ÉCOLE POLYTECHNIQUE **Promotion 2005**

CONTRÔLE CLASSANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Analyse numérique et optimisation MAP431
Lundi 2 Juillet 2007

Durée : 4 heures
Sujet proposé par Bruno Després et François Jouve

Avertissement : *Les deux problèmes sont indépendants et doivent être rédigés sur des copies de couleur différente. À l'intérieur de chacun des problèmes, les sections (et parfois les questions) peuvent être abordées de manière indépendante.*

Problème I : Étude d'une équation d'advection-diffusion (13 points) (*copies blanches*)

I.1 Présentation générale

L'espace est $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2$ ou 3 en pratique). En dimension $N = 3$ on a $x = (x_1, x_2, x_3)$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. La frontière régulière de Ω est $\Gamma = \partial\Omega$. La normale sortante sera notée $\mathbf{n}$. Soit $\nu > 0$ un paramètre dit de viscosité. Soit $\alpha \geq 0$ un paramètre dit d'amortissement. Soit $V(x) \in \mathbb{R}^N$ un champ de vitesse continuement dérivable dans Ω jusqu'au bord : $V \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N$. Donc le champ de vitesse est correctement défini même pour $x \in \Gamma$. On portera la plus grande attention aux hypothèses additionnelles faites sur le champ de vitesse V, car ces hypothèses varieront d'une section à l'autre.

Ce problème est dédié à l'étude de l'équation d'advection-diffusion avec amortissement

$$-\nu\Delta u + V.\nabla u + \alpha u = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

et condition de Dirichlet

$$u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

On munit l'espace $H_0^1(\Omega)$ de la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx}$. On supposera que $f \in L^2(\Omega)$. On notera $X = \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions deux fois continuement dérivables et qui s'annulent au bord.

I.2 Existence et unicité : div$(V) = 0$

On suppose dans cette section que le champ V est à divergence nulle. On a alors l'identité pour les fonctions u régulières

$$\operatorname{div}(Vu) = \operatorname{div}(V)u + V.\nabla u = V.\nabla u. \tag{3}$$

Soit la forme bilinéaire pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \nu \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (V.(v\nabla u - u\nabla v)dx)\, dx + \alpha \int_\Omega uv dx. \tag{4}$$

Soit la forme linéaire pour $v \in L^2(\Omega)$: $b(v) = \int_\Omega f v dx$.

1) Montrer que les solutions $u \in X$ du problème (1) avec la condition au bord (2) sont des solutions de la formulation variationnelle

$$a(u, v) = b(v), \qquad u \in X, \quad \forall v \in X. \tag{5}$$

2) Montrer que la forme bilinéaire a est coercive dans $H_0^1(\Omega)$.

3) La forme bilinéaire a est-elle symétrique ?

4) Montrer que la forme bilinéaire a est continue dans $H_0^1(\Omega)$. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{6}$$

5) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de la formulation variationnelle (6). Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $V \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N$, tout $\nu > 0$ et tout $\alpha \geq 0$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{7}$$

Indication : ne pas oublier d'utiliser l'inégalité de Poincaré.

I.3 Existence et unicité : cas général

A présent la divergence de V peut être non nulle. On pose

$$c(u, v) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \mathrm{div}(V) uv dx.$$

6) Montrer que les solutions $u \in X$ du problème (1) avec la condition au bord (2) sont des solutions de la formulation variationnelle

$$a(u, v) + c(u, v) = b(v), \qquad u \in X, \quad \forall v \in X. \tag{8}$$

7) Montrer qu'il existe une et une seule solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$a(u, v) + c(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{9}$$

dès que la condition suivante est remplie :

$$\frac{1}{2} \mathrm{div}(V)(x) \leq \frac{\nu}{K} + \alpha - \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$$

pour un $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. Ici $K > 0$ est la constante qui apparaît dans l'inégalité de Poincaré : $\int_\Omega u^2 dx \leq K \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

I.4 Existence et unicité : $V = \nabla \varphi$

Un autre cas particulier mérite l'attention. On suppose dans cette section que le champ de vitesse est le gradient d'un potentiel scalaire donné $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$: c'est-à-dire que $V = (V_i)_{1 \leq i \leq N}$ avec $V_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

8) Soit la fonction $\lambda(x) = \frac{\varphi(x)}{2\nu}$. On pose $w(x) = e^{-\lambda(x)} u(x)$ avec $u \in X$ solution forte de (1). Montrer que $w \in X$ est solution forte de

$$-\nu \Delta w + \left(\frac{1}{4\nu} |V|^2 - \frac{1}{2} \mathrm{div}(V) + \alpha \right) w = g, \quad g = e^{-\lambda} f. \tag{10}$$

9) Quelle est la formulation variationnelle associée à (10) ?

10) Montrer la relation, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(V) w^2 dx = \int_\Omega (wV).\nabla w dx. \tag{11}$$

11) On suppose $\alpha > 0$. Montrer que la forme bilinéaire est coercive dans $H_0^1(\Omega)$. En déduire l'existence et l'unicité de la solution variationnelle de (10) avec condition de Dirichlet.
Indication : on commencera par montrer grâce à la relation (11) que

$$d(w,w) = \int_\Omega \nu \left|\nabla w + \frac{Vw}{2\nu}\right|^2 dx + \int_\Omega \alpha w^2 dx$$

où $d(w,v)$ est la forme bilinéaire associée à l'équation (10) avec condition de Dirichlet.

I.5 Discrétisation par éléments finis 1D : V constant

Pour simplifier les notations on considère le cas monodimensionnel $\Omega =]0,1[$ et on fait l'hypothèse que le vecteur vitesse V est constant ($V' = 0$) donc en particulier à divergence nulle. On prendra des éléments finis P^1 qui sont les fonctions affines par morceaux. Soit $h = \frac{1}{n}$ le pas d'espace. L'espace d'éléments finis considéré est

$$V_{0h} = \{v \in \mathcal{C}([0,1]);\ v|_{[jh,(j+1)h]} \in P^1 \text{ pour } 0 \le j \le n = \frac{1}{h},\ v(0) = v(1) = 0\}. \tag{12}$$

Le problème discret que nous étudions est

$$a(u_h, v_h) = b(v_h), \qquad u_h \in V_{0h}, \quad \forall v_h \in V_{0h}. \tag{13}$$

12) Construire la matrice $M = (m_{ij})$ du système linéaire à inverser pour le calcul de u_h. En calculer tous les coefficients m_{ij}. Montrer, sans calcul, que la matrice est inversible en utilisant un argument théorique.

13) On suppose que $u \in H^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h, ν et u telle que

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{Ch}{\nu}\|u''\|_{L^2(\Omega)}. \tag{14}$$

14) Montrer que si $f \ge 0$ et $\alpha > 0$ alors $u_h \ge 0$ sous une condition sur le paramètre de viscosité $\nu \ge \nu_0(V,\alpha)$ à déterminer. C'est un principe du maximum discret.
Indication : on montrera que pour ν assez grand, alors la matrice est à diagonale strictement dominante et ses éléments extra-diagonaux sont tous négatifs ou nuls

$$m_{ii} > -\sum_{j\neq i} m_{ij}, \qquad m_{ij} \le 0 \ \ i \neq j.$$

On en tirera les conclusions qui s'imposent.

I.6 Continuité en fonction des paramètres

On revient en dimension N quelconque ($N = 1, 2$ ou 3). Pour simplifier on fait l'hypothèse que le vecteur vitesse $V \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N$ est à divergence nulle

$$\operatorname{div}(V) = 0.$$

On considère la formulation variationnelle (5). Pour des paramètres (ν, V, α) donnés, la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ est notée $u = u_{\nu,V,\alpha}$

$$a\left(u_{\nu,V,\alpha}, v\right) = b(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous étudions la continuité de l'application $(\nu, V, \alpha) \mapsto u_{\nu,V,\alpha}$. Nous verrons au cours de l'étude qu'il y a continuité par rapport aux deux derniers paramètres (V, α).

Un cas intéressant, plus dur et que nous n'étudierons pas, concerne le premier paramètre ν qui fait apparaître une condition de compatibilité pour $\nu \to 0^+$ (voir corrigé).

15) On se donne une viscosité $\nu > 0$ fixe. Montrer que l'application

$$(V, \alpha) \mapsto u_{V,\alpha} = u_{\nu,V,\alpha} \tag{15}$$

est continue de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^+$ dans $H_0^1(\Omega)$.
Indication : on pourra partir de u_{V_0,α_0} et $u_{V,\alpha}$, définir $e = u_{V,\alpha} - u_{V_0,\alpha_0}$ et étudier la formulation variationnelle dont e est solution.

Problème II : Courbes brachistochrones (7 points) (*copies vertes*)

II.1 Présentation générale

On se propose d'étudier le problème des courbes brachistochrones (du grec *brachisto* : "le plus court" et *chronos* "temps"). Il s'agit des courbes reliant deux points donnés qui sont telles que le temps de parcours d'un point matériel glissant sans frottement sur la courbe sous l'effet de la pesanteur soit minimal. Ce problème a été initialement formulé par Galilée, et Johan Bernouilli au XVIIe siècle. De dernier en fit un défi lancé aux mathématiciens de l'époque qui fut résolu indépendamment par son frère Jakob, ainsi que par Leibniz, Guillaume de l'Hôpital et Newton. Il servit par la suite à Lagrange et Euler, qui en formalisèrent la méthode de résolution, à jeter les bases d'une branche importante des mathématiques appelée *calcul des variations*. Elle est encore très vivante de nos jours, et constitue une partie du cours d'analyse numérique et d'optimisation que vous avez suivi.

On considère deux points O et A du plan et on choisit (O, e_1, e_2) un repère orthonormé dans ce plan.

Le vecteur e_2 est choisi de telle sorte que la force de gravité soit orientée par convention suivant e_2 vers les y positifs. Le poids d'une particule de masse m est donc mge_2 avec $g > 0$. Les coordonnées du point A sont (a, b) avec $a > 0$ et $b \geq 0$. On considère des courbes d'équation $y = u(x)$ vérifiant $u(0) = 0$ et $u(a) = b$. On supposera u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, a[$ et continue sur $[0, a]$. Le problème consiste à trouver u telle qu'une particule qui part de O avec une vitesse initiale nulle et qui glisse sans frottement sur la courbe, atteigne A en temps minimal. On supposera dans toute la suite que pour tout $x \in]0, a[$, $u(x) > 0$, ce qui peut se justifier aisément, par des arguments physiques par exemple.

On note v la vitesse de la particule. L'énergie potentielle associée à la gravité vaut $-mgy$ et l'énergie cinétique de la particule $\frac{1}{2}m|v|^2$. En l'absence de frottement on a conservation de l'énergie totale, d'où

$$\frac{1}{2}m|v|^2 - mgy = \text{constante}.$$

À l'instant initial la particule se trouve en A avec une vitesse nulle. On a donc $v = 0$ et $y = 0$, ce qui entraîne que la constante est nulle dans l'expression ci-dessus et permet d'écrire $v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gu(x)}$. D'autre part la variation élémentaire de l'abscisse curviligne le long de la courbe au point $(x, u(x))$ vaut $ds = \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$. En intégrant le temps $dt = ds/v$ le long de la courbe on obtient le temps de parcours de la particule pour atteindre le point A :

$$T = J(u) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}}dx = \int_0^a F(u(x), u'(x))dx, \tag{16}$$

avec

$$F(u, p) = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gu}} \tag{17}$$

Il s'agit donc de trouver une fonction $u : [0, a] \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $u(0) = 0, u(a) = b$ et $u(x) > 0 \, \forall x \in]0, a[$ qui réalise le minimum de $J(u)$ donné par (16).

II.2 Conditions d'optimalité et résolution explicite

On note

$$\mathcal{V}_{a,b} = \left\{ u \in \mathcal{C}^1(]0, a[) \cap \mathcal{C}^0([0, a]) \text{ t.q. } u(0) = 0, \, u(a) = b, \, u(x) > 0 \, \forall x \in]0, a[\right\}.$$

On suppose dans cette partie que le minimum de $J(u)$ sur $\mathcal{V}_{a,b}$ existe et est atteint en $\bar{u} \in \mathcal{V}_{a,b}$:

$$J(\bar{u}) = \min_{u \in \mathcal{V}_{a,b}} J(u)$$

1) Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $0 < x_1 < x_2 < a$ et une fonction $w \in \mathcal{C}^1([x_1, x_2])$ telle que $w(x_1) = w(x_2) = w'(x_1) = w'(x_2) = 0$. Soit ε un réel assez petit en valeur absolue pour que $(\bar{u} + \varepsilon w)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. Montrer que

$$\int_{x_1}^{x_2} F(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))dx \leq \int_{x_1}^{x_2} F(\bar{u}(x) + \varepsilon w(x), \bar{u}'(x) + \varepsilon w'(x))dx.$$

2) Montrer que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(w(x)\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) + w'(x)\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) \right) dx = 0.$$

3) Si on suppose de plus que $\bar{u} \in \mathcal{C}^2(]0, a[)$, montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) \right) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

et en déduire

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) \right) = 0 \quad \forall x \in]0, a[.$$

4) Montrer que la fonction

$$x \mapsto F(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x)\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$$

est constante et se servir de ce résultat pour montrer que $\bar{u}$ vérifie la relation suivante :

$$\lambda\sqrt{1 + \bar{u}'^2}\sqrt{2g\bar{u}} = 1 \tag{18}$$

où λ est une constante réelle strictement positive.
On remarquera que cette équation interdit à $\bar{u}$ d'admettre une dérivée finie en $x = 0$.

5) Vérifier que l'arc de cycloïde d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(\theta) &= R(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = u(x) &= R(1 - \cos(\theta)), \end{cases}$$

où R est une constante que l'on déterminera, est solution de (18).
Donner une équation permettant de calculer la constante λ en fonction des données du problème en utilisant les conditions aux limites associées à l'équation différentielle (18).

II.3 Existence et unicité de la solution

Curieusement pour un problème aussi ancien, il a fallu attendre la seconde moitié du XXe siècle pour obtenir un résultat d'existence, et prouver ainsi que la solution explicite établie ci-dessus (qui est celle trouvée au XVIIe siècle) est bien la solution optimale.

Nous proposons maintenant d'étudier une preuve directe d'existence du minimum et d'unicité du minimiseur.

6) Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\forall \alpha > 0$, $\gamma > 0$ et $(\beta, \delta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq -\frac{\gamma}{\alpha}(\gamma - \alpha)^2 + \gamma\alpha + \delta\beta$$

et que l'on a l'égalité si et seulement si $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$.
Montrer que l'on peut écrire l'inégalité ci-dessus sous la forme

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\gamma^2 - \gamma^3\alpha^{-1} + \delta\beta - \delta^2}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \tag{19}$$

7) Effectuer le changement de variable $\varphi = \sqrt{u}$ pour obtenir

$$J(u) = I(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\varphi^{-2}(x) + 4\varphi'^2(x)}\, dx.$$

Montrer que la condition d'optimalité pour une fonction $\Phi \in \mathcal{V}_{a,\sqrt{b}}$ s'écrit

$$4\Phi'^2\Phi^2 = C\Phi^{-2} - 1, \tag{20}$$

où C désigne une constante strictement positive.

8) Dans cette question on veut montrer que Φ vérifiant la condition d'optimalité (20) est le minimum global de I, i.e.

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}_{a,\sqrt{b}}\ ,\ \varphi \neq \Phi \ \Rightarrow I(\Phi) < I(\varphi),$$

a) On pose $l_\varphi(x) = \sqrt{\varphi^{-2}(x) + 4\varphi'^2(x)}$.
Montrer que $\forall x \in]0, a[$, $l_\varphi(x) \geq l_\Phi(x) + \rho(x)$ avec

$$\rho = \frac{\Phi^{-2} - \varphi\Phi^{-3} + 4\Phi'\varphi' - 4\Phi'^2}{l_\Phi}.$$

En utilisant la condition d'optimalité (20), montrer que

$$\int_0^a \rho(x)dx = 0$$

Indication : on commencera par montrer que $l_\Phi = \sqrt{C}/\Phi^2$ et $(4\Phi^2\Phi')' = -1/\Phi$.
En déduire que $I(\Phi) \leq I(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{a,\sqrt{b}}$.

b) Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}_{a,\sqrt{b}}\ , \quad I(\Phi) = I(\varphi) \Rightarrow \Phi = \varphi$$

et conclure.