce qui donne $\max(-u) \leq \max(-\alpha, -\beta)$. Avec la question précédente, on en déduit $\max |u| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$.

Question 6. On pose $v_j = u_j - \frac{1}{2}Mhj(1-hj)$, et on a donc, pour j compris entre 1 et n,

$$\frac{1}{h^2}\left(2v_j - v_{j-1} - v_{j+1}\right) = f_j - M \leq 0.$$

Par ailleurs, puisque $\alpha = 0$,

$$\frac{2\gamma}{h^2}\left(v_0 - v_1\right) + \frac{2}{h}v_0 = \gamma f_0 - \gamma M\left(\frac{1}{h} - 1\right) = \gamma f_0 - \gamma M n \leq 0.$$

On a utilisé ici que $n \geq 1$. Enfin, puisque $\beta = 0$,

$$\frac{2\gamma}{h^2}\left(v_{n+1} - v_n\right) + \frac{2}{h}v_{n+1} = \gamma f_{n+1} - \gamma M\left(\frac{1}{h} - 1\right) = \gamma f_{n+1} - \gamma M n \leq 0.$$

Donc v est solution du même système que u, avec f remplacé par $f - M \leq 0$, et $g \leq 0$. Donc, d'après la question précédente, $v \leq 0$. Ainsi, on obtient que, pour tout j, $u_j \leq \frac{1}{2}Mhj(1-hj)$. Enfin, le polynôme $P(x) = x(1-x)$ est maximal en $x = 1/2$, où il vaut $P(1/2) = 1/4$. Donc $u_j \leq M/8 \leq M$.

Question 7. De la question précédente, en changeant u en $-u$, on déduit que $u \geq -M$, donc que $|u_j| \leq M$, pour tout j.

On note v la solution avec $f = 0$, et w celle avec $\alpha = \beta = 0$. Par linéarité du système, $v + w$ est solution du même système que u. Par unicité, on a donc $u = v + w$. Les questions précédentes impliquent que, pour tout j, on a

$$|v_j| \leq \max(|\alpha|, |\beta|), \quad \text{et} \quad |w_j| \leq \|f\|_\infty,$$

pour tout j. Comme $|u_j| \leq |v_j| + |w_j|$, on en déduit le résultat.

Question 8.

8.a. $e_j = u_j - u(jh)$, donc, pour $1 \leq j \leq n$, on a

$$\frac{1}{h^2}\left(2e_j - e_{j+1} - e_{j-1}\right) = f(jh) - \frac{1}{h^2}\left(2u(jh) - u((j+1)h) - u((j-1)h)\right).$$

Pour $j = 0$, on a

$$2\gamma\frac{e_0 - e_1}{h^2} + \frac{2}{h}e_0 = \gamma f(0) - 2\gamma\frac{u(0) - u(h)}{h^2} - \frac{2}{h}\left(u(0) - \alpha\right).$$

Enfin, pour $j = n+1$, on a

$$2\gamma\frac{e_{n+1} - e_n}{h^2} + \frac{2}{h}e_{n+1} = \gamma f(1) - 2\gamma\frac{u(1) - u(1-h)}{h^2} - \frac{2}{h}\left(u(1) - \beta\right).$$

8.b. Chacun des seconds membres correspond aux erreurs de consistance des différentes lignes du schéma. Comme ce dernier est consistant d'ordre 1, le vecteur e est donc solution du même système que u, avec $\alpha = \beta = 0$, et f tel que $\|f\|_\infty \leq Ch$, pour une constante C indépendante de h. Donc, les question précédentes impliquent que $\|e\|_\infty \leq Ch$. Le schéma est donc convergent à l'ordre 1.

Exercice III. Décomposition de domaine

Question 1. Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de la formulation variationnelle. Alors, $u = u_1 - u_2$ est solution du problème variationnel avec $f = 0$ et $g = 0$. Donc, pour tout $v \in V_0$, on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = 0.$$

Par ailleurs, on sait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc $u \in V_0$, et on peut donc l'utiliser comme fonction test dans la formulation variationnelle. D'où

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0.$$

Cette fonction positive et continue ne peut être d'intégrale nulle que si elle est nulle. Donc $\nabla u = 0$. Comme par ailleurs $u = 0$ sur $\partial\Omega$, ceci implique $u = 0$.

Question 2.
2.a. Pour chaque indice $k \in \mathbb{N}$, les fonctions $\widetilde{u}_1^k$ et $\widetilde{u}_2^k$ sont affine. En utilisant les conditions de bord, on calcule facilement :

$$\widetilde{u}_1^1(x) = 2x, \quad \widetilde{u}_2^1(x) = 2x - 1.$$

D'où

$$\widetilde{u}_1^2(x) = 0, \quad \widetilde{u}_2^2(x) = 1.$$

2.b. Ainsi, $\widetilde{u}_1^2 = \widetilde{u}_1^0$ et $\widetilde{u}_2^2 = \widetilde{u}_2^0$, et donc les suites sont périodiques, et ne convergent pas.

Question 3. Par soustraction, on a évidemment $-\Delta\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) = 0$ dans Ω_1, et $u_1^{k+1} - u_1^{k-1} = 0$ sur Γ_1. Par ailleurs, les conditions de bord sur Γ_{12} pour u_1^{k+1} d'une part, et pour u_2^k d'autre part, s'écrivent

$$\frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n_{12}} + \lambda u_1^{k+1} = -\frac{\partial u_2^k}{\partial n_{21}} + \lambda u_2^k, \qquad \frac{\partial u_2^k}{\partial n_{21}} + \lambda u_2^k = -\frac{\partial u_1^{k-1}}{\partial n_{12}} + \lambda u_1^{k-1}.$$

En soustrayant ces deux inégalités, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial n_{12}}\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) = \lambda\left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right).$$

De même, on a $-\Delta\left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right) = 0$ dans Ω_2, $u_2^{k+1} - u_2^{k-1} = 0$ sur Γ_2. Sur Γ_{12}, on a

$$\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n_{21}} + \lambda u_2^{k+1} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial n_{12}} + \lambda u_1^k, \qquad \frac{\partial u_1^k}{\partial n_{12}} + \lambda u_1^k = -\frac{\partial u_2^{k-1}}{\partial n_{21}} + \lambda u_2^{k-1}.$$

On soustrait ces deux égalités, et on a

$$\frac{\partial}{\partial n_{21}}\left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right) = \lambda\left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right).$$

Question 4. Pour écrire les problèmes variationnels associés, on considère une fonction test $v \in C^1(\overline{\Omega})$ telle que $v = 0$ sur Γ_1, on multiplie l'équation dont $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$ est solution par v, on intègre sur Ω_1 et on utilise la formule de Green :

$$\int_{\Omega_1} \nabla\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial}{\partial n_{12}}\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) v = 0.$$

La condition de bord permet d'écrire

$$\forall v \in V_1^0, \quad \int_{\Omega_1} \nabla\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) v.$$

Ici,

$$V_1^0 = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}_1), \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\right\},$$

et la fonction inconnue $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$ est à chercher parmi les $u \in C^1(\overline{\Omega}_1)$ telles que $u = 0$ sur Γ_1.

En procédant de la même façon sur Ω_2, on a

$$\forall v \in V_2^0, \quad \int_{\Omega_2} \nabla \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) v.$$

Avec

$$V_2^0 = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}_2), \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right\},$$

et la fonction inconnue $u_2^{k+1} - u_2^{k-1}$ est à chercher parmi les $u \in C^1(\overline{\Omega}_2)$ telles que $u = 0$ sur Γ_2.

Question 5. En utilisant $v = u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$ dans la première, et on a donc

$$\int_{\Omega_1} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right).$$

Ensuite, on écrit le second membre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) &= \left(u_1^{k+1} - u_2^k \right) \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \\ &\quad + \left(u_2^k - u_1^{k-1} \right) \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \\ = - \left(u_1^{k+1} - u_2^k \right)^2 + \left(u_1^{k+1} - u_2^k \right) \left(u_2^k - u_1^{k-1} \right) &+ \left(u_2^k - u_1^{k-1} \right)^2 + \left(u_2^k - u_1^{k-1} \right) \left(u_2^k - u_1^{k+1} \right) \\ &= - \left(u_1^{k+1} - u_2^k \right)^2 + \left(u_2^k - u_1^{k-1} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega_1} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^k - u_1^{k+1} \right)^2 = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k-1} - u_2^k \right)^2.$$

Le calcul est exactement le même pour $u_2^{k+1} - u_2^{k-1}$:

$$\int_{\Omega_2} \left| \nabla \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \right|^2 = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right).$$

On écrit le second membre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) &= \left(u_2^{k+1} - u_1^k \right) \left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \\ &\quad + \left(u_1^k - u_2^{k-1} \right) \left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \\ = - \left(u_2^{k+1} - u_1^k \right)^2 + \left(u_2^{k+1} - u_1^k \right) \left(u_1^k - u_2^{k-1} \right) &+ \left(u_1^k - u_2^{k-1} \right)^2 + \left(u_1^k - u_2^{k-1} \right) \left(u_1^k - u_2^{k+1} \right) \\ &= - \left(u_2^{k+1} - u_1^k \right)^2 + \left(u_1^k - u_2^{k-1} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega_2} \left| \nabla \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \right|^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^k - u_2^{k+1} \right)^2 = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k-1} - u_1^k \right)^2.$$

Question 6. On somme les égalités obtenues à la question précédente, et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 + \int_{\Omega_2} \left| \nabla \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \right|^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^k - u_1^{k+1} \right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^k - u_2^{k+1} \right)^2 \\ = \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k-1} - u_2^k \right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k-1} - u_1^k \right)^2. \end{aligned}$$

En sommant cette suite d'égalités de $k = 1$ à $k = K$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\int_{\Omega_1} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 + \int_{\Omega_2} \left| \nabla \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \right|^2 \right) + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^K - u_1^{K+1} \right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^K - u_2^{K+1} \right)^2$$
$$= \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^0 - u_2^1 \right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^0 - u_1^1 \right)^2 .$$

La série est à termes positifs, et $\lambda > 0$, donc ceci implique

$$\int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^K - u_1^{K+1} \right)^2 + \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^K - u_2^{K+1} \right)^2 \leq \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^0 - u_2^1 \right)^2 + \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^0 - u_1^1 \right)^2 .$$

Donc les deux suites $\int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^K - u_1^{K+1} \right)^2$ et $\int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^K - u_2^{K+1} \right)^2$ sont bornées.

Question 7. De même, comme ces suites sont à termes positifs, la série

$$\sum_k \left(\int_{\Omega_1} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 + \int_{\Omega_2} \left| \nabla \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1} \right) \right|^2 \right)$$

est convergente.

Question 8. Si on utilise u_1^{k+1} dans la formulation variationnelle vérifiée par $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$, on a

$$\int_{\Omega_1} \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \cdot \nabla u_1^{k+1} = \lambda \int_{\Omega_1} u_1^{k+1} \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) .$$

On remarque tout d'abord que

$$\nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \cdot \nabla u_1^{k+1} = \left| \nabla u_1^{k+1} \right|^2 - \nabla u_1^{k-1} \cdot \nabla u_1^{k+1}$$
$$= \left| \nabla u_1^{k+1} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \nabla u_1^{k+1} \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \nabla u_1^{k-1} \right|^2$$
$$= \frac{1}{2} \left| \nabla u_1^{k+1} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \nabla u_1^{k-1} \right|^2 .$$

Ensuite, pour le second membre, on a

$$\frac{1}{2} \left(u_1^{k+1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(u_1^{k-1} \right)^2 + \left(u_1^{k+1} - u_2^k \right)^2 - \left(u_2^k \right)^2 - \frac{1}{2} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right)^2 = \left(u_1^{k+1} \right)^2 - 2u_2^k u_1^{k+1} - u_1^{k+1} u_1^{k-1}$$
$$= -u_1^{k+1} \left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) .$$

Ce qui, inséré dans l'équation intégrale ci-dessus, donne

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left| \nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left| \nabla u_1^{k+1} \right|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k-1} \right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_2^k \right)^2$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left| \nabla u_1^{k-1} \right|^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^k \right)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1} \right)^2 .$$

Question 9. L'égalité ci-dessus est aussi vraie en échangeant les indices 1 et 2. Donc, en les sommant, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^{k+1}\right|^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1}\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k-1}\right)^2 + 2\lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_2^k\right)^2 \\
+ \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^{k+1}\right|^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k+1}\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k-1}\right)^2 + 2\lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k+1} - u_1^k\right)^2 \\
\leq \int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^{k-1}\right|^2 + 2\lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^k\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)^2 \\
+ \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^{k-1}\right|^2 + 2\lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^k\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right)^2.
\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités de $k = 1$ à $k = K$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^{K+1}\right|^2 + \int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^K\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^{K+1}\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^K\right|^2 + \\
\lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^0\right)^2 + \left(u_2^0\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{K+1}\right)^2 + \left(u_2^{K+1}\right)^2 \\
+ 2\lambda \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_2^k\right)^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k+1} - u_1^k\right)^2 \\
\leq \int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^0\right|^2 + \int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^1\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^0\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^1\right|^2 \\
+ \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^1\right)^2 + \left(u_2^1\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^K\right)^2 + \left(u_2^K\right)^2 \\
+ \lambda \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)^2 + \lambda \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right)^2. \quad \text{(A)}
\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de trace donnée par l'énoncé pour majorer les derniers termes de l'inégalité. On a donc

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega_1} \left|\nabla \left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)\right|^2.$$

Ce majorant est une somme partielle d'une série convergente, d'après les questions précédentes. Il s'agit donc d'une suite bornée. Il en est de même pour le dernier terme. On a donc

$$\int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^{K+1}\right|^2 + \int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^K\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^{K+1}\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^K\right|^2 \leq C + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_1^K\right)^2 + \lambda \int_{\Gamma_{12}} \left(u_2^K\right)^2,$$

où C ne dépend pas de K. On utilise à nouveau l'inégalité de trace, et on obtient

$$\int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^{K+1}\right|^2 + (1 - \lambda C_1) \int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^K\right|^2 + (1 - \lambda C_2) \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^{K+1}\right|^2 + \int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^K\right|^2 \leq C.$$

Si on prend $\lambda \leq \min\left(C_1^{-1}, C_2^{-1}\right)$, alors on obtient bien que les suites $\int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^k\right|^2$ et $\int_{\Omega_2} \left|\nabla u_2^k\right|^2$ sont bornées.

Question 10. On revient à l'inégalité (A), et on utilise maintenant le résultat de la question précédente, ce qui donne

$$2\sum_{k=1}^{K}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}-u_2^k\right)^2+2\sum_{k=1}^{K}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^{k+1}-u_1^k\right)^2\leq C+\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^K\right)^2+\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^K\right)^2$$
$$+\sum_{k=1}^{K}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}-u_1^{k-1}\right)^2+\lambda\sum_{k=1}^{K}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^{k+1}-u_2^{k-1}\right)^2,$$

où C est une constante qui ne dépend pas de K. On utilise à nouveau l'inégalité de trace de la question 9, qui implique que les suites $\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^K\right)^2$ et $\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^K\right)^2$ sont bornées. On obtient ainsi le résultat demandé.

Question 11. On suppose maintenant que u_1^k et u_2^k convergent uniformément, et on note u_1 et u_2 leurs limites respectives. On suppose de plus que ∇u_1^k converge uniformément vers ∇u_1, et que ∇u_2^k converge uniformément vers ∇u_2. D'autre part, d'après les questions précédentes, on sait que la série

$$\sum_k\int_{\Omega_1}\left|\nabla\left(u_1^{k+1}-u_1^{k-1}\right)\right|^2$$

est convergente. Donc, d'après l'inégalité de trace utilisée à la question 9, il en va de même pour la série

$$\sum_k\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}-u_1^{k-1}\right)^2$$

Il en va de même pour la série où l'indice 2 remplace l'indice 1. En appliquant ceci à la question précédente, on en déduit que les séries de termes généraux

$$\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}-u_2^k\right)^2\quad\text{et}\quad\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^{k+1}-u_1^k\right)^2$$

sont convergentes. En particulier, les suites correspondants tendent vers 0. Donc, en passant à la limite, on obtient que $u_1=u_2$ sur Γ_{12}. Autrement dit, la fonction u définie par

$$u(x)=\begin{cases}u_1(x) & \text{si } x\in\Omega_1,\\ u_2(x) & \text{si } x\in\Omega_2,\end{cases}$$

est continue sur Ω. D'autre part, la convergence uniforme des gradients permet de passer à la limite dans la condition de bord de (9). On a donc

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_{12}}+\frac{\partial u_2}{\partial n_{21}}=0,$$

sur Γ_{12}.

D'autre part, si $v\in C^1(\overline{\Omega})$ est nulle sur $\partial\Omega$, alors, en passant à la limite dans la formulation variationnelle dont u_1^k est solution, on a

$$\int_{\Omega_1}\nabla u_1\cdot\nabla v-\int_{\Gamma_{12}}v\frac{\partial u_1}{\partial n_{12}}=\int_{\Omega_1}fv.$$

De même,

$$\int_{\Omega_2}\nabla u_2\cdot\nabla v-\int_{\Gamma_{12}}v\frac{\partial u_2}{\partial n_{21}}=\int_{\Omega_2}fv.$$

En sommant ces deux égalités, on obtient bien que

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v=\int_{\Omega}fv.$$