ÉCOLE POLYTECHNIQUE **Promotion 2005**

PROPOSITION DE CORRECTION DU CONTRÔLE CLASSANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Analyse numérique et optimisation MAP431
Lundi 2 Juillet 2007

Correction rédigée par Bruno Després et François Jouve

Problème I : Étude d'une équation d'advection-diffusion

I.2 Existence et unicité de la solution : div$(V) = 0$

1) Soit $v \in X$ une fonction test qui s'annule au bord. On multiplie les termes de l'équation (1) par v et on intègre par parties si nécessaire. On a d'abord

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \int_{\partial\Omega = \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v d\sigma = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$$

car v s'annule sur Γ. Puis on sépare le terme $V.\nabla u$ en deux parties

$$\int_\Omega (V.\nabla u) v dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (V.\nabla u) v dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u.(Vv) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (V.\nabla u) v dx - \frac{1}{2}\int_\Omega u \mathrm{div}(Vv) dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega=\Gamma} (V.\mathbf{n}) u v d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega V.(v\nabla u - u \nabla v) dx$$

car v s'annule au bord et $\mathrm{div}(Vv) = V.\nabla v$. Pour les termes suivants on n'a pas besoin d'intégrer par parties. On obtient alors

$$\nu \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(V.(v\nabla u - u\nabla v) dx + \alpha \int_\Omega u v dx \right) dx = \int_\Omega f v dx$$

pour toutes les fonctions $v \in X$.

2) On suit la démarche du cours et on change d'espace fonctionnel. Soient u et v deux fonctions de $H_0^1(\Omega)$. Alors

$$a(u,u) = \left(\nu \int_\Omega \nabla u.\nabla u dx + \alpha \int_\Omega u u dx \right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\int_\Omega \left(V.(u\nabla u - u\nabla u) dx\right) dx \right).$$

La première parenthèse est coercive

$$\nu \int_\Omega \nabla u.\nabla u dx + \alpha \int_\Omega u v dx \geq \nu \int_\Omega \nabla u.\nabla u dx = \nu |u|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

qui est le carré une semi-norme équivalente à la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Le deuxième terme entre parenthèse s'annule. D'où le résultat demandé.

3) La symétrie correspondrait à $a(u,v) = a(v,u)$ pour toutes fonctions u et v. Le seul terme qui pose problème est celui en V. Si il était symétrique on aurait alors

$$\frac{1}{2}\int_\Omega V.(v\nabla u - u\nabla v)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega V.(u\nabla v - v\nabla u)dx$$

c'est à dire

$$\int_\Omega V.(v\nabla u - u\nabla v)dx = 0, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ on peut faire l'intégration par parties

$$\int_\Omega V.(u\nabla v)dx = -\int_\Omega V.(v\nabla u)dx + \int_\Gamma (V.n)uvd\sigma = -\int_\Omega V.(v\nabla u)dx.$$

On en déduirait alors

$$2\int_\Omega V.(v\nabla u)dx = 0, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Par densité cela est vrai pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Donc on aurait

$$V.\nabla u = 0 \text{ presque partout dans } \Omega \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Prenons u plus régulier : $u \in C_0^1(\Omega)$. Alors on peut trouver des u tels que $\nabla u = d$ est un vecteur quelconque en un point $x_0 \in \Omega$ donné. Par exemple $u(x) = d.x \times \xi(x)$ où $x \mapsto \xi(x)$ est une fonction de troncature et $d.x$ est le produit scalaire du vecteur position x par un vecteur d quelconque. Du coup $V(x_0).d = 0$ pour tout vecteur d. Donc

$$V(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \Longleftrightarrow V = 0.$$

Il s'ensuit que la forme bilinéaire a est symétrique si et seulement si $V = 0$.

4) La forme bilinéaire est composée de termes qui sont chacun des produits deux à deux de u, v, ∇u et ∇v. Le vecteur V est borné car continu sur un fermé borné $\overline{\Omega}$. Donc a est bien continue dans $H_0^1(\Omega)$ par rapport à u et v.

En appliquant le théorème de Lax-Milgram 3.3.1 il existe une unique solution variationnelle.

5) C'est une combinaison d'inégalités. On part de $a(u,u) = b(u)$. On a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$b(u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On sait que

$$\nu|u|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(u,u).$$

Or la semi-norme $H_0^1(\Omega)$ contrôle la norme $H_0^1(\Omega)$ qui elle-même contrôle la norme $L^2(\Omega)$. Donc il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$c_1\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq |u|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc

$$c_1\nu\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Après simplification par $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ on obtient le résultat demandé en posant $C = \frac{1}{c_1}$.

I.3 Existence et unicité de la solution : cas général

6) On a $\mathrm{div}(Vu) = \mathrm{div}(V)u + V.\nabla u$. Le terme $\mathrm{div}(V)u$ ne s'annule plus *a priori*. En reprenant les intégrations par parties de la section précédente, on obtient

$$\int_\Omega (V.\nabla u)vdx = \frac{1}{2}\int_\Omega V.(v\nabla u - u\nabla v)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(V)uvdx.$$

Le nouveau terme est : $c(u,v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(V)uvdx$. Le reste est évident.

7) Le point important concerne la coercivité de la forme bilinéaire $a + c$. On a

$$a(u, u) + c(u, u) = \nu \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \left(\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{div}(V) \right) u^2 dx.$$

On a $\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{div}(V) \geq -\frac{\nu}{K} + \varepsilon$. Donc

$$a(u, u) + c(u, u) \geq \nu \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \left(-\frac{\nu}{K} + \varepsilon \right) u^2 dx.$$

Pour $-\frac{\nu}{K} + \varepsilon > 0$ la coercivité est évidente. L'autre cas concerne $-\frac{\nu}{K} + \varepsilon \leq 0$. Grâce à l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$a(u, u) + c(u, u) \geq \left(\nu + \left(-\frac{\nu}{K} + \varepsilon \right) K \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = K\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

La semi-norme $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ étant une norme sur $H_0^1(\Omega)$ cela établit la coercivité et partant de là l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle grâce au théorème de Lax-Milgram 3.3.1.

I.4 Existence et unicité de la solution : $V = \mathbf{grad}(\varphi)$

8) On a $u = e^\lambda w$. Donc

$$\nabla u = e^\lambda \nabla w + e^\lambda w \nabla \lambda = e^\lambda \nabla w + e^\lambda w \frac{V}{2\nu}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta u &= e^\lambda \Delta w + 2e^\lambda \nabla w.\nabla\lambda + e^\lambda w |\nabla \lambda|^2 + e^\lambda w \Delta\lambda \\ &= e^\lambda \Delta w + e^\lambda \frac{\nabla w.V}{\nu} + e^\lambda w \frac{|V|^2}{4\nu^2} + e^\lambda w \frac{\mathrm{div}(V)}{2\nu}.\end{aligned}$$

Reportons dans l'équation $-\nu\Delta u + V.\nabla u + \alpha u = f$. On trouve

$$\begin{aligned}-\nu &\left(e^\lambda \Delta w + e^\lambda \frac{\nabla w.V}{\nu} + e^\lambda w \frac{|V|^2}{4\nu^2} + e^\lambda w \frac{\mathrm{div}(V)}{2\nu} \right) \\ &+V.\left(e^\lambda \nabla w + e^\lambda w \frac{V}{2\nu} \right) + \alpha e^\lambda w \\ &= -\nu e^\lambda \Delta w + \left(\alpha + \frac{|V|^2}{4\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{div}(V) \right) e^\lambda w = f.\end{aligned}$$

D'où l'équation $-\nu\Delta w + \left(\alpha + \frac{|V|^2}{4\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{div}(V) \right) w = e^{-\lambda} f = g$. La condition de Dirichlet est inchangée $w = 0$ sur Γ.

9) La formulation faible est

$$\nu \int_\Omega \nabla w.\nabla v dx + \int_\Omega \left(\alpha + \frac{|V|^2}{4\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{div}(V) \right) wv dx = \int_\Omega gv dx$$

pour $w \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

10) On a par intégration par parties

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \mathrm{div}(V) w^2 dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega V.\nabla w^2 dx = -\int_\Omega wV.\nabla w dx.$$

11) L'étude de la coercivité revient à minorer :

$$\begin{aligned} d(w,w) &= \nu \int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega \left(\alpha + \frac{|V|^2}{4\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{div}(V)\right) w^2 dx \\ &= \int_\Omega \nu |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega \left(\alpha + \frac{|V|^2}{4\nu}\right) w^2 dx + \int_\Omega wV.\nabla w dx \\ &= \int_\Omega \nu |\nabla w + \frac{Vw}{2\nu}|^2 dx + \int_\Omega \alpha w^2 dx \end{aligned}$$

qui est maintenant la somme de deux carrés, donc bien adaptée pour l'étude de coercivité. Dans le texte on indique que $\nu > 0$ et surtout que $\alpha > 0$. Montrons l'inégalité ($C > 0$)

$$\nu \left| a + \frac{Vb}{2\nu} \right|^2 + \alpha b^2 \geq C(|a|^2 + b^2), \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Plusieurs méthodes sont possibles. On peut partir de

$$\nu \left| a + \frac{Vb}{2\nu} \right|^2 + \alpha b^2 = \nu |a|^2 + \left(\frac{|V|^2}{4\nu} + \alpha \right) b^2 + a.(Vb).$$

On s'occupe du double produit

$$|a.(Vb)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |V|^2 b^2, \qquad \forall (a,b).$$

Ici $\varepsilon > 0$ est un degré de liberté dans l'inégalité. Donc

$$\nu |a|^2 + \left(\frac{|V|^2}{4\nu} + \alpha \right) b^2 + a.(Vb) \geq \left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right) |a|^2 + \left(\frac{|V|^2}{4\nu} + \alpha - \frac{|V|^2}{2\varepsilon} \right) b^2$$

Écrivons les conditions pour que les deux coefficients devant $|a|^2$ et b^2 soient strictement positifs

$$\nu - \frac{\varepsilon}{2} > 0 \iff \varepsilon < 2\nu$$

et

$$\frac{|V|^2}{4\nu} + \alpha - \frac{|V|^2}{2\varepsilon} > 0 \iff \varepsilon > \frac{\frac{|V|^2}{2}}{\frac{|V|^2}{4\nu} + \alpha} = 2\nu \times \frac{\frac{|V|^2}{4\nu}}{\frac{|V|^2}{4\nu} + \alpha}.$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{\frac{|V(x)|^2}{4\nu}}{\frac{|V(x)|^2}{4\nu} + \alpha}$ est continue de $\overline{\Omega}$ (fermé borné) dans $\mathbb{R}$. Elle atteint son maximum qui est nécessairement strictement plus petit que 1. On peut donc trouver un ε tel que les deux conditions soient remplies. Pour ce ε on a $\nu - \frac{\varepsilon}{2} \geq C_1 > 0$ et

$$\frac{|V(x)|^2}{4\nu} + \alpha - \frac{|V(x)|^2}{2\varepsilon} \geq C_2 > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Prenons $C_3 = \min(C_1, C_2)$ on trouve

$$\nu \left| a + \frac{V(x)b}{2\nu} \right|^2 + \alpha b^2 \geq C_3(|a|^2 + b^2), \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

D'où en reportant dans les intégrales

$$\int_\Omega \nu |\nabla w + \frac{Vw}{2\nu}|^2 dx + \int_\Omega \alpha w^2 dx \geq C_3 \int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + w^2 \right) dx$$

ce qui montre la coercivité. La continuité étant évidente, on en déduit grâce au théorème de Lax-Milgram 3.3.1 l'existence et l'unicité de la solution variationnelle avec condition de Dirichlet.

I.5 Discrétisation par éléments finis

12) On notera $\varphi_j(x)$ la fonction de base qui vaut 1 en jh et 0 en ph, $p \neq j$

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi_j(x) = 0 & x \leq (j-1)h, \\ \varphi_j(x) = \frac{x-(j-1)h}{h} & (j-1)h \leq x \leq jh, \\ \varphi_j(x) = \frac{(j+1)h-x}{h} & jh \leq x \leq (j+1)h, \\ \varphi_j(x) = 0 & (j+1)h \leq x. \end{array}\right.$$

La solution discrète est $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} u_j \varphi_j(x)$ que l'on détermine par

$$a(u_h, \varphi_i) = b(\varphi_i) = \sum_{j=1}^{n-1} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j.$$

On obtient le système linéaire $MX = c$ avec : $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ et $m_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$; $X = (u_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ et $c = ((b, \varphi_i))_{1 \leq i \leq n-1}$.
On commence par remarquer que

$$m_{ij} = 0 \text{ pour } j < i-1 \text{ et } i+1 < j.$$

Ensuite on a

$$m_{ii} = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\nu \varphi_i'(x)^2 + \frac{V}{2}(\varphi_i(x)\varphi_i'(x) - \varphi_i(x)\varphi_i'(x)) + \alpha \varphi_i(x)^2 \right) dx$$

$$+ \int_{h}^{(i+1)h} \left(\nu \varphi_i'(x)^2 + \frac{V}{2}(\varphi_i(x)\varphi_i'(x) - \varphi_i(x)\varphi_i'(x)) + \alpha \varphi_i(x)^2 \right) dx,$$

soit

$$m_{ii} = \left(\frac{\nu}{h} + 0 + \frac{\alpha h}{3} \right) + \left(\frac{\nu}{h} + 0 + \frac{\alpha h}{3} \right) = \frac{2\nu}{h} + \frac{2\alpha h}{3}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} m_{i,i-1} &= a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) \\ &= \int_{(i-1)h}^{ih} \Big[\nu \varphi_{i-1}'(x)\varphi_i'(x) + \frac{V}{2}(\varphi_i(x)\varphi_{i-1}'(x) - \varphi_{i-1}(x)\varphi_i'(x)) \\ &\qquad + \alpha \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x) \Big] dx \\ &= -\frac{\nu}{h} + \frac{V}{2} \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{x-(i-1)h}{h} . \frac{-1}{h} - \frac{ih-x}{h} . \frac{1}{h} \right) dx \\ &\qquad + \alpha \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{ih-x}{h} . \frac{x-(i-1)h}{h} dx, \end{aligned}$$

soit tous calculs faits

$$m_{i,i-1} = -\frac{\nu}{h} - \frac{V}{2} + \frac{\alpha h}{6}.$$

Pour $m_{i,i+1}$ les calculs sont identiques. En faisant attention au signe du terme en V, on trouve

$$m_{i,i+1} = -\frac{\nu}{h} + \frac{V}{2} + \frac{\alpha h}{6}.$$

On trouve donc la matrice tridiagonale

$$M = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta & \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \beta & \gamma & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \frac{2\nu}{h} + \frac{2\alpha h}{3}$, $\gamma = -\frac{\nu}{h} + \frac{V}{2} + \frac{\alpha h}{6}$ et $\delta = -\frac{\nu}{h} - \frac{V}{2} + \frac{\alpha h}{6}$.
Cette matrice correspond à une formulation variationnelle bien posée exprimée dans un espace discret. Par application du lemme 6.1.1 la matrice est inversible.

13) On sait grâce au lemme de Céa 6.1.2 que

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_1}{K} \|u' - r_h(u')\|_{L^2(\Omega)}$$

où K est la constante de coercivité de la forme bilinéaire a et $\|u' - r_h(u')\|_{L^2(\Omega)}$ est l'erreur d'interpolation de la solution exacte. Pour $u \in H^2(\Omega)$ alors $\|u' - r_h(u')\|_{L^2(\Omega)} \le Ch$. D'autre part $K^{-1} = \frac{C_2}{\nu}$. D'où le résultat demandé en prenant $C = C_1 C_2$.

14) Suivons l'indication du texte. La conditions $m_{ii} > 0$ est évidente. D'autre part pour ν assez grand, alors

$$\gamma, \delta \le 0$$

ce qui revient à la condition

$$|V| \le \frac{2\nu}{h} - \frac{\alpha h}{3} \Longleftrightarrow \nu \ge \nu(V, h) = \frac{|V| h}{2} + \frac{\alpha h^2}{6}.$$

Alors pour $i \ne 1$ et $i \ne n - 1$, on a

$$-\sum_{j \ne i} m_{ij} = -\gamma - \delta = \frac{2\nu}{h} - \frac{\alpha}{3} < \beta.$$

Pour $i = 1$ on a $-\sum_{j \ne i} m_{ij} = -\gamma \le \beta$ et pour $i = n - 1$ on a $-\sum_{j \ne i} m_{ij} = -\delta \le \beta$. Dans ces conditions le système linéaire s'écrit

$$\sum_j m_{ij} u_j = c_i.$$

Par construction $c_i = b(\varphi_i) \ge 0$ pour tout i, car $f \ge 0$ et la fonction φ_i est aussi positive ou nulle. Soit l'indice i particulier tel que u_i réalise le minimum de tous les u_j. Alors

$$\left(\sum_j m_{ij} \right) u_i = c_i - \sum_{j \ne i} m_{ij} (u_j - u_i).$$

Comme $m_{ij} \le 0$ et que $u_j - u_i \ge 0$ pour $i \ne j$, alors $u_i \ge 0$. Le résultat est démontré.

I.6 Continuité en fonction des paramètres

15) On notera que le résultat exprime un résultat de continuité par rapport à la forme bilinéaire. Cela généralise donc le théorème de Lax-Milgram 3.3.1.

Suivons l'indication du texte. On note de plus la forme bilinéaire avec des indices $a = a_{\nu,V,\alpha}$ pour mieux faire apparaître les paramètres du problème. En effectuant la différence de la formulation variationnelle $a_{\nu,V,\alpha}(u_{V,\alpha}, v) = b(v)$ et de la formulation variationnelle $a_{\nu,V_0,\alpha_0}(u_{\nu,V_0,\alpha_0}, v) = b(v)$ on obtient

$$a_{\nu,V_0,\alpha_0}(e, v) = \left(a_{\nu,V_0,\alpha_0} - a_{\nu,V,\alpha} \right) (u_{\nu,V,\alpha}, v).$$

Prenons la fonction test $v = e$. Alors

$$a_{\nu,V_0,\alpha_0}(e, e) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left([V_0 - V] . (e \nabla u_{V,\alpha} - u_{V,\alpha} \nabla e) dx \right) dx$$

$$+ [\alpha_0 - \alpha] \int_\Omega u_{V,\alpha} e dx.$$

Pour un couple (V, α) proche de (V_0, α_0) la fonction $u_{V,\alpha}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On a alors

$$a_{\nu,V_0,\alpha_0}(e, e) \le C \left(\max_x |V(x) - V_0(x)| + |\alpha - \alpha_0| \right) \|e\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_{V,\alpha}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\leq \widetilde{C}\left(\max_x |V(x)-V_0(x)| + |\alpha-\alpha_0|\right) \|e\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

La coercivité de a fait que

$$a_{\nu,V_0,\alpha_0}(e,e) \geq \widehat{C}\nu\|e\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

En simplifiant on obtient

$$\|e\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\widetilde{C}}{\widehat{C}\nu}\left(\max_x |V(x)-V_0(x)| + |\alpha-\alpha_0|\right).$$

Cette inégalité exprime la continuité demandée.

16, non traité dans le sujet) *A présent on se place pour simplifier en dimension un d'espace $\Omega =]0,1[$, et on fixe V et $\alpha = 0$. On considère l'application*

$$\nu \mapsto u_\nu = u_{\nu,V,0}. \tag{1}$$

On suppose que u_ν admet une limite dans $H_0^1(\Omega)$ pour ν tendant vers 0

$$\|u_\nu - u\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0, \quad \nu \to 0.$$

Montrer que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Cette égalité est une condition de compatibilité nécessaire pour avoir la continuité requise.

Ici V est fixe et $\nu \to 0^+$. On part de

$$a_{\nu,V,0}(u_\nu, v) = b(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

c'est à dire

$$\nu \int_\Omega \nabla u_\nu . \nabla v dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (V.(v\nabla u_\nu - u_\nu \nabla v)dx)\, dx = \int_\Omega f v dx.$$

Comme $\|u_\nu - u\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ et que $\nu \to 0^+$, alors en passant à la limite on trouve

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (V.(v\nabla u - u\nabla v)dx)\, dx = \int_\Omega f v dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Or cela implique

$$\int_\Omega (V.(v\nabla u)dx)\, dx = \int_\Omega f v dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

puis

$$V\nabla u = V u'(x) = f(x) \text{ presque partout.}$$

En intégrant de 0 à 1, on trouve

$$V\int_0^1 u'(x)dx = V(u(1)-u(0)) = 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Problème II : Courbes brachistochrones (7 points)

II.2 Conditions d'optimalité et résolution explicite

1) Si $(\bar{u} + \varepsilon w)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_1, x_2]$,

$$F(\bar{u}(x) + \varepsilon w(x), \bar{u}'(x) + \varepsilon w'(x)) = \frac{\sqrt{1 + (\bar{u}'(x) + \varepsilon w'(x))^2}}{\sqrt{2g(\bar{u}(x) + \varepsilon w(x))}}$$

a un sens et est intégrable sur l'intervalle sur $[x_1, x_2]$. Si l'inégalité n'était pas vérifiée, il suffirait de prendre une fonction $\tilde{u}$ qui vaut $\bar{u} + \varepsilon w$ sur $[x_1, x_2]$ et $\bar{u}$ sur $[0, x_1] \cup [x_2, a]$ pour obtenir une fonction de $\mathcal{V}_{a,b}$ qui vérifie $J(\tilde{u}) < J(\bar{u})$.

2) Il suffit de faire tendre ε vers 0 par valeurs négatives et positives pour obtenir le résultat demandé.

3) Si u est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut intégrer par parties le terme $w'(x)\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$. Comme w est nulle en x_1 et x_2, on obtient

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x)\left(\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right)\right) dx = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}_0^1([x_1, x_2]),$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

La seconde relation s'obtient en faisant tendre x_1 vers 0 et x_2 vers a.

4) Soit $g(x) = F(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x)\frac{\partial F}{\partial p}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$. Alors

$$\begin{aligned} g'(x) &= \bar{u}'(x)\frac{\partial F}{\partial u} + \bar{u}"(x)\frac{\partial F}{\partial p} - \bar{u}"(x)\frac{\partial F}{\partial p} - (\bar{u}'(x))^2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial p} - \bar{u}'(x)\bar{u}"(x)\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \\ &= \bar{u}'(x)\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

D'où $g(x) = \mathit{constante}$. En développant les calculs pour l'expression particulière de F on trouve :

$$\frac{\sqrt{1+\bar{u}'^2}}{\sqrt{2g\bar{u}}} - \bar{u}'\frac{\bar{u}'}{\sqrt{2g\bar{u}}\sqrt{1+\bar{u}'^2}} = \lambda$$

et le résultat demandé.

5) On a $\bar{u}$ solution de

$$2\lambda^2 g\bar{u}(x)\big(1 + \bar{u}'^2(x)\big) = 1$$

avec $\bar{u}(0) = 0$ et $\bar{u}(a) = b$.

La paramétrisation proposée donne

$$\frac{dx}{d\theta} = R(1-\cos(\theta)), \quad \frac{dy}{d\theta} = R\sin(\theta) \quad \text{et } \bar{u}'(x) = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}.$$

En réinjectant ces expressions dans l'équation différentielle, on obtient que la courbe donnée dans l'énoncé est bien solution si on a la condition : $R = 1/(4g\lambda^2)$.

$\theta = 0$ donne bien la condition aux limites en 0. Il reste à vérifier la condition en $x = a$. Il faut donc trouver $\bar{\theta}$ tel que $a = R(\bar{\theta} - \sin(\bar{\theta}))$ et $b = R(1 - \cos(\bar{\theta}))$.

L'étude de la fonction

$$\theta \mapsto h(\theta) = \frac{\theta - \sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}$$

sur $]0, 2\pi[$ montre qu'elle est strictement croissante, qu'elle tend vers 0 lorsque $\theta \to 0^+$ et vers $+\infty$ quant $\theta \to 2\pi$. Donc pour a et b strictement positifs, on trouve une unique valeur $\bar{\theta}$, solution de $h(\bar{\theta}) = a/b$, qui satisfait la condition en $x = a$. On obtient ensuite en remplaçant :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{\theta} - \sin(\bar{\theta})}{4a}}.$$

Finalement, on peut calculer le temps de parcours de la particule en fonction de $\bar{\theta}$ (ce qui n'était pas demandé dans l'énoncé) :

$$T = J(\bar{u}) = \bar{\theta}\sqrt{\frac{a}{g(\bar{\theta} - \sin(\bar{\theta}))}}.$$

II.3 Existence et unicité de la solution

6) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \geq \gamma\alpha + \delta\beta$$

d'où le résultat immédiat. On a égalité si et seulement si $(\gamma-\alpha)=0$ et (α,β) colinéaire à (γ,δ), ce qui implique $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$.

Une manipulation algébrique élémentaire permet de trouver la seconde inégalité.

7) Il suffit de faire le changement de variable demandé pour obtenir immédiatement l'expression de $I(\phi)$. La condition d'optimalité (20) est aussi directement obtenue à partir de la condition d'optimalité (18) de la question 4, avec $C = 1/(2g\lambda^2)$.

8) $l_\varphi(x) \geq l_\Phi(x) + \rho(x)$ est une conséquence directe de l'inégalité montrée à la question 6.

En intégrant on obtient $I(\varphi) \geq I(\Phi) + \int_0^a \rho(x)dx$. Il faut donc montrer que $\int_0^a \rho(x)dx = 0$.

On tire de la condition d'optimalité (20) la relation $l_\Phi = \sqrt{C}/\Phi^2$.

D'autre part on en tire aussi $(4\Phi^2\Phi')' = -1/\Phi$, donc finalement on peut écrire

$$\sqrt{C}\rho = -(4\Phi^2\Phi')'(\Phi-\varphi) + (4\Phi^2\Phi')(\varphi'-\Phi') = \big((4\Phi^2\Phi')(\varphi-\Phi)\big)',$$

d'où

$$\int_0^a \rho(x)dx = \frac{1}{\sqrt{C}}\big[(4\Phi^2\Phi')(\varphi-\Phi)\big]_0^a = 0$$

grâce aux conditions aux limites.

Montrons l'unicité. $I(\Phi) = I(\varphi) \Rightarrow \int_0^a (l_\varphi - l_\Phi - \rho) = 0$. La quantité sous l'intégrale est continue et positive d'après la question 6. Elle est donc nulle sur $[0,a]$.