Ecole Polytechnique, Promotion 2017
Approximation numérique et optimisation (MAP 411)
Premier devoir obligatoire à rendre au plus tard le lundi 24 septembre 2018

On considére l'équation d'advection dans l'intervalle $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t,x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

avec une vitesse constante et strictement positive $a > 0$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec un entier $N \geq 1$), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. On considère le schéma aux différences finies, décentré à 3 points

$$u_i^{n+1} = \alpha u_{i-2}^n + \beta u_{i-1}^n + \gamma u_i^n$$

où α, β, γ sont trois constantes réelles, avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$. On pose

$$c = a\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que les pas d'espace Δx et de temps Δt tendent vers zéro en gardant leur rapport c constant.

1. Donner les conditions sur α, β, γ pour que ce schéma soit consistant (conditionnellement à c constant).
2. Peut-on retrouver le schéma décentré amont et, si oui, pour quelles valeurs de α, β, γ ?
3. Donner les valeurs de α, β, γ en fonction de c pour que le schéma soit au moins d'ordre 2 en temps et espace. Désormais on se restreint à ses valeurs des paramètres conduisant à un schéma d'ordre 2.
4. Montrer que le schéma vérifie le principe du maximum discret pour seulement deux valeurs de c que l'on explicitera. Dans ces deux cas le schéma est dit d'ordre infini ou exact : expliquez pourquoi.
5. Montrer que le schéma d'ordre 2 est stable L^2 sous la condition CFL $0 \leq c \leq 2$. Quel avantage de ce schéma en déduisez-vous par rapport aux schémas usuels étudiés en cours ? Que peut-on dire de sa convergence ?
6. Donner l'équation équivalente correspondante à ce schéma d'ordre 2. De quel effet numérique du schéma est-elle le signal ?