École Polytechnique. Promotion 2012.
Analyse Numérique et Optimisation, MAP 431
Corrigé du contrôle classant du 1^er^ Juillet 2014

1 Formulations Variationnelles

Question 1. Soit $v \in V$. On note $w = \mathcal{P}(v)$. D'après l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\Omega)$, il existe une constante C (qui ne dépend pas de w) telle que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \;\le\; C \,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

Par ailleurs

$$\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \;=\; \int_\Omega w^2 + \int_\Omega |\nabla w|^2 \ge \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} w^2 + \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla w|^2 \;=\; \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} v^2 + \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla v|^2$$

car w et v s'identifient sur $\Omega \setminus \overline{\omega}$.

On a donc

$$\|v\|_{H^1(\Omega\setminus\overline{\omega})} \;=\; \left(\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} v^2 + \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla v|^2\right)^{1/2} \;\le\; \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \;\le\; C\,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \;\le\; CM\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})}\,.$$

Question 2. Pour toute fonction test v définie sur $\Omega\setminus\overline{\omega}$, nulle sur Γ, on multiplie l'équation par v et on intègre par parties, pour obtenir

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla u\cdot\nabla v \;=\; \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f,$$

qui est de la forme

$$a(u,v) \;=\; L(v) \quad \forall v\in V.$$

On a

$$|L(v)| \;=\; \left|\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} fv\right| \;\le\; \left(\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} v^2\right)^{1/2} \;\le\; \left(\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f^2\right)^{1/2}\|v\|_V.$$

La forme bilinéaire est continue, et coercive sur $V\times V$ (en effet, d'après la question précédente :

$$a(v,v) \;=\; \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla v|^2 \ge \alpha\|v\|_V^2,$$

avec $\alpha = 1/C$, où C est la constante de l'inégalité de Poincaré de la question 1). On a donc existence et unicité d'une solution $w \in V$ au problème.

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, la restriction de v à $\Omega \setminus \overline{\omega}$ est dans V, cette restriction peut donc être prise comme fonction-test dans la formulation prédédente, et on a

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla w \cdot \nabla v \ = \ \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f v.$$

Question 3. a) le problème (2) s'écrit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ = \ \int_\omega \nabla u_k \cdot \nabla v + \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

qui est de la forme

$$a(u,v) \ = \ L(v) \qquad v \in V.$$

Le second membre est la somme d'un terme standard (correspondant au forçage f), et du terme

$$\int_\omega \nabla u_k \cdot \nabla v.$$

On a

$$\left| \int_\omega \nabla u_k \cdot \nabla v \right| \ \le \ \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})} \ \le \ \|u_k\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Il s'agit donc bien d'une forme linéaire continue sur V (dont la norme dépend de celle de u_k). La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue, bilinéaire, et coercive d'après l'inégalité de Poincaré standard sur $H_0^1(\Omega)$.

Le problème admet donc une solution unique, ce qui assure que chaque étape de construction de la suite est bien définie.

b) On suppose que (u_k) converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction w. Pour toute fonction test $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$, on passe simplement à la limite dans la formulation variationnelle définissant la suite, pour obtenir

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \tilde{v} \ = \ \int_\omega \nabla w \cdot \nabla \tilde{v} + \int_\Omega f \tilde{v}$$

d'où

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla w \cdot \nabla \tilde{v} \ = \ \int_\Omega f \tilde{v}.$$

Pour conclure que w est bien (sur $\Omega \setminus \overline{\omega}$) la solution de la question 2, il reste à vérifier que l'on peut bien prendre toutes les fonctions-test de V. Or, pour tout $v \in V$, on a $\tilde{v} = \mathcal{P}v \in H_0^1(\Omega)$, qui peut donc être utilisée comme fonction-test. On a donc d'après ce qui précède,

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla w \cdot \nabla v \ = \ \int_\Omega f v \quad \forall v,$$

et la restriction de w à $\Omega \setminus \overline{\omega}$ est bien solution du problème initial.

Question 4. On a, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega fv \;=\; \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla w\cdot\nabla v \;=\; \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v - \int_\omega \nabla w\cdot\nabla v,$$

d'où

$$\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v \;=\; \int_\omega \nabla w\cdot\nabla v + \int_\Omega fv,$$

D'autre part, par définition de la suite (u_k), on a pour $k \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla u_{k+1}\cdot\nabla v \;=\; \int_\omega \nabla u_k\cdot\nabla v + \int_\Omega fv.$$

Il suffit de faire la différence de ces deux identités, pour obtenir

$$\int_\Omega \nabla e_{k+1}\cdot\nabla v \;=\; \int_\omega \nabla e_k\cdot\nabla v.$$

Question 5. a) On prend $v = e_{k+1}$ dans l'expression précédente :

$$\int_\Omega |\nabla e_{k+1}|^2 \;=\; \int_\omega \nabla e_k\cdot\nabla e_{k+1}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz au second membre, on en déduit,

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla e_{k+1}|^2 + \int_\omega |\nabla e_{k+1}|^2 \;\leq\; \left(\int_\omega |\nabla e_{k+1}|^2\right)^{1/2}\left(\int_\omega |\nabla e_k|^2\right)^{1/2}.$$

Le second terme du membre de gauche est donc (somme de deux termes positifs) inférieur au membre de droite, et l'on a ainsi

$$\left(\int_\omega |\nabla e_{k+1}|^2\right)^{1/2} \;\leq\; \left(\int_\omega |\nabla e_k|^2\right)^{1/2},$$

qui est l'inégalité demandée.

b) La suite $\left(\|\nabla e_k\|_{L^2(\omega)}\right)$, de termes positifs ou nuls, décroissante, converge donc vers une limite $\ell \geq 0$. On a par ailleurs d'après ce qui précède

$$0 \;\leq\; \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla e_{k+1}|^2 \;\leq\; -\int_\omega |\nabla e_{k+1}|^2 + \left(\int_\omega |\nabla e_{k+1}|^2\right)^{1/2}\left(\int_\omega |\nabla e_k|^2\right)^{1/2}.$$

Le membre de droite de cette inégalité tendant vers $-\ell + \ell = 0$, on a convergence de $\|\nabla e_k\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})}$ vers 0. d'après l'inégalité de Poincaré de la question 1, celà implique que $\|e_k\|_{H^1(\Omega\setminus\overline{\omega})}$ tend aussi vers 0, c'est à dire que la restriction de u_k à $\Omega\setminus\overline{\omega}$ converge en norme H^1 vers la solution du problème de départ.

Question 6. Soit $\tilde{w}(x) = -w(-x)$. Il s'agit de vérifier que $\tilde{w}$ est solution du même problème que w. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \tilde{w}'(x)v'(x) \;=\; \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} w'(-x)v'(x) \;=\; -\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} w'(-x)\tilde{v}'(-x)$$

où l'on a défini $\tilde{v}(x) = v(-x)$. On fait le changement de variable $x \mapsto -x$, pour obtenir [1]

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \tilde{w}'(x)v'(x) \;=\; -\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} w'(x)\tilde{v}'(x).$$

Comme $\tilde{v}$ est une fonction test admissible, la quantité ci-dessus est égale à

$$-\int_{\Omega} f(x)\tilde{v}(x) \;=\; -\int_{\Omega} f(x)v(-x).$$

Le changement de variable $x \mapsto -x$ donne (du fait de l'imparité de f)

$$-\int_{\Omega} f(x)v(-x). \;=\; \int_{\Omega} f(x)v(x).$$

La fonction $\tilde{w}$ est donc solution du même problème que w sur $\Omega \setminus \overline{\omega}$, elle s'identifie donc à w sur ce domaine, et par suite les prolongements affines s'identifient. On a donc $w(-x) = -w(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

On démontre de la même manière, par récurrence, que les fonctions e_k sont impaires. En premier lieu la fonction $e_0 = -w$ l'est. On considère ensuite la formulation variationnelle qui définit e_{k+1} à partir de e_k, et on vérifie comme précédemment que la fonction $\tilde{e}_{k+1}(x) = -e_k(-x)$ est solution du même problème.

Question 7. La fonction e_k est dans H^1, qui s'injecte continûment, en dimension 1 d'espace, dans $C(\overline{\Omega}) = C([-1,1])$. Elle est donc continue (plus précisément sa classe admet un représentant continu). La fonction w est affine sur ω par construction, la fonction e_0 est donc affine sur ω. Montrons par récurrence que e_k est affine sur chacun des 3 sous-intervalles.

Hypothèse de récurrence : e_k est affine sur ω.

On a, pour $k \geq 0$.

$$\int_{\Omega} e'_{k+1}v' \;=\; \int_{\omega} e'_k v' \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

On prend des fonctions tests regulières à support compact dans ω (prolongées par 0 au delà), on en déduit que e_{k+1} est harmonique (i.e. de dérivée seconde nulle) sur ω donc (on est en dimension 1 d'espace) affine. De la même manière, en prenant des fonctions tests supportées dans $]-1,-a[$, puis $]a,1[$, on montre que e_{k+1} est affine sur chacun de ces intervalles.

La fonction e_k est donc affine par morceaux, nulle en -1 et en 1, impaire, elle est donc définie entièrement par sa valeur en a ou, de façon équivalents, par sa pente sur $]-a,a[$.

Question 8. La valeur de e_k en $-a$ est $-a\alpha_k$. La pente de e_k sur $]-1,-a[$ est donc $-a\alpha_k/(1-a)$ (même pente sur $]a,1[$). On a donc

$$\|e'_k\|^2_{L^2(\Omega)} \;=\; 2(1-a)\frac{a^2\alpha_k^2}{(1-a)^2} + 2a\alpha_k^2 \;=\; 2\frac{a\alpha_k^2}{1-a}.$$

1. Lorsqu'on intègre une fonction sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, le changement de variable $-x = s$ donne

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx \;=\; -\int_{a}^{-a} f(s)\,ds \;=\; +\int_{-a}^{a} f(s)\,ds.$$

Question 9. On prend $v = e_{k+1}$ dans la formulation variationnelle. On obtient

$$2\frac{a\alpha_{k+1}^2}{1-a} \;=\; 2a\alpha_{k+1}\alpha_k \quad\Longrightarrow\quad \alpha_{k+1} \;=\; (1-a)\alpha_k.$$

On a donc décroissance géométrique des α_k et d'après la question 9 décroissance géométrique de $\|e'_k\|_{L^2(\Omega)}$.

Noter que cette décroissance est d'autant plus rapide que le sous-domaine est grand (a proche de 1).

Question 10. a) On se place en coordonnées polaires, et l'on considère la transformation qui envoie de façon affine $[r-b, r]$ sur $[r, r+b]$, avec r comme point fixe :

$$\Psi \;:\; (\rho,\theta) \longmapsto \Psi(\rho,\theta) \;=\; (\Psi_\rho, \Psi_\theta) \;=\; (2r-\rho, \theta).$$

Son gradient s'écrit

$$\nabla\Psi \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Psi_\rho}{\partial\rho} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Psi_\rho}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\Psi_\theta}{\partial\rho} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

Comme on se place sur zone sur laquelle le rayon ρ est minoré par une constante strictement positive ($r-b>0$), le gradient est régulier.

Comme c'est une involution (elle s'identifie à sa réciproque), c'est bien un difféomorphisme, avec

$$\|\nabla\Psi\|_\infty \;\leq\; \frac{1}{r-b}.$$

b) La fonction $v\circ\Psi$ est définie sur A^-, elle est continûment différentiable sur A^-, et se raccorde continûment à v sur γ. La prolonger par 0 sur $\omega \setminus A^-$ serait un peu brutal, le résultat serait une fonction susceptible d'être discontinue au travers du cercle de rayon $r-b$, qui n'aurait donc pas la régularité H^1. On "lisse" le raccord (il s'agit en fait seulement ici d'un raccord continu) en multipliant par une fonction affine bien choisie : on considére la fonction $\tilde{v} = (\rho-(r-b))\,(v\circ\Psi)$ sur A^-, et $\tilde{v}=0$ sur le disque de rayon $r-b$.

On a

$$\nabla\,(v\circ\Psi) \;=\; {}^t\!(\nabla\Psi)\nabla v\circ\Psi.$$

Comme $\|{}^t\!(\nabla\Psi)\|_2$ est borné uniformément sur A^-, et que le gradient de $(\rho-(r-b))$ est lui-même borné, on a

$$|\nabla\tilde{v}(\rho,\theta)| \;\leq\; C\,|\nabla v(\Psi(\rho,\theta))|\,.$$

On a donc

$$\int_{A^-} |\nabla\tilde{v}(x)|^2 \;=\; \int_0^{2\pi}\int_{r-b}^{r} |\nabla\tilde{v}(\rho,\theta)|^2\,\rho\,d\theta\,d\rho \;\leq\; C\int_0^{2\pi}\int_{r-b}^{r} |\nabla v(\Psi(\rho,\theta))|^2\,\rho\,d\theta\,d\rho$$

$$\leq\; C\int_0^{2\pi}\int_r^{r+b} |\nabla v(\rho',\theta)|^2\,(2r-\rho')\,d\theta d\rho' \;\leq\; C'\int_{A^+} |\nabla v(x)|^2\,dx$$

Comme la semi norme H^1 de $\tilde{v}$ est nulle sur le disque de rayon $r-b$, on a bien

$$\int_\omega |\nabla \tilde{v}|^2 \;\leq\; C' \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla v(x)|^2$$

c) Soit maintenant une fonction $v \in V$ (pas forcément continûment différentiable). L'idée est d'utiliser la densité des fonctions régulières dans H^1, et la simple mention de cet argument a été considérée comme une réponse valable à cette question. Précisons pourtant que, à strictement parler, l'argument tel qu'il est énoncé dans le cours n'est pas directement utilisable, car $\Omega \setminus \overline{\omega}$ n'est pas régulier (coins du carré). On peut en fait démontrer la densité des fonctions régulières pour un domaine comme le carré mais, si l'on s'en tient à l'utilisation des résultats du cours polycopié, on peut utiliser l'argument sur $H^1(A^+)$, où A^+ est l'anneau entre deux cercles, donc régulier, pour construire une fonction de $H^1(A^-)$ dont la semi norme H^1 est contrôlée par celle de v sur $\Omega\setminus\overline{\omega}$, puis de prolonger par 0 sur le petit disque. Pour utiliser la densité, on considère une suite de fonctions v_n continûment différentiables qui tendent vers v dans $H^1(A^+)$. La suite correspondante (obtenue par la transformation décrite à la question précédente) $\tilde{v}_n$ sur ω (selon le procédé de construction précédent) est de Cauchy [2], et converge donc vers $\tilde{v} \in H^1_0(A^-)$ tel que

$$\|\nabla \tilde{v}\|_{L^2(A^-)} \;\leq\; C' \|\nabla v\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})}.$$

La fonction w est alors construite par morceaux, égale à $\tilde{v}$ sur A^-, nulle sur le petit disque, et égale à v sur $\Omega \setminus \overline{\omega}$.

Remarque générale : nous devons préciser que la démarche proposée ci-dessus, malgré son intérêt “pédagogique”, est un peu artificielle, car le résultat de densité des fonctions régulières, dont la démonstration n'est pas donnée dans le poly, utilise en fait un procédé de construction du même type [3]...

Une démarche plus cohérente consisterait à appliquer la construction ci-dessus directement à une fonction de H^1, à identifier sa dérivée sur A^-, et à vérifier que l'on construit bien ainsi une fonction de H^1 en utilisant la définition de cet espace.

2. Il faudrait démontrer en toute rigueur que la norme L^2 de $\tilde{v}_n$ est également contrôlée, mais les arguments de la questions précédentes peuvent être utilisés pour obtenir immédiatement une telle estimation.

3. La densité des fonctions régulières est triviale sur l'espace tout entier, par convolution par un noyau régularisant, mais c'est beaucoup plus délicat pour un domaine à bord : il faut d'abord construire une extension H^1 sur l'espace tout entier, et utiliser ensuite la convolution.

2 Optimisation

Partie A, dimension finie

Question 1. L'ensemble Δ_N est l'intersection des demi espaces fermés $\{x \in \mathbf{R}^N \ : -x_i \leq 0\}$ pour $i = 1, \cdots, N$ et de l'hyperplan affine $\left\{x \in \mathbf{R}^N \ : \ \sum x_i\right\}$. Ces ensembles étant des convexes fermés, Δ_N est aussi un convex fermé de $\mathbf{R}^N$.

De plus Δ_N contient les éléments $e_1, \cdots, e_N$ qui forment la base canonique de $\mathbf{R}^N$. Il est donc non-vide.

Question 2. On pouvait invoquer le Théoréme **9.2.6** du cours qui énonce qu'un fonction α-convexe sur un sous-ensemble convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert admet un unique minimiseur dans cet ensemble.

On peut aussi remarquer que Δ_N est un fermé borné de $\mathbf{R}^N$, donc compact. La fonction continue J admet donc un minimiseur $x^\star$ sur Δ_N. Par ailleurs, Δ_N étant convexe et J étant strictement convexe, ce minimiseur est unique.

Question 3. Soit $x, y \in \mathbf{R}^N$ et σ une permutation de $\{1, \cdots, N\}$. On note $\hat{x} = (x_\sigma(i))_{1 \leq i \leq N}$, $\hat{y} = (y_\sigma(i))_{1 \leq i \leq N}$. On voit facilement que $\hat{x}_i \geq 0$, $\forall i$ est équivalent à $x_i \geq 0$, $\forall i$. De même en faisant le changement d'indice $j = \sigma(i)$, on a

$$\sum_{i=1}^N \hat{x}_i \ = \ \sum_{i=1}^N x_{\sigma(i)} \ = \ \sum_{j=1}^N x_j, \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^N \hat{x}_i \ = \ 1 \iff \sum_{j=1}^N x_j \ = \ 1.$$

Finalement, on a

$$\hat{x} \in \Delta_N \quad \iff \quad x \in \Delta_N.$$

En faisant le même changement d'indice $j = \sigma(i)$, on a aussi

$$J_{\hat{y}}(\hat{x}) \ = \ J_y(x).$$

En conclusion, $\Big(x^\star \text{ minimise } J_y \text{ dans } \Delta_N\Big) \iff \Big(\hat{x}^\star \text{ minimise } J_{\hat{y}} \text{ dans } \Delta_N\Big)$.

Question 4. Fixons $1 \leq i < N$ et considérons la transposition σ qui permute les indices i et $i+1$ (*i.e.* $\sigma(j) = j$ si $j \notin \{i, i+1\}$, $\sigma(i) = i+1$ et $\sigma(i+1) = i$).

Avec les notations de la question précédente, on voit facilement que si $y_i = y_{i+1}$, alors $\hat{y} = y$ et donc $J_{\hat{y}} = J_y$, de sorte que si $x^\star$ minimise J dans Δ_N, alors $\hat{x}^\star$ aussi. Par unicité du minimiseur, on a donc $\hat{x}^\star = x^\star$, c'est-à-dire $x_i = x_{i+1}$.

Dans le cas général, toujours par optimalité de $x^\star$, et comme $\hat{x}^\star \in \Delta_N$, on a $J_y(\hat{x}^\star) - J_y(x^\star) \geq 0$, c'est à dire

$$0 \ \leq \ \frac{1}{2}|x^\star_{i+1} - y_i|^2 + \frac{1}{2}|x^\star_i - y_{i+1}|^2 - \frac{1}{2}|x^\star_i - y_i|^2 - \frac{1}{2}|x^\star_{i+1} - y_{i+1}|^2 \ = \ (x^\star_{i+1} - x^\star_i)(y_{i+1} - y_i).$$

Donc si $y_i < y_{i+1}$, on a $x^\star_i \leq x^\star_{i+1}$.

Question 5. La fonction J_y est une fonction polynomiale et donc différentiable. On a de plus, $\nabla J_y(x^\star) = x^\star - y$. Le Théoréme **10.2.1** s'applique ici : $x^\star$ est l'unique élément de Δ_N tel que

$$\langle x^\star - y, x - x^\star \rangle \ \geq \ 0, \quad \text{pour tout } x \in \Delta_N. \tag{1}$$

Question 6. Soit $1 \leq i \leq N-1$ et notons à nouveau,

$$\hat{x}^\star := (x_1^\star, \cdots, x_{i-1}^\star, x_{i+1}^\star, x_i^\star, x_{i+2}^\star, \cdots x_N^\star) \in \Delta_N.$$

En appliquant maintenant (1) avec $x = \hat{x}^\star$, on obtient

$$0 \ \leq \ (x_i^\star - y_i)(x_{i+1}^\star - x_i^\star) + (x_{i+1}^\star - y_{i+1})(x_i^\star - x_{i+1}^\star) \ = \ ([y_{i+1} - x_{i+1}^\star] - [y_i - x_i^\star])(x_{i+1}^\star - x_i^\star)$$

En tenant compte de la Question **3**, on sait que $x_{i+1}^\star \geq x_i^\star$. On a maintenant deux cas :
- ∘ Si $x_{i+1}^\star > x_i^\star$ alors l'inégalité précédente entraîne $[y_{i+1} - x_{i+1}^\star] \geq [y_i - x_i^\star]$.
- ∘ Si $x_{i+1}^\star = x_i^\star$, l'inégalité $[y_{i+1} - x_{i+1}^\star] \geq [y_i - x_i^\star]$ découle de l'hypothése $y_{i+1} \geq y_i$.

Question 7. On peut définir Δ_N comme l'ensemble des points de $\mathbf{R}^N$ satisfaisant les contraintes inégalités

$$F_i(x) := -x_i \leq 0 \text{ pour } i = 1, \cdots, N \quad \text{et} \quad \pm F(x) := \pm \left(\sum x_i - 1 \right) \leq 0.$$

Les fonctions $(F_i)_{1 \leq i \leq N}$ et F étant affines, les contraintes sont qualifiées (il suffit de prendre $\bar{w} = 0$ dans la Définition **10.2.13**.

Question 8. La fonction J_y est différentiable ainsi que les fonctions $(F_i)_{1 \leq i \leq N}$, F_- et F_+ et nous venons de voir que les contraintes sont qualifiées (en tout point de Δ_N). On peut donc appliquer le Théoréme **10.2.15** et en déduire l'existence de réels $\lambda_-, \lambda_+, \lambda_1, \cdots, \lambda_N \geq 0$ tels que

$$\nabla J_y(x^\star) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \nabla F_i(x^\star) - \lambda_- \nabla F(x^\star) + \lambda_+ \nabla F(x^\star) \ = \ 0.$$

On peut poser $\lambda^\star = \lambda_+ - \lambda_-$ et récrire cette identité sous la forme

$$\nabla J_y(x^\star) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \nabla F_i(x^\star) + \lambda^\star \nabla F(x^\star) \ = \ 0.$$

De plus, le théoréme nous donne $\lambda_i = 0$ dés que $F_i(x^\star) < 0$ (contraintes non-actives).

En tenant compte des formules

$$\nabla J_y(x) = x - y, \ \nabla F_i(x) = -e_i \text{ pour } i = 1, \cdots, N \text{ et } \nabla F(x) = \sum_{i=1}^N e_i$$

on obtient bien

$$x_i^\star - y_i \ = \ -\lambda^\star + \lambda_i \quad \text{pour } i = 1, \cdots, N$$

avec $\lambda_i \geq 0$ et $\lambda_i F_i(x^\star) = -\lambda_i x_i^\star = 0$ pour $i = 1, \cdots, N$.

Question 9. Soit $1 \leq i \leq N$.

∘ Si $x_i^\star > 0$ alors $\lambda_i = 0$ et $x_i^\star = y_i - \lambda^\star \geq 0$, donc $x_i^\star = (y_i - \lambda^\star)_+$.

∘ Si $x_i^\star = 0$, alors $0 = y_i - \lambda^\star + \lambda_i$ et comme $\lambda_i \geq 0$, on a $y_i - \lambda^\star \leq 0$ et $(y_i - \lambda^\star)_+ = 0$. Dans ce cas encore, on a $x_i^\star = (y_i - \lambda^\star)_+$.

Question 10. Comme $x^\star \in \Delta_N$, on a $1 - \sum_{i=1}^N x_i^\star = 0$. En substituant $x_i^\star = (y_i - \lambda^\star)_+$ dans cette identité, on a bien :

$$1 - \sum_{i=1}^{N} (y_i - \lambda^\star)_+ \ = \ 0. \tag{2}$$

Question 11. La fonction $f : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = (1/2)(-t)_+^2$ est de classe C^1 avec

$$f'(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0, \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

De plus f' est croissante et donc f est convexe. Les fonctions translatées $f_i(t) := f(t - y_i)$ sont elles aussi de classe C^1 et convexes, on en déduit que G est de classe C^1 et convexe comme somme finie de fonctions convexes de classe C^1.

Vérifions que G est infinie à l'infini.
Pour $t \leq -y_N$, on a

$$G(t) \geq [(y_N - t)_+]^2 - t = \frac{1}{2}t^2 + (1 - y_N)t + \frac{1}{2}|y_N|^2 \overset{t\downarrow-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pour $t \geq y_N$, on a $G(t) = t \ \to \ +\infty$ quand $t \to -\infty$.

En conclusion G est bien convexe, de classe C^1 et infinie à l'infini.

Question 12. G est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, infinie à l'infini, elle admet donc au moins un minimiseur sur $\mathbf{R}$.

Question 13. Comme G est convexe et de classe C^1 l'ensemble des points de minimum de G sur $\mathbf{R}$ est l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{t \in \mathbf{R} \ : \ G'(t) = 0\}.$$

Pour $t > y_N$, on a $G'(t) = 1 \neq 0$ et donc $t \notin \mathcal{M}$. On a bien $\mathcal{M} \subset]-\infty, y_N]$.

On remarque maintenant que G est strictement convexe sur $]-\infty, y_N]$ (en effet G' est strictement croissante sur cet intervalle) et on en déduit que G admet au plus un minimiseur sur $]-\infty, y_N]$. En notant $t^\star$ ce minimiseur, on a $\mathcal{M} = \{t^\star\} \subset]-\infty, y_N]$.

Question 14. Soit $i \in \{1, \cdots, N\}$. Sur l'intervalle I_i, on a

$$G'(t) = 1 + \sum_{j=i}^{N} (t - y_j).$$

En supposant $t^\star \in I_i$, la condition $G'(t^\star) = 0$ nous donne

$$t^\star \ = \ g_i(y) \ := \ \frac{1}{N - i + 1} \left(-1 + \sum_{j=i}^{N} y_j \right). \tag{3}$$

Question 15. Soit $i \in \{1, \cdots, N\}$.

$\Longrightarrow$ D'aprés la question précédente, si $t^\star \in I_i$ alors $t^\star = g_i(y)$ et donc $g_i(y) \in I_i$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, si $t_i := g_i(y) \in I_i$ alors $G'(t_i) = 1 + \sum_{j=i}^N (t_i - y_j) = 0$ et comme $t^\star$ est l'unique point où G' s'annule, on a $t^\star = t_i$. En particulier, $t^\star \in I_i$.

Question 16. L'identité (2) n'est autre que $G'(\lambda^\star) = 0$ et donc $\lambda^\star = t^\star$.

L'algorithme suggéré par les Questions 14 et 15 pour le calcul de $\lambda^\star = t^\star$ est le suivant. On commence par :

1. Trier les coordonnées de y par ordre croissant.

Ensuite :

2. Pour $i \leftarrow N$ à 1 par valeurs décroissantes faire :

3. $t \leftarrow g_i(y)$;

4. Si $t \in I_i$ alors faire $\lambda^\star \leftarrow t$ et sortir de la boucle ;

5. Fin Pour

D'aprés la Question 9, on obtient les coordonnées de $x^\star$ en faisant

6. Pour $i \leftarrow 1$ à N faire :

7. $x_i^\star \leftarrow \max(y_i - \lambda^\star, 0)$;

8. Fin Pour

Il ne faut pas oublier de faire l'opération de tri inverse de la ligne *1*.

9. Réordonner les coordonnées de $x_i^\star$

Remarque : Pour N grand, la complexité de notre algorithme est de l'ordre de $N \ln N$, ce qui correspond à la complexité de l'opération de tri executée à la première ligne, le reste des opérations étant de l'ordre de N (attention néanmoins à la ligne 3 : il faut éviter de recalculer à chaque itération toute la somme dans la formule (3)).

Question 17. On commence par réordonner les coordonnées de y par ordre croissant pour travailler avec le vecteur $\hat{y} = (1, 2, 3)$.

On calcule ensuite

$$t_3 \ := \ g_3(\hat{y}) = (3-1)/1 = 2.$$

On a $t_3 \notin I_3 =]2, 3]$et nous devons continuer l'algorithme.

On calcule

$$t_2 \ := \ g_2(\hat{y}) = (3+2-1)/2 = 2.$$

Cette fois, on a bien $t_2 \in I_2 =]1, 2]$ et on pose

$$\lambda^\star = t_2 = 2.$$

On obtient les coordonnées de $\hat{x}^\star$ par la formule $\hat{x}_i^\star = (\widehat{y}_i - \lambda^\star)_+$,

$$\hat{x}_1^\star = (1-2)_+ = 0, \quad \hat{x}_2^\star = (2-2)_+ = 0, \quad \hat{x}_3^\star = (3-2)_+ = 1.$$

On a finalement $\hat{x}^\star = (0, 0, 1)$ et en réordonnant $x^\star = (1, 0, 0) = e_1$.

Partie B, dimension infinie

Question 18. Montrons que K est fermé dans $H^1(I)$. Soit $(u_n) \subset K$ une suite convergente dans $H^1(I)$ vers sa limite u. En utilisant les représentants continus des (u_n) et u, on déduit de l'inégalité

$$\sup_{x \in \bar{I}} |u_n(x) - u(x)| \leq \ 2\|u_n - u\|_{H^1},$$

que la suite (u_n) converge ponctuellement vers u sur $\bar{I}$. Soit maintenant $0 \leq x \leq y \leq 1$, par définition de K et passage à la limite, on a

$$0 \ \leq \ u_n(y) - u_n(x) \ \stackrel{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} \ u(y) - u(x).$$

Le représentant continu de u est donc croissant, ainsi $u \in K$ et K est bien fermé.

Question 19. On peut récrire la fonctionnelle J sous la forme

$$J(u) \ = \ \frac{1}{2}a(u,u) - b(u) + c, \tag{4}$$

où a est bilinéaire, b est linéaire et $c \in \mathbf{R}$. Plus précisément, ici

$$a(u,v) \ = \ \langle u\,;\,v\rangle_{H^1(I)}, \qquad b(u) \ = \langle u\,;\,f\rangle_{L^2}, \qquad c \ = \ (1/2)\|f\|_{L^2}^2.$$

On vérifie facilement que b est continue sur $H^1(I)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$b(u) \ \leq \ \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \ \leq \ \|f\|_{L^2}\|u\|_{H^1}, \qquad \forall\, u \in H^1(I).$$

De même a est trivialement continue et symétrique. Nous savons que les fonctionnelles de la forme (4) avec a bilinéaire, continue et symétrique et b linéaire continue sont différentiables avec $\langle J'(u); v\rangle = a(u,v) - b(v)$. J est donc différentiable dans $H^1(I)$ avec

$$\langle J'(u); v\rangle \ = \ \int_I u'(x)v'(x)\,dx + \int_I (u(x) - f(x))v(x)\,dx \ =: \ L_u(v) \qquad \forall\, u, v \in H^1(I).$$

Question 20. J est une fonctionnelle de la forme (4) avec a bilinéaire, continue sur $H^1(I)$ et symétrique et b linéaire continue sur $H^1(I)$, ainsi J est continue sur $H^1(I)$. De plus a est trivialement coercive donc J est α-convexe sur $H^1(I)$ (avec $\alpha = 1$ ici). On peut donc appliquer le Théoréme **9.2.6** et conclure que J admet un unique minimiseur dans K (noté $u_\star$ dans la suite).

Question 21. Comme J est différentable, Le Théoréme **10.2.1** du cours s'applique (K est convexe fermé non vide et J convexe). On a donc pour $u \in K$,

$$\Big(u \ = \ u_\star\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\forall v \in H^1(I), \ u + v \in K \ \Rightarrow \ \langle J'(u); v\rangle \ = \ L_u(v) \geq \ 0\Big). \tag{5}$$

Il est clair que pour toute constante $\lambda \in \mathbf{R}$, la fonction définie par $u_\lambda(x) = u_\star(x) + \lambda$ est un élément de K, on peut donc appliquer la caractérisation précédente avec $u = u_\star$ et $v \equiv \lambda$. On en déduit

$$\forall\, \lambda \in \mathbf{R}, \quad L_{u_\star}(\lambda) \ = \ \lambda L_{u_\star}(1) \ \geq \ 0.$$

En faisant $\lambda = 1$ puis $\lambda = -1$, on obtient $L_{u_\star}(1) \ = \ 0$.

Remarque : On peut voir $u_\star$ comme une régularisation croissante de f. La condition $0 = L_{u_\star}(1) = \int_I u_\star - \int_I f$ nous dit que cette régularisation préserve la moyenne.

Question 22. L'espace V est un sous-espace fermé du Hilbert $H^1(I)$ (comme noyau de l'application linéaire continue $v \mapsto \int_I v$). V muni du produit scalaire de $H^1(I)$ est donc un Hilbert. D'aprés l'indication, on peut utiliser sur V le produit scalaire $\langle u; v\rangle_V = \int_I u'v'$ équivalent au produit scalaire de $H^1(I)$. L'application $L_{u_\star}$ étant une forme linéaire continue sur $H^1(I)$, sa restriction à V est aussi une forme linéaire continue sur V. D'aprés le Théoréme de représentation de Riesz, il existe $w_\star \in V$ tel que

$$L_{u_\star}(v) \;=\; \langle w_\star; v\rangle_V \;=\; \int_V w_\star'(x)v'(x)\,dx \qquad \forall\, v \in V.$$

Soit maintenant $v \in H^1(I)$ et notons $\bar{v} = \int_I v$ sa moyenne. On a par construction $v - \bar{v} \in V$ et par linéarité de $L_{u_\star}$, on a :

$$L_{u_\star}(v) \;=\; L_{u_\star}(v - \bar{v}) + \bar{v}\, L_{u_\star}(1) \;=\; \int_I w_\star'(x)v'(x)\,dx \;+\; 0,$$

en effet $L_{u_\star}(1) = 0$ d'aprés la question précédente. En conclusion, en notant $\lambda_\star := w_\star' \in L^2(I)$, on a bien la représentation souhaitée de $L_{u_\star}$:

$$L_{u_\star}(v) \;=\; \int_I \lambda_\star(x)v'(x)\,dx \quad \forall\, v \in H^1(I). \tag{6}$$

Question 23. Soit $g = (-\lambda_\star)_+$ la partie négative de $\lambda_\star$ et posons $v(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, de sorte que $v \in H^1(I)$ et $v' = g \geq 0$. On a donc $u_\star + v \in K$ et par la caractérisation (5), on a $L_{u_\star}(v) \geq 0$, soit

$$0 \;\leq\; \int_I \lambda_\star g \;=\; -\int_I g^2\,dx.$$

On en déduit que $g = 0$ presque partout sur I et donc $\lambda_\star \;\geq\; 0$ presque partout sur I.

Question 24. Posons comme dans l'énoncé,

$$w(x) \;:=\; \frac{2}{\pi}\int_0^x u_\star'(t)\arctan(u_\star'(t))\,dt.$$

La fonction $t \mapsto u_\star'(t)\arctan(u_\star'(t))$ est mesurable et de carré intégrable comme produit d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction de carré intégrable. En particulier, w est bien définie et $w \in H^1(I)$ avec $w' = (2/\pi)u_\star'\arctan(u_\star')$. Maintenant on calcule $(u_\star - w)' = u_\star'[1 - (2/\pi)\arctan(u_\star')]$ et comme $(2/\pi)\arctan(u_\star') \leq 1$ et $u_\star' \geq 0$, on a bien $(u_\star - w)' \geq 0$. Ainsi $u_\star - w \in K$. En appliquant la condition (5) avec $v = -w$, on obtient,

$$\int_I \lambda_\star(x)u_\star'(x)\arctan[u_\star'(x)]\,dx \;\leq\; 0.$$

L'intégrant étant positif presque partout sur I, on déduit qu'il s'annule presque partout et comme $(t\arctan t \neq 0) \Leftrightarrow (t \neq 0)$, on conclut que $\lambda_\star u_\star' \;=\; 0$ presque partout sur I.

Question 25.

∘ Considérons tout d'abord la seconde inégalité. Posons $J_\star(u) = \mathcal{L}(u, \lambda_\star)$. Cette fonctionnelle est une fonctionnelle quadratique de la forme $J_\star(u) = (1/2)a(u,u) - b(u) + c$ avec a bilinéaire, symétrique, continue et coercive, b linéaire continue et $c \in \mathbf{R}$. Précisément,

$$a(u,u) \;=\; \|u\|_{H^1}^2, \quad b(u) = \langle f; u\rangle_{L^2} + L_{u_\star}(v) \quad \text{et} \quad c = (1/2)\|f\|_{L^2}^2.$$

Comme on l'a vu pour J plus haut, $J_\star$ est α-convexe et différentiable. Elle admet un unique minimiseur $v_\star$ dans $H^1(I)$ caractérisé par $\nabla J_\star(v_\star) = 0$, or pour $u, v \in H^1(I)$

$$\begin{aligned}\langle \nabla J_\star(u); v\rangle &= a(u,v) - b(v) = \int_I u'(x)v'(x)\,dx + \int_I (u(x) - f(x))v(x)\,dx - L_{u_\star}(v)\\ &= L_u(v) - L_{u_\star}(v).\end{aligned}$$

Il est alors clair que $\nabla J_\star(u_\star) = 0$ et donc $u_\star = v_\star$ est l'unique minimiseur de $J_\star$ dans $H^1(I)$. Avec les notations de l'énoncé, on a montré la seconde inégalité :

$$\forall\, v \in H^1(I) \qquad \mathcal{L}(u_\star, \lambda_\star) \;\leq\; \mathcal{L}(v, \lambda_\star).$$

∘ Établissons maintenant la premiére inégalité. Soit $\mu \in L^2(I, \mathbf{R}_+)$, on calcule

$$\mathcal{L}(u_\star, \mu) - \mathcal{L}(u_\star, \lambda_\star) \;=\; \int_I \lambda_\star(t)u_\star'(t)\,dt - \int_I \mu(t)u_\star'(t)\,dt.$$

On a vu à la question précédent que le produit $\lambda u_\star'$ s'annule presque partout sur I et la premiére intégrale dans le membre de gauche ci-dessus est nulle. Comme les deux fonctions $u_\star'$ et μ sont à valeurs positives (presque partout sur I) la seconde intégrale est positive. En conclusion, on a bien,

$$\forall\, \mu \in L^2(I, \mathbf{R}_+) \qquad \mathcal{L}(u_\star, \mu) - \mathcal{L}(u_\star, \lambda_\star) \;\leq\; 0.$$

Question 26. Soit $u \in H^1(I)$ et $\lambda \in L^2(I, \mathbf{R}_+)$ et supposons que le couple (u, λ) soit un point selle de $\mathcal{L}$ dans $H^1(I) \times L^2(I, \mathbf{R}_+)$.

∘ Montrons tout d'abord que $u \in K$. Par la premiére inégalité qui caractérise le point selle, on sait que pour tout $\mu \in L^2(I, \mathbf{R}_+)$ on a

$$\int_I [\mu(t) - \lambda(t)]u'(t)\,dt \;\geq\; 0. \tag{7}$$

Posons $\mu(x) := \lambda(x) + (-u'(x))_+$. On a bien $\mu \in L^2(I, \mathbf{R}_+)$ et pour ce choix, la condition (7) se traduit par

$$-\int_I [(-u'(t))_+]^2\;dt \;\geq\; 0,$$

Par conséquent, $(-u')_+ = 0$ presque partout sur I, c'est-à-dire $u' \geq 0$ sur I. Ainsi, $u \in K$.

∘ Montrons que $\lambda u' = 0$ presque partout sur I. Faisons $\mu = \lambda/2$ dans (7). On obtient,

$$-\int_I \lambda(t)u'(t)\,dt \;\geq\; 0.$$

Comme $u', \lambda \geq 0$ presque partout sur I, on en déduit $\lambda\, u' = 0$ presque partout sur I.

∘ Montrons que $u = u_\star$. Par la seconde inégalité de la caractérisation du point selle, nous avons pour tout $v \in H^1(I)$,

$$J(u) \;-\; \int_I \lambda\, u'(t)\,dt \;\leq\; J(v) \;-\; \int_I \lambda\, v'(t)\,dt.$$

Par le point précédent, l'intégrale dans le membre de gauche est nulle. De plus si $v \in K$, alors l'intégrale dans le membre de droite est positive. On en déduit $J(u) \le J(v)$ pour tout $v \in K$ et comme $u \in K$, on a bien $u = u_\star$ par unicité du minimiseur de J dans K.

∘ Finalement par la seconde inégalité de la caractérisation du point selle, $u = u_\star$ minimise $v \mapsto \mathcal{L}(v,\lambda)$ dans $H^1(I)$, on a donc $\nabla_v \mathcal{L}(u,\lambda) = 0$, soit :

$$\forall\, v \in H^1(I) \qquad L_{u_\star}(v) \;=\; \int_I \lambda(t) v'(t)\,dt.$$

Avec l'identité (5), cela conduit à :

$$\int_I (\lambda(t) - \lambda_\star(t)) v'(t)\,dt \;=\; 0, \qquad \forall\, v \in H^1(I).$$

En particulier, en prenant $v(x) := \int_0^x (\lambda(t) - \lambda_\star(t))\,dt$, on obtient $\|\lambda - \lambda_\star\|_{L^2}^2 \;=\; 0$ et donc $\lambda = \lambda_\star$ (dans $L^2(I)$).

Question 27. On a caractérisé la solution $u_\star$ du problème $\min_K J$ et le multiplicateur de Lagrange associé $\lambda_\star$ comme étant l'unique paire qui est point selle de $\mathcal{L}$ sur $H^1(I) \times L^2(I)$. Dans cet esprit, nous proposons d'utiliser l'algorithme d'Uzawa pour rechercher le point selle. Cet algorithme s'interprète comme un algorithme de gradient associé au problème dual :

$$\text{Maximiser } \; G(\lambda) \;:=\; \min_{u \in H^1(I)} \mathcal{L}(u,\lambda) \;\; \text{dans le convexe fermé } L^2(I, \mathbf{R}_+).$$

La subtilité réside dans le calcul de ∇G. En notant, u_λ le minimiseur de $\mathcal{L}(\cdot,\lambda)$ dans $H^1(I)$, on a en faisant un développement limité formel,

$$\begin{aligned} G(\lambda+\delta) &= \mathcal{L}(u_{\lambda+\delta}, \lambda+\delta) \\ &= \mathcal{L}(u_\lambda,\lambda) \;-\; \int_I \delta u'_\lambda \;+\; \left\{ L_{u_\lambda}(u_{\lambda+\delta} - u_\lambda) - \int_I \lambda(u'_{\lambda+\delta} - u'_\lambda) \right\} \\ &\qquad\qquad + \text{ termes d'ordre supérieurs} \end{aligned}$$

On remarque que le terme entre accolades est de la forme

$$L_{u_\lambda}(v) - \int_I \lambda v' \;=\; \langle \nabla_u \mathcal{L}(u,\lambda)\,;\, v\rangle,$$

avec $v = u_{\lambda+\delta} - u_\lambda$. Par optimalité de u_λ, ce terme est nul et on a, au moins formellement,

$$\langle \nabla G(\lambda)\,;\,\delta\rangle_{L^2(I)} \;=\; -\int_I \delta u'_\lambda.$$

C'est-à-dire $\nabla G(\lambda) = -u'_\lambda$.

Si on ne se préoccupe pas de la discrétisation, l'algorithme se décompose comme suit :

1. (intialisation) On se donne $\lambda_0 \in L^2(I, \mathbf{R}_+)$ et $p > 0$.
2. Pour $n = 0, 1, \cdots$ jusqu'à convergence :
3. Calculer u_n minimiseur de $\mathcal{L}(\cdot,\lambda_n)$ dans $H^1(I)$
5. Poser $\lambda_{n+1} \;=\; (\lambda_n - p\,u'_n)_+$
6. Fin Pour