Ecole Polytechnique **Promotion 2016**

MAP 411 - Approximation numérique et optimisation
Examen classant. Durée : 3 heures

Sujet proposé par Jean-Frédéric Gerbeau

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Exercice 1 (5 points)

Soit a un réel strictement positif, et u_0 une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, régulière et périodique de période 1. On considère l'équation d'advection

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0, \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) & = & u_0(x), \text{ pour } x \in (0,1), \end{array}\right. \tag{1}$$

avec des conditions aux limites de périodicité $u(x+1,t) = u(x,t)$ pour tout $x \in [0,1]$, $t \geq 0$. Soit un entier $N > 0$ et un réel $\Delta t > 0$. On discrétise le domaine $[0,1] \times \mathbb{R}_+$ en introduisant la grille régulière $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$, pour $j = 0, 1, \ldots, N+1$, $n \geq 0$, avec $\Delta x = 1/(N+1)$. On considère le schéma numérique :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{4u_j^n - 3u_{j-1}^n - u_{j+1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{2}$$

Question 1. Montrer que le schéma est consistant et d'ordre au moins 1.

Question 2. Étudier la stabilité et la convergence dans L^∞.
Indication : on cherchera sous quelle condition le schéma vérifie un principe du maximum discret.

Question 3. Étudier la stabilité et la convergence dans L^2.

Question 4. Montrer que le schéma n'est pas d'ordre 2.

Exercice 2 (6 points)

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie 1

Soient J et h des fonctions réelles convexes et continues sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\kappa \in \mathbb{R}$ et $K = \{v \in \mathbb{R}^n, h(v) \leq \kappa\}$. On suppose K non vide, J et h dérivables sur K. On s'intéresse au lien entre les problèmes :

$$\inf_{v \in K} J(v), \tag{3}$$

et

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^n} (J(v) + \alpha h(v)), \tag{4}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. On supposera que les contraintes dans (3) sont qualifiées en tout $v \in K$.

Question 1. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème (3), et les inégalités satisfaites par un point selle (u, λ) de $\mathcal{L}$.

Question 2. Supposons qu'il existe u solution de (3). Trouver un α tel que u est solution de (4).

Question 3. Supposons qu'il existe u solution de (4), avec $\alpha > 0$. Trouver un κ tel que u est solution de (3).

Partie 2

Soit J une fonction convexe et dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. Pour $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$, où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue, et $f(v) = J(v) + \alpha\|v\|_1$, avec $\alpha > 0$. On s'intéresse au problème :

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^n} f(v). \tag{5}$$

Question 4. On aimerait utiliser une méthode de gradient pour résoudre (5). Quelle difficulté cela pose-t-il ?

Question 5. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on définit $g(x, y) = J(x - y) + \alpha \mathbb{1} \cdot (x + y)$, où $\mathbb{1}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes valent 1 et $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien. On définit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, x_i \geq 0, y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$, où x_i et y_i désignent respectivement les composantes de x et de y. On considère le problème

$$\inf_{(x,y) \in K} g(x, y). \tag{6}$$

Ecrire le lagrangien associé à (6). Vérifier qu'on peut appliquer le théorème de Kuhn et Tucker, et écrire les conditions d'optimalité.

Question 6. Soient $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Si (z, t) est solution de (6), montrer que $z_i t_i = 0$, pour $i = 1, \ldots, n$.

Question 7. Si $(z, t) \in \mathbb{R}^{2n}$ est solution de (6), montrer que $u = z - t$ est solution de (5).

Question 8. Proposer un algorithme pour résoudre (6) et commenter.

Exercice 3 (9 points)

On se propose d'étudier la résolution de l'équation d'advection-diffusion stationnaire en une dimension d'espace. On se donne $L > 0$, f une fonction réelle régulière sur $[0, L]$, $w \in \mathbb{R}^*$, et $\eta > 0$. On cherche une fonction $u : [0, L] \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -\eta u''(x) + w u'(x) = f, \text{ pour } x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

On se donne V un espace de fonctions, assez régulières pour justifier les calculs ci-dessous, et s'annulant en 0 et L. En particulier, si $v \in V$ alors $v \in L^2(0, L)$ et $v' \in L^2(0, L)$. Pour $u, v \in V$, on note

$$a(u, v) = \int_0^L \big(\eta u'(x) v'(x) + w u'(x) v(x)\big)\, dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^L f(x) v(x)\, dx.$$

On considère le problème variationnel : trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v), \forall v \in V. \tag{8}$$

On admettra que le problème (8) a une unique solution, qu'on supposera aussi régulière que souhaité.

On subdivise l'intervalle $[0,L]$ en $N+1$ intervalles $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,N$. On note $h_{K_i} = x_{i+1} - x_i$ la taille de l'intervalle K_i. On note h la valeur maximale des h_{K_i}, $i = 0,\dots,N$ et $\mathcal{T}_h$ l'ensemble des intervalles K_i, $i = 0,\dots,N$.

On considère une approximation interne de V par un sous-espace V_h de dimension finie. Les éléments de V_h sont des fonctions continues sur $[0,L]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque intervalle K_i, et s'annulant en 0 et L.

Pour $v \in V$, on note :

$$\|v\|_{L^2} = \left(\int_0^L (v(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \text{ et pour tout } K \in \mathcal{T}_h, \|v\|_{L^2(K)} = \left(\int_K (v(x))^2\,dx\right)^{1/2}.$$

On dispose d'un opérateur d'interpolation r_h aux points x_i qui possède les propriétés suivantes : il existe $C_0 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tels que si $u \in V$ alors $r_h u \in V_h$ et $\forall K \in \mathcal{T}_h$,

$$\|u - r_h u\|_{L^2(K)} \leq C_0 h_K^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_{L^2(K)},$$

$$\|(u - r_h u)'\|_{L^2(K)} \leq C_0 h_K^{k} \|u^{(k+1)}\|_{L^2(K)},$$

$$\|(u - r_h u)''\|_{L^2(K)} \leq C_0 h_K^{k-1} \|u^{(k+1)}\|_{L^2(K)},$$

pour tout $h > 0$, où $u^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de u.

Partie 1 - Méthode de Galerkin

Question 1. Soit u solution du problème aux limites (7). En admettant que $u \in V$, montrer formellement que u vérifie (8).

Dans toute la suite, on admettra que u est solution du problème aux limites (7) si et seulement si $u \in V$ et vérifie (8).

Question 2. Soit $u_h \in V_h$ solution du problème :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{9}$$

On note l'erreur d'interpolation $\pi_h = u - r_h u$, l'erreur d'approximation $e_h = r_h u - u_h$, et l'erreur globale $\epsilon_h = u - u_h$. Montrer que :

$$a(\epsilon_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h.$$

En déduire

$$a(e_h, e_h) = -a(\pi_h, e_h).$$

Question 3. Montrer que, pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(v_h, v_h) = \eta \int_0^L (v_h'(x))^2\,dx.$$

Question 4. Montrer que

$$|a(\pi_h, e_h)| \leq \frac{\eta}{2}\int_0^L (e_h'(x))^2\,dx + \eta\int_0^L (\pi_h'(x))^2\,dx + \frac{w^2}{\eta}\int_0^L (\pi_h(x))^2\,dx.$$

Indication : on rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour u et $v \in L^2(0, L)$,

$$\int_0^L u(x)v(x)\,dx \leq \left(\int_0^L (u(x))^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^L (v(x))^2\,dx\right)^{1/2},$$

et l'inégalité de Young : pour $X, Y \in \mathbb{R}$, et $\alpha > 0$, $XY \leq \frac{\alpha}{2}X^2 + \frac{1}{2\alpha}Y^2$.

Question 5. En déduire que

$$\|e_h'\|_{L^2} \leq C_1\sqrt{1 + \frac{w^2h^2}{\eta^2}}\|u^{(k+1)}\|_{L^2}h^k, \tag{10}$$

où $C_1 > 0$ est une constante qui ne dépend pas de h, η, w ou u.

Question 6. Commenter (10) en la comparant à l'erreur d'interpolation $\|\pi_h'\|_{L^2}$.

Partie 2 - Méthode de Galerkin généralisée

On suppose dans cette partie que

$$|w|h_K/\eta > 1, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{11}$$

On introduit un nouveau problème : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h), \forall v_h \in V_h, \tag{12}$$

avec

$$a_h(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \tau_K \int_K w v_h'(x)(-\eta u_h''(x) + w u_h'(x))\,dx,$$

et

$$L_h(v_h) = L(v_h) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \tau_K \int_K w v_h'(x) f(x)\,dx,$$

avec

$$\tau_K = \frac{\lambda h_K}{|w|}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{13}$$

où $\lambda > 0$ est une constante qu'on fixera plus tard. Pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $x \in K$, on pose $\tau(x) = \tau_K$.

On admet qu'il existe une constante $d_0 > 0$ telle que pour tout $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\int_K (v_h''(x))^2\,dx \leq \frac{d_0}{h_K^2}\int_K (v_h'(x))^2\,dx, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{14}$$

On définit e_h, π_h et ϵ_h comme dans la première partie (avec maintenant u_h solution de (12)).

Question 7. Montrer qu'on a à nouveau :

$$a_h(\epsilon_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h, \quad \text{et} \quad a_h(e_h, e_h) = -a_h(\pi_h, e_h).$$

Question 8. Vérifier que

$$\tau_K \leq \lambda \frac{h_K^2}{\eta}, \tag{15}$$

et montrer que pour tout $v_h \in V_h$,

$$a_h(v_h, v_h) \geq \eta \left(1 - \frac{\lambda d_0}{2}\right) \int_0^L (v_h'(x))^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau(x) w^2 (v_h'(x))^2 \, dx.$$

Question 9. On introduit la norme :

$$\|v_h\|_h = \left(\eta \int_0^L (v_h'(x))^2 \, dx + \int_0^L \tau(x) w^2 (v_h'(x))^2 \, dx\right)^{1/2}, \forall v_h \in V_h.$$

Donner une condition sur λ pour avoir la coercivité de $a_h(\cdot, \cdot)$ sur $(V_h, \|\cdot\|_h)$, avec une constante de coercivité $1/2$. On supposera dans la suite que λ vérifie cette condition.

Question 10. Montrer que

$$\begin{aligned} \|e_h\|_h^2 \leq & 2\left|\eta \int_0^L \pi_h'(x) e_h'(x) \, dx\right| + 2\left|\int_0^L w \pi_h(x) e_h'(x) \, dx\right| \\ & + 2\left|\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \tau_K \eta w \pi_h''(x) e_h'(x) \, dx\right| + 2\left|\int_0^L \tau(x) w^2 \pi_h'(x) e_h'(x) \, dx\right|. \end{aligned} \tag{16}$$

Question 11. En déduire que

$$\|e_h\|_h^2 \leq c_1 \eta \int_0^L (\pi_h'(x))^2 \, dx + c_2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (w \pi_h'(x))^2 \, dx + c_3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_K} \int_K (\pi_h(x))^2 \, dx,$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes qui ne dépendent pas de h, η, w ou u (mais qui peuvent dépendre de λ et d_0).

Question 12. On suppose qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\gamma h \leq h_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{17}$$

Déduire de la question précédente que :

$$\|e_h'\|_{L^2} \leq C_2 \sqrt{1 + \frac{|w| h}{\eta}} \|u^{(k+1)}\|_{L^2} h^k,$$

où $C_2 > 0$ est une constante qui ne dépend pas de h, η, w ou u. Commenter.