

Ecole Polytechnique, promotion X2012
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)

Devoir à la maison N°1

Sujet proposé par Isabelle Terrasse

Analyse de dispersion pour l'équation des ondes.

Le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (1)$$

On suppose que les données initiales sont suffisamment régulières pour que le problème de Cauchy (1) admette une solution unique $u(x, t)$ d'énergie finie et au moins de classe \mathcal{C}^2 en temps. On note A l'opérateur $-\Delta$.

1 Etude du problème continu

1.1 Notion d'onde plane harmonique

Une onde plane harmonique est une fonction de la forme :

$$u(x, t) = \exp i(\omega t - kx), \quad (k, \omega) \in \mathbf{R}^2. \quad (2)$$

La fonction définie par (2) est oscillante en temps et en espace et on définit :

- k est le nombre d'onde. La solution est périodique en espace de période $\lambda = 2\pi/|k|$: la longueur d'onde.
- ω est la pulsation (souvent abusivement appelée fréquence, la fréquence étant $f = \omega/2\pi$). La solution est périodique en temps de période $T = 2\pi/|\omega| = 1/|f|$

En écrivant que :

$$u(x, t) = \exp i\omega \left(t - \frac{x}{V} \right), \quad V = \frac{\omega}{k}$$

on voit qu'il s'agit d'une "onde" (on enlève le cas trivial $k = 0$) se propageant à la vitesse (dite vitesse de phase) :

$$V = \frac{\omega}{k}.$$

Question 1

On considère k comme un paramètre, établir la relation de dispersion reliant $\omega(k)^2$ à k^2 vérifiée par toute solution harmonique de l'équation des ondes (1). En déduire la relation entre λ et T . Qu'en déduit-on pour la vitesse de phase? Expliquer pourquoi tout signal de forme quelconque se propage sans déformation dans un milieu homogène (c'est à dire tel que c est constant).

1.2 Cas D -périodicité en espace

Soit $D > 0$ un paramètre réel. On ajoute l'hypothèse que les données initiales et donc la solution sont D -périodiques.

Question 2

Montrer que sous cette hypothèse, les nombres d'onde des solutions de type ondes planes harmoniques s'écrivent :

$$k_L D = 2\pi L, \quad L \in \mathbb{Z}$$

En déduire que les ondes planes harmoniques solutions de (1) sont déterminées par, pour tout $L \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, :

$$\hat{u}_L(x, t) = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_L t) + \hat{u}_{1,L} \text{sinc}(\omega_L t)] e^{-ik_L x} \quad (3)$$

où la fonction (régulière) sinc est définie sur \mathbb{R} par le prolongement par continuité de $\frac{\sin X}{X}$. Préciser les conditions initiales associées. Ecrire la relation de dispersion reliant ω_L^2 à k_L^2 .

Les fréquences spatiales à D fixé sont définies par les inverses des longueurs d'onde des modes de Fourier. Que deviennent-elles si D augmente ou D diminue ?

2 Semi-discrétisation en espace de l'équation des ondes 1D par un schéma aux différences finies

On commence par regarder la discrétisation en espace. On considère un entier $J > 0$ et le pas d'espace $h = \frac{D}{J}$. Les points discrets sont définis par $X_h = (x_1, \dots, x_J) \in \mathbb{R}^J$, avec $x_j = -D/2 + jh = h(j - J/2)$ pour tout $1 \leq j \leq J$. On note pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U_h(t) = (U_1, \dots, U_J)(t) \in \mathbb{R}^J$ une approximation de $u(x_j, t)$ avec les conditions de J -périodicité :

$$U_0(t) = U_J(t) \quad \text{et} \quad U_{J+1}(t) = U_1(t)$$

2.1 Schéma semi-discrétisé en espace.

Soit le schéma semi-discrétisé en espace : chercher $U_h(t) = (U_1, \dots, U_J)(t) \in \mathbb{R}^J$, J -périodique, solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 U_j}{dt^2}(t) - \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}(t) = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq J, t > 0, \\ U_j(0) = U_{0,j} \quad \forall 1 \leq j \leq J, \\ \frac{dU_j}{dt}(0) = U_{1,j} \quad \forall 1 \leq j \leq J, \end{cases} \quad (4)$$

où les vecteurs $U_{0,h} = (U_{0,j})_{1 \leq j \leq J}$ et $U_{1,h} = (U_{1,j})_{1 \leq j \leq J}$ sont des approximations (en espace) des données initiales u_0 et u_1 . Dans le cadre de l'analyse proposée, nous supposons suffisamment de régularité sur ces données initiales pour choisir l'approximation ponctuelle (5) :

$$U_{\alpha,j} = u_\alpha(x_j), \quad \alpha = 0, 1. \quad (5)$$

Question 3

On s'intéresse de même aux solutions particulières de (4) de la forme :

$$U_j(t) = \exp i(\omega(k)t - kx_j)$$

notée $U_h(t) = \exp(i\omega(k)t)e^{-ikX_h}$. Ecrire la relation de dispersion reliant ω_k^2 à k^2 . En déduire que pour un nombre d'onde donné k , on a

$$\omega = \pm\omega_h(k), \quad \omega_h(k) = \frac{2c}{h} \sin \frac{kh}{2}.$$

Le signal se propage-t'il sans déformation ? Montrer que cette déformation s'aggrave au cours du temps, il convient donc de la maîtriser. Montrer que

$$\left| \operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right) - 1 \right| \leq \frac{k^2 h^2}{24}$$

En déduire que les ondes planes harmoniques solutions de (4) sont déterminées par, pour tout $L \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\hat{U}_{h,L}(t) = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h}t) + \hat{u}_{1,L} \operatorname{sinc}(\omega_{L,h}t)t] e^{-ik_L X_h} \quad (6)$$

Préciser les conditions initiales associées. En déduire que le schéma semi-discrétisé est d'ordre 2 en espace, c'est à dire :

$$\omega_{L,h} = \omega_L + O(h^2)$$

Montrer que $\sin^2\left(\frac{k_L h}{2}\right)$ est périodique pour la variable L de période J . Expliquer pourquoi on choisit donc de ne s'intéresser qu'aux J premiers modes de Fourier d'indice $L \in \mathbb{Z}_J$:

$$\mathbb{Z}_J = \left\{ L \in \mathbb{Z}; -\frac{J}{2} < L \leq \frac{J}{2} \right\}$$

Il s'agit du critère dit de Nyquist. Tracer les courbes de dispersion obtenues en traçant les variations du rapport entre vitesse continue et vitesse de phase numérique :

$$q_h(G) = \frac{\omega_h}{kc}$$

en fonction de G inverse du nombre de points par longueurs d'onde :

$$G = \frac{kh}{2\pi}$$

Préciser pour les cas D -périodiques précédents la relation entre G et L/J .

3 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies en espace et en temps

3.1 Le schéma explicite centré ou schéma saute-mouton

On introduit maintenant un pas de temps uniforme $\Delta t > 0$ et on souhaite évaluer la solution aux temps $t^n = n\Delta t$. On note U_j^n une approximation de $u(x_j, t^n)$ et U_h^n le vecteur de \mathbb{R}^J associé. Pour obtenir le schéma totalement discrétisé, il faut d'une part discrétiser en temps l'opérateur du second ordre d^2/dt^2 et d'autre part choisir à quels temps intervient l'opérateur semi-discret $A_h u_h$. On propose le schéma dit saute-mouton suivant :

$$\frac{1}{c^2} \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0 \quad (7)$$

Question 4

Montrer que le schéma est totalement explicite et donner son expression en fonction du nombre sans dimension

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h},$$

appelé coefficient CFL que l'on interprétera.

3.2 Le schéma de démarrage

Le schéma explicite faisant au pas de temps $n+1$ intervenir les valeurs trouvées au deux pas de temps précédents, il convient de disposer d'un schéma dit de démarrage sur les deux premières itérations. Pour initialiser le schéma totalement discrétisé et déterminer U_h^0 et U_h^1 , nous avons besoin d'approcher $U_h(0 * \Delta t)$ et $U_h(1 * \Delta t)$. Pour U_h^0 , il est naturel de choisir

$$U_h^0 = U_{0,h}$$

Question 5

Montrer que l'approximation

$$U_h^1 = U_{0,h} + \Delta t U_{1,h}$$

n'est que d'ordre 1 en temps. Montrer que l'approximation

$$U_h^1 = \left(I - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} A_h\right) U_h^0 + \Delta t U_{1,h}$$

est d'ordre 2 en temps. C'est le schéma de démarrage que nous utiliserons dans la suite. Le schéma est donc maintenant parfaitement défini.

3.3 Dispersion numérique

Comme dans le cas semi-discrétisé, on s'intéresse aux solutions particulières de la forme :

$$U_h^n = e^{i(\omega_{h,\Delta t}(k)t^n - kX_h)}$$

Question 6

Montrer que la relation de dispersion s'écrit

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$$

En déduire que le schéma est instable sous la condition $\alpha > 1$. Montrer que sous la condition CFL $0 \leq \alpha \leq 1$, les ondes planes harmoniques s'écrivent pour tout $L \in \mathbb{Z}_J$,

$$\hat{U}_{L,h}^n = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h,\Delta t} t^n) + \hat{u}_{1,L} \text{sinc}_n(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t) t^n] e^{-ik_L X_h} \quad (8)$$

avec sinc_n la fonction (régulière) définie sur \mathbb{R} par le prolongement par continuité de $\frac{\sin(nX)}{n \sin X}$. Indication : dans un premier temps, on ne considérera pas le cas particulier où l'équation récurrente vérifiée par $\hat{U}_{L,h}^n$ admet une racine double, que l'on étudiera directement en revenant à (7).

Montrer que si $0 < \alpha < 1$ et $k \neq 0$

$$\frac{\omega_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \pm \frac{\arcsin(\alpha \sin(\frac{kh}{2}))}{\alpha \frac{kh}{2}}$$

et donc que $\omega_{h,\Delta t}(k)^2 = k^2 c^2 + O(h^2 + \Delta t^2)$. Le schéma sera donc d'ordre 2 en temps et en espace.

En introduisant de même $G = \frac{kh}{2\pi}$ qui correspond à l'inverse du nombre de points par longueur d'onde, tracer les courbes de dispersion $q(\alpha, G)$ pour différentes valeurs de α , avec

$$q(\alpha, G) = \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)}{kc}$$

Analyser les éléments suivants :

- Quand α est fixé et $h \rightarrow 0$ (et donc Δt aussi).
- Pour α fixé, que peut-on dire de la variation de la fonction $G \rightarrow q(\alpha, G)$? Interpréter en terme de fréquences.
- Pour G fixé, que peut-on dire de la variation de la fonction $\alpha \rightarrow q(\alpha, G)$? Que recommander comme choix de CFL?
- Quel schéma limite trouve t'on quand $\alpha \rightarrow 0$? Pourquoi faire diminuer le pas de temps sans toucher au pas d'espace est une fausse bonne idée pour gagner en précision?

Étendre l'analyse de dispersion à la dimension 2. \mathbf{k} devient un vecteur dit vecteur d'onde de directions (k_x, k_y) et le nombre d'onde k est défini comme la norme du vecteur d'onde.

Écrire la relation de dispersion et en déduire la condition de stabilité $\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans le cas d'une grille régulière en espace avec $h = \Delta y = h$. Quel est l'ordre du schéma? On

introduit l'angle de la direction de l'onde par rapport à la grille, soit $\theta = \arctan(k_y/k_x)$.
Montrer que sous

$$q(\alpha, G, \theta) = \frac{1}{\alpha\pi G} \arcsin \left(\alpha \sqrt{\sin^2(\pi G \cos \theta) + \sin^2(\pi G \sin \theta)} \right)$$

Tracer les différentes courbes de dispersion en fonction des paramètres θ et α . Pourquoi dit-on que le schéma présente des anisotropies? Quel est le cas le plus favorable? Le plus défavorable? Préciser les analogies et les différences avec le cas à une dimension d'espace.

Eléments de Correction

1 Etude du problème continu

1.1 Notion d'onde plane harmonique

Question 1

Soit $k \in \mathbb{R}$ fixé. On injecte $u(x, t) = \exp i(\omega t - kx)$ dans l'équation (1) et on obtient la condition nécessaire sur la pulsation

$$\omega(k)^2 = (kc)^2$$

qui est appelée relation de dispersion. Le cas $k = 0$ correspond à des solutions affines par rapport à la variable temps (ce ne sont pas des *vraies* ondes) :

$$u(x, t) = u_0(x) + u_1(x) t.$$

Si $k \neq 0$, la relation entre longueur d'onde (spatiale) et période (temporelle) s'écrit

$$\lambda = cT.$$

Pour un nombre d'onde donné non nul, il n'y a que deux ondes planes harmoniques qui peuvent se propager, de vitesse de phase $V = \frac{\omega(k)}{k} = \pm c$. Lorsque $V > 0$ (resp. $V < 0$), l'onde se propage vers les x croissants (resp. décroissants). On fixe un sens de propagation (par exemple vers les x croissants), toutes les ondes planes harmoniques se propagent à même vitesse $V = c$, et c caractérise la vitesse des ondes dans le milieu. Si le milieu est homogène (c constant), par linéarité, le signal n'est pas déformé au cours du temps : si $x_2 > x_1$, $u(x_2, t) = u(x_1, t - \frac{x_2 - x_1}{c})$.

1.2 Cas D -périodicité en espace

Question 2

La condition de D -périodicité s'écrit $u(x + D, t) = u(x, t)$, pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il vient la condition nécessaire sur le nombre d'onde $k = k_L$ avec

$$k_L D = 2\pi L, \quad L \in \mathbb{Z}.$$

Les ondes planes harmoniques solutions de (1) vérifient nécessairement la relation de dispersion précédente, soit

$$\omega(k_L)^2 = (k_L c)^2 \geq 0.$$

On pose $\omega_L = k_L c \in \mathbb{R}$ pour tout $L \in \mathbb{Z}$.

Si $L = 0$, la seule solution de forme (2) est affine et s'écrit sous la forme

$$\hat{u}_0(t) = [\hat{u}_{0,0} + \hat{u}_{1,0} t].$$

Si $L \neq 0$, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 généré par $\exp i(\omega_L t - k_L x)$ et $\exp i(-\omega_L t - k_L x)$, une autre base de solution est

$$\left\{ \cos(\omega_L t) e^{-ik_L x}, \sin(\omega_L t) e^{-ik_L x} \right\}.$$

Toute solution onde plane harmonique de nombre d'onde k_L s'écrit alors

$$\hat{u}_L(x, t) = [\alpha \cos(\omega_L t) + \beta \sin(\omega_L t)] e^{-ik_L x} = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_L t) + \hat{u}_{1,L} \text{sinc}(\omega_L t) t] e^{-ik_L x}$$

en introduisant la fonction sinc dite **sinus cardinal**. Comme par définition $\text{sinc}(0) = 1$, pour tout $L \in \mathbb{Z}$, les ondes planes harmoniques D -périodiques solutions de (1) sont déterminées par deux coefficients complexes $\hat{u}_{0,L}$ et $\hat{u}_{1,L}$ et vérifient :

$$\hat{u}_L(x, t) = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_L t) + \hat{u}_{1,L} \text{sinc}(\omega_L t) t] e^{-ik_L x} \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Les conditions initiales associées sont :

$$\hat{u}_L(x, 0) = \hat{u}_{0,L} e^{-ik_L x}$$

et

$$\frac{\partial \hat{u}_L}{\partial t}(x, 0) = \hat{u}_{1,L} e^{-ik_L x}.$$

Les longueurs d'onde à D fixé sont données par

$$\lambda_L = \frac{D}{L} \quad \forall L \in \mathbb{N}$$

et donc les fréquences spatiales sont les multiples de $1/D$. Donc si D augmente, leur pas est de plus en plus petit et donc on peut décrire un échantillon de fréquence de plus en plus serré. Au contraire quand D diminue, l'écart entre les fréquences spatiales augmente, en particulier la première fréquence non nulle $1/D$ est de plus en plus grande. Quand D tend vers l'infini, on approche le domaine continu, l'effet de la D -périodicité ne se voit plus.

2 Semi-discrétisation en espace de l'équation des ondes 1D par un schéma aux différences finies

Question 3

En notant A_h l'opérateur qui à un vecteur J -périodique $V_h = (V_j)_{1 \leq j \leq J} \in \mathbb{R}^J$ associe un vecteur J -périodique $A_h V_h \in \mathbb{R}^J$ défini par, pour tout $1 \leq j \leq J$,

$$(A_h V_h)_j = -\frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{h^2},$$

on a pour tout $k \in \mathbb{R}$

$$(A_h e^{-ikX_h})_j = -\frac{e^{-ikh} - 2 + e^{ikh}}{h^2} e^{-ikx_j} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) e^{-ikx_j}$$

Les solutions particulières de (4) de la forme $U_h(t) = \exp(i\omega(k)t)e^{-ikX_h}$ vérifient nécessairement d'après l'équation différentielle :

$$-\omega(k)^2 \frac{1}{c^2} U_h(t) + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) U_h(t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$\omega(k)^2 = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \geq 0.$$

On en déduit que nécessairement pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\omega(k) = \pm\omega_h(k), \quad \omega_h(k) = \frac{2c}{h} \sin \frac{kh}{2} = (kc) \operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right).$$

Si $k \neq 0$, on obtient des ondes de vitesse de phase

$$V_h(k) = \pm \frac{\omega_h(k)}{k} = \pm c \operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right).$$

La vitesse de phase dépend de k par l'intermédiaire de $\operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right)$, les ondes de nombres d'onde différents n'ont pas la même vitesse de phase, comme $\operatorname{sinc}X \leq 1$, pour tout $X \in \mathbb{R}$, elles ont un retard de phase égal à

$$(V_h(k) - V)t.$$

Le signal va donc se déformer et cette déformation augmente quand t grandit. Remarquons que comme $\omega_h(k)$ est réel pour tout $k \in \mathbb{R}$ il n'y a ni diminution (diffusion) ni augmentation (instabilité) des ondes planes harmoniques au cours du temps. Le seul effet sur l'erreur provient du retard de phase. Le schéma semi-discrétisé est dispersif numériquement. On démontre facilement que pour tout $X \geq 0$,

$$0 \leq X - \sin X \leq \frac{X^3}{6}$$

et donc pour tout $X \geq 0$

$$0 \leq 1 - \operatorname{sinc}X \leq \frac{X^2}{6}.$$

Par suite pour tout $k \in \mathbb{R}$ et par parité de la fonction $\operatorname{sinc}X$, on a

$$0 \leq \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right) - 1 \right| \leq \frac{k^2 h^2}{24},$$

soit pour tout $k \neq 0$, comme $V(k) = \pm c$, on a l'estimation d'erreur de vitesse de phase

$$|V_h(k) - V| = c \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right) - 1 \right| \leq c \frac{k^2 h^2}{24},$$

qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0. En ajoutant l'hypothèse de D -périodicité, on considère les nombres d'onde $k_L D = 2\pi L$, $L \in Z$. Les ondes planes harmoniques solutions de (4) vérifient nécessairement la relation de dispersion précédente, soit

$$\omega(k_L)^2 = (k_L c)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_L h}{2}\right) \geq 0.$$

On pose $\omega_{L,h} = (k_L c) \operatorname{sinc}(\frac{k_L h}{2}) \in \mathbb{R}$ pour tout $L \in \mathbb{Z}$.

Si $L = 0$, la seule solution J -périodique de forme $U_h(t) = \exp(i\omega_{k_0} t) e^{-i0X_h}$ est affine et s'écrit sous la forme

$$\hat{U}_{h,0}(t) = [\hat{u}_{0,0} + \hat{u}_{1,0} t] e^{-i0X_h}$$

Si $L \neq 0$, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 généré par $\exp i(\omega_{L,h} t - k_L X_h)$ et $\exp i(-\omega_{L,h} t - k_L X_h)$, une autre base de solution est

$$\left\{ \cos(\omega_{L,h} t) e^{-ik_L X_h}, \sin(\omega_{L,h} t) e^{-ik_L X_h} \right\}.$$

Toute solution onde plane harmonique de nombre d'onde k_L s'écrit alors

$$\hat{U}_{h,L}(t) = [\alpha \cos(\omega_{L,h} t) + \beta \sin(\omega_{L,h} t)] e^{-ik_L X_h} = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h} t) + \hat{u}_{1,L} \operatorname{sinc}(\omega_{L,h} t) t] e^{-ik_L X_h}.$$

Par suite, pour tout $L \in \mathbb{Z}$, les ondes planes harmoniques J -périodiques solutions de (4) sont déterminées par deux coefficients complexes $\hat{u}_{0,L}$ et $\hat{u}_{1,L}$ et vérifient :

$$\hat{U}_{h,L}(t) = [\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h} t) + \hat{u}_{1,L} \operatorname{sinc}(\omega_{L,h} t) t] e^{-ik_L X_h} \quad \forall t \geq 0,$$

Les conditions initiales associées sont :

$$\hat{U}_{h,L}(0) = \hat{u}_{0,L} e^{-ik_L X_h}$$

et

$$\frac{d\hat{U}_{h,L}}{dt}(0) = \hat{u}_{1,L} e^{-ik_L X_h}.$$

On déduit de l'estimation précédente que pour tout $L \in \mathbb{Z}$,

$$|\omega_{L,h} - \omega_L| = \omega_L \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{k_L h}{2}\right) \right| \leq |\omega_L| \frac{k_L^2 h^2}{24}$$

ce qui permet d'assurer que le schéma converge et est d'ordre 2 en espace. En fait la démonstration repose aussi sur le fait que $\omega_{L,h}$ est réel et donc que ce sont des fonctions cos et sin qui apparaissent et non pas des fonctions cosh et sinh, il y a un résultat de stabilité sous-jacent. La relation de dispersion s'écrit en utilisant que $D = Jh$:

$$\omega(k_L)^2 = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{k_L h}{2}\right) = \left(\frac{2c}{h}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi L}{J}\right).$$

Or $\sin^2\left(\frac{\pi L}{J}\right)$ est périodique en L de période J , donc les valeurs de $\omega(k_L)^2$ sont en nombre fini égal à J . Les modes de Fourier vont donc se regrouper en un nombre fini d'onde planes harmoniques J -périodiques et on saura pas les distinguer. On se limite donc aux J premiers modes de Fourier d'indice $L \in \mathbb{Z}_J$:

$$\mathbb{Z}_J = \left\{ L \in \mathbb{Z}; -\frac{J}{2} < L \leq \frac{J}{2} \right\}.$$

L représente le nombre de longueurs d'onde contenu dans D et J le nombre de segment contenu dans D , le critère s'exprime donc sous la forme :

$$|L| \leq \frac{J}{2},$$

il s'agit du critère dit de Nyquist, il nous faut au moins 2 points par longueur d'onde pour échantillonner un signal périodique. On pose

$$q_h(G) = \frac{\omega_h}{kc}$$

qui représente le rapport entre la pulsation numérique et la pulsation exacte et

$$G = \frac{kh}{2\pi} = \frac{h}{\lambda}$$

qui représente l'inverse du nombre de points par longueur d'onde. Dans le cas D -périodique, on a $G_L = \frac{L}{J}$, ce qui correspond aux fréquences spatiales $G_L/h = L/D$ (le pas spatial ne dépend que de D) mais la fréquence spatiale maximum est $1/2h$ qui augmente au fur à mesure que l'on raffine la grille. On se limite donc à G égal à $1/2$. La relation de dispersion devient :

$$q_h(G) = \frac{2}{kh} \sin\left(\frac{kh}{2}\right) = \text{sinc}(\pi G).$$

Nous traçons la courbe pour $0 \leq G \leq 10$ pour voir l'allure générale de la fonction sinus cardinal puis pour $0 \leq G \leq 0.5$.

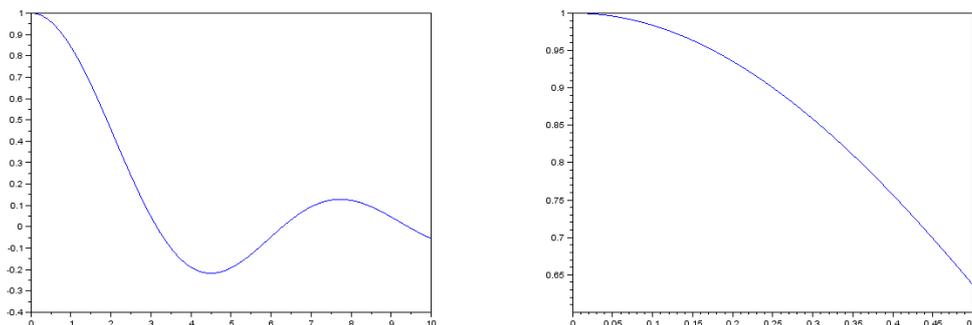


FIGURE 1 – Courbes de dispersion du schéma semi-discrétisé 1D

3 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies en espace et en temps

3.1 Le schéma explicite centré ou schéma saute-mouton

Question 4

La remarque suivante est fondamentale sur le plan pratique (c'est à dire implémentation sur ordinateur), le schéma est totalement explicite, il suffit d'appliquer pas de temps par pas de temps la formule suivante en tout point x_j :

$$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \alpha^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$$

Le nombre sans dimension appelé coefficient CFL

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h},$$

mesure le rapport entre la distance parcourue par l'onde pendant le temps Δt (soit une itération) et la taille de maille en espace h .

3.2 Le schéma de démarrage

Question 5

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur J -périodique $\tilde{U}_h^n \in \mathbb{R}^J$ correspondant à la valeur de la solution exacte aux temps discrets t^n et aux points discrets x_j , $1 \leq j \leq J$, $(\tilde{U}_h^n)_j = \tilde{U}_j^n = u(x_j, t^n)$ et on introduit les erreurs de convergence aux 2 premiers pas de temps :

$$e_h^0 = U_h^0 - \tilde{U}_h^0$$

et

$$e_h^1 = U_h^1 - \tilde{U}_h^1$$

Le choix de U_h^0 nous donne immédiatement e_h^0 . L'erreur de consistance au premier pas de temps est définie par

$$e_h^1 = B e_h^0 - \Delta t \eta_h^1$$

où B est l'opérateur de discrétisation du schéma de démarrage.

- Le premier choix, $U_h^1 = U_{0,h} + \Delta t U_{1,h}$, correspond à $B = I$ et donc on a

$$-\Delta t \eta_h^1 = U_h^1 - \tilde{U}_h^1 - (U_h^0 - \tilde{U}_h^0) = \Delta t U_{1,h} - (\tilde{U}_h^1 - \tilde{U}_h^0)$$

soit pour tout $1 \leq j \leq J$, en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1,

$$\eta_j^1 = \frac{\tilde{U}_j^1 - \tilde{U}_j^0}{\Delta t} - U_{1,j} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, 0) - U_{1,j} + O(\Delta t)$$

et donc $\eta_h^1 = O(\Delta t)$. Le schéma de démarrage n'est que d'ordre 1 en temps.

- Le deuxième choix, $U_h^1 = (I - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} A_h) U_h^0 + \Delta t U_{1,h}$ correspond à $B = I - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} A_h$ et donc

$$-\Delta t \eta_h^1 = U_h^1 - \tilde{U}_h^1 - (I - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} A_h)(U_h^0 - \tilde{U}_h^0) = \Delta t U_{1,h} - \left(\tilde{U}_h^1 - \left[I - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} A_h \right] \tilde{U}_h^0 \right)$$

soit pour tout $1 \leq j \leq J$, en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 en temps,

$$\begin{aligned} \eta_j^1 &= \frac{\tilde{U}_j^1 - \tilde{U}_j^0}{\Delta t} - U_{1,j} + \frac{c^2 \Delta t}{2} [A_h \tilde{U}_h^0]_j = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, 0) + O(\Delta t^2) + \frac{c^2 \Delta t}{2} [A_h \tilde{U}_h^0]_j \\ &= \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 A \right) u \right](x_j, 0) + \frac{c^2 \Delta t}{2} [(A_h \tilde{U}_h^0)_j - (Au)(x_j, 0)](x_j, 0) + O(\Delta t^2) \\ &= 0 + O(\Delta t h^2) + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que l'approximation en espace de l'opérateur A par l'opérateur A_h était consistante d'ordre 2 en espace. Par suite, à $CFL = \alpha$ **constante** reliant comment Δt à h tendent ensemble vers 0, on obtient l'ordre 2 en temps.

3.3 Dispersion numérique

Question 6

La seule modification par rapport au cas semi-discrétisé en temps concerne l'approximation de la dérivée seconde en temps qui est elle aussi centrée, on obtient en injectant les solutions ondes planes harmoniques de forme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_h^n = e^{i(\omega_{h,\Delta t}(k)t^n - kX_h)}$$

la relation de dispersion numérique

$$-\frac{4}{c^2\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$\sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = \alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2}$$

La relation de dispersion précédente contient une information de stabilité. En effet si $\alpha > 1$, alors il existe des solutions $\pm\omega_{h,\Delta t}(k)$ contenant une partie imaginaire non nulle et donc il y a des solutions planes harmoniques du schéma croissant exponentiellement susceptibles de se propager (par exemple pour k tel que $kh/2 = \pi/2$). Nous avons donc la condition nécessaire de stabilité reliant pas de temps et pas d'espace :

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq 1.$$

On se place désormais dans le cas $0 \leq \alpha \leq 1$ et nous pouvons aller plus loin dans l'analyse. Le schéma s'écrit sous la forme d'une équation vectorielle récurrente d'ordre 2 pour $n \geq 1$:

$$U_h^{n+1} - (2I - c^2\Delta t^2 A_h)U_h^n + U_h^{n-1} = 0.$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ un nombre d'onde fixé. Les ondes planes harmoniques associées à k , écrites sous la forme $U_h^n = \hat{u}_h(k)^n e^{-ikX_h}$, $\hat{u}_h(k)^n \in \mathbb{C}$, vérifient l'équation récurrente dans \mathbb{C} , (l'opérateur A_h est diagonal sur les ondes planes),

$$\hat{u}_h^{n+1}(k) - 2 \left(1 - \frac{2c^2\Delta t^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \right) \hat{u}_h^n(k) + \hat{u}_h^{n-1}(k) = 0.$$

Les solutions de cette équation récurrente forment un espace vectoriel \mathcal{E}_k de dimension 2 engendré par deux suites géométriques. En oubliant pour le moment le cas des racines doubles, toute suite \hat{u}^n de \mathcal{E}_k s'écrit :

$$\hat{u}^n(k) = Ar_1(k)^n + Br_2(k)^n$$

où $r_1(k)$ et $r_2(k)$ sont les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 - 2(1 - \delta_h(k))r + 1 = 0, \quad \delta_h(k) = 2\alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Le produit des racines est égal à 1, il y a donc 3 cas possibles, le discriminant est > 0 et le schéma est instable, ou le discriminant est nul (il y a une racine double), nous l'étudierons

ensuite ou le discriminant est < 0 et les solutions sont 2 complexes conjugués de module 1

$$r_1(k) = e^{i\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}, \quad r_2(k) = e^{-i\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}$$

avec $\omega_{h,\Delta t}(k) \in \mathbb{R}$. La somme des racines qui vaut $2 \cos(\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t)$ est alors égale à $2(1 - \delta_h(k))$, soit

$$2(1 - \cos(\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t)) = 4 \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = 2\delta_h(k) = 4\alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2}$$

qui est exactement la relation de dispersion trouvée précédemment. Le discriminant $\Delta(k)$ s'écrit :

$$\Delta(k) = (1 - \delta_h(k)^2) - 1 = \delta_h(k) (\delta_h(k) - 2)$$

Sous la condition CFL $0 \leq \alpha \leq 1$, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta_h(k) = 2\alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2} \leq 2$ et donc si $0 < \delta_h(k) < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{u}^n(k) = A e^{i\omega_{h,\Delta t}(k)n\Delta t} + B e^{-i\omega_{h,\Delta t}(k)n\Delta t}$$

Plaçons nous dans le cas D -périodique et considérons $L \in Z$ et k_L le nombre d'onde associé. On suppose que $0 < \delta_h(k_L) < 2$ et on note $\omega_{L,h,\Delta t} = \omega_{h,\Delta t}(k_L) \neq 0$. On choisit comme base $\left\{ \cos(\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t) e^{-ik_L X_h}, \sin(\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t) e^{-ik_L X_h} \right\}$, toute solution onde plane harmonique de nombre d'onde k_L s'écrit alors

$$\begin{aligned} \hat{U}_{h,L}^n &= \left[\alpha \cos(\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t) + \beta \sin(\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t) \right] e^{-ik_L X_h} \\ &= \left[\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h,\Delta t} t^n) + \beta \sin(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t) \frac{\sin(\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t)}{\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t} \frac{\omega_{L,h,\Delta t} t^n}{\sin(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t)} \right] e^{-ik_L X_h} \\ &= \left[\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h,\Delta t} t^n) + \hat{u}_{1,L} \frac{\sin(\omega_{L,h,\Delta t} n\Delta t)}{n \sin(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t)} t^n \right] e^{-ik_L X_h} \\ &= \left[\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h,\Delta t} t^n) + \hat{u}_{1,L} \text{sinc}_n(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t) t^n \right] e^{-ik_L X_h} \end{aligned}$$

en introduisant la fonction régulière définie sur \mathbb{R} par le prolongement par continuité de $\frac{\sin(nX)}{n \sin X}$.

Les conditions initiales associées sont déterminés par les 2 premiers pas de temps :

$$\hat{U}_{h,L}^0 = \hat{u}_{0,L} e^{-ik_L X_h}$$

et

$$\hat{U}_{h,L}^1 = \left[\hat{u}_{0,L} \cos(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t) + \hat{u}_{1,L} \Delta t \right] e^{-ik_L X_h}$$

soit

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1,L} \Delta t e^{-ik_L X_h} &= \hat{U}_{h,L}^1 - \hat{U}_{h,L}^0 \cos(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t) \\ &= \hat{U}_{h,L}^1 - \hat{U}_{h,L}^0 + \hat{U}_{h,L}^0 (1 - \cos(\omega_{L,h,\Delta t} \Delta t)) \\ &= \hat{U}_{h,L}^1 - \hat{U}_{h,L}^0 + \hat{U}_{h,L}^0 2\alpha^2 \sin^2 \frac{k_L h}{2} \\ &= \hat{U}_{h,L}^1 - \hat{U}_{h,L}^0 + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} (A_h \hat{U}_{h,L}^0) = \Delta t \hat{U}_{1,h} \end{aligned}$$

et donc

$$\hat{U}_{1,h} = \hat{u}_{1,L} e^{-ik_L X_h}$$

Il est à noter que c'est le schéma de démarrage qui permet d'obtenir ce résultat. On suppose $\delta_h(k_L) = 0$. Comme $A_h e^{-ik_L X_h} = \frac{2}{c^2 \Delta t^2} \delta_h(k) e^{-ik_L X_h}$, la relation de récurrence devient

$$U_h^{n+1} - (2I - c^2 \Delta t^2 A_h) U_h^n + U_h^{n-1} = U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1} = 0$$

avec les conditions initiales

$$U_h^0 = U_{0,h}$$

et

$$U_h^1 = U_h^0 + \Delta t U_{1,h}$$

et donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_h^n = \hat{U}_{0,h} + n \Delta t \hat{U}_{1,h}.$$

De même si $\delta_h(k_L) = 2$, la relation de récurrence devient

$$U_h^{n+1} - (2I - c^2 \Delta t^2 A_h) U_h^n + U_h^{n-1} = U_h^{n+1} + 2U_h^n + U_h^{n-1} = 0$$

avec les conditions initiales

$$U_h^0 = U_{0,h}$$

et

$$U_h^1 = -U_h^0 + \Delta t U_{1,h}$$

et donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_h^n = (-1)^n \hat{U}_{0,h} - (-1)^n n \Delta t \hat{U}_{1,h}.$$

La relation établie précédemment reste donc valable pour les cas limites $\omega_{h,\Delta t}(k) \Delta t = 0$ et $\omega_{h,\Delta t}(k) \Delta t = \pi$. Remarquons que sous la condition $L \in Z_J$, on a

$$\delta_h(k_L) = 2\alpha^2 \sin^2 \frac{k_L h}{2} = 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\pi L}{J}$$

égal à 0 pour $\alpha = \Delta t = 0$ qui n'est pas un schéma de différences finies et $L = 0$ et la solution trouvée est exacte et égal à 2 pour $\alpha = 1$ et $L = J/2$. Le schéma reste stable et on notera que l'estimation

$$|\text{sinc}_n(X)| = \left| \frac{\sin(nX)}{X} \right| \leq 1 \forall X \in [0, \pi] \forall n \in \mathbb{N}$$

permet d'assurer la stabilité de la solution et par suite la convergence du schéma.

De la relation de dispersion, on déduit que si $0 < \alpha < 1$ et $k \neq 0$, les pulsations des ondes palnes harmoniques dicrètes associées au nombre d'onde k sont

$$\frac{\omega_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \pm \frac{\arcsin(\alpha \sin(\frac{kh}{2}))}{\alpha \frac{kh}{2}}$$

et donc que $\omega_{h,\Delta t}(k)^2 = k^2 c^2 + O(h^2 + \Delta t^2)$. Le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace (on peut prouver par accoissements finis sur les fonctions cos et sin que l'erreur de convergence est reliée à l'erreur entre $\omega_{h,\Delta t}(k)$ pulsation numérique et kc pulsation exacte.)

En introduisant de même le rapport entre vitesse de phase numérique et vitesse de phase continue, on a

$$q_{h,\Delta t} = \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \pm \frac{2}{c\Delta t k} \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{h} \sin \frac{kh}{2}\right)$$

En introduisant de même $G = \frac{kh}{2\pi}$ qui correspond à l'inverse du nombre de points par longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, nous obtenons :

$$q(\alpha, G) = \frac{1}{\alpha\pi G} \arcsin(\alpha \sin(\pi G))$$

Nous limitons de même la valeur de G à 0.5.

- Quand α est fixé et $h \rightarrow 0$ (et donc Δt aussi), on a

$$q(\alpha, G) = 1 - (1 - \alpha^2)(2\pi G)^2/6 + \dots$$

On retrouve que le schéma converge et est d'ordre 2 (et même d'ordre infini si $\alpha = 1$). En raffinant le maillage, la dispersion diminue.

- Pour α fixé, la fonction $G \rightarrow q(\alpha, G)$ est décroissante. Donc plus on a de points par longueur d'onde plus q est proche de 1. En particulier la dispersion est meilleure sur les basses fréquences que les hautes fréquences. Les ondes numériques vont moins vite que les ondes continues.
- pour G fixé, la fonction $\alpha \rightarrow q(\alpha, G)$ est croissante. Le meilleur schéma est donc obtenu pour le plus grand α possible et limité par la condition CFL. Soit en 1D pour $\alpha = 1$, on a $q(1, G) = 1$ on trouve que le schéma est exact dans ce cas là, toutes les fréquences se propagent à la même vitesse.
- Sous la condition $\alpha \leq 1$, on retrouve la stabilité du schéma puisque les $\omega_{h,\Delta t}(k)$ sont réels quelque soit k . S'il existait des $\omega_{h,\Delta t}(k)$ complexes alors une des deux valeurs solutions aurait une partie imaginaire strictement positive et donc il y a aurait des solutions qui explosent. L'analyse de dispersion est souvent utilisée pour trouver rapidement la condition de stabilité d'un schéma.
- La limite quand $\alpha \rightarrow 0$ correspond à :

$$q(\alpha \rightarrow 0, G) \sim \frac{1}{\alpha\pi G} \alpha \sin(\pi G) = \frac{1}{\pi G} \sin(\pi G) = \text{sinc}(\pi G)$$

qui correspond à l'erreur de dispersion du schéma semi-discrétisé. Et donc la dispersion du schéma semi-discrétisé est moins bonne que celle du schéma totalement discrétisé. Il ne faut donc surtout pas faire tendre Δt vers 0 en laissant h fixé.

Nous pouvons facilement étendre l'analyse de dispersion aux dimensions supérieures. Si on note (k_x, k_y) les directions du vecteur d'onde en 2D, la relation de dispersion s'écrit (dans le cas où les pas d'espace sont identiques) :

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = \frac{4c^2}{h^2} \left(\sin^2 \frac{k_x h}{2} + \sin^2 \frac{k_y h}{2} \right)$$

Le schéma est donc stable sous la condition :

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} \max_{k_x, k_y} \left(\sin^2 \frac{k_x h}{2} + \sin^2 \frac{k_y h}{2} \right) \leq 1$$

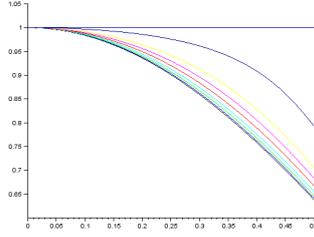


FIGURE 2 – Courbes de dispersion schéma explicite 1D, $\alpha = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

on trouve la condition CFL :

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On introduit l'angle de la direction de l'onde par rapport à la grille, soit $\theta = \arctan(k_y/k_x)$, et $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ le nombre d'onde, la dispersion s'exprime maintenant en fonction de α, G et θ :

$$q(\alpha, G, \theta) = \frac{1}{\alpha\pi G} \arcsin(\alpha(\sin^2(\pi G \cos \theta) + \sin^2(\pi G \sin \theta))^{1/2})$$

Un développement de Taylor montre qu'on approche la vitesse à l'ordre 2 et de façon inférieure pour les fréquences qui nous intéressent. Le fait que q dépende de l'angle θ signifie que le schéma introduit une anisotropie numérique, pour une fréquence donnée, un α fixé, les ondes ne se propagent pas à la même vitesse dans toutes les directions.

Pour $\theta = \pi/4$, on obtient l'expression suivante :

$$q(\alpha, G, \pi/4) = \frac{1}{\alpha\pi G} \arcsin(\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\pi G}{\sqrt{2}})$$

Donc le cas le plus favorable est obtenu pour la valeur de α maximum égale à $\alpha_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$q(\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, G, \pi/4) = 1$$

Le schéma n'est exact que dans les directions diagonales pour la valeur maximum de la CFL. Pour α fixé, on remarque que le schéma est de moins en moins dispersif pour θ variant entre 0 et $\pi/4$. Le cas pire correspond à la propagation dans les directions du maillage. De même on observe que le phénomène de dispersion est accentué quand la CFL diminue. C'est pour cela que les logiciels de calcul travaillent à CFL maximum!!! Les différentes courbes de dispersion pour des valeurs angulaires fixées permettant de voir l'influence de la CFL ainsi que des courbes d'anisotropie représentant pour diverses CFL (paramétrées par $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha_{max}}$) l'influence des paramètres $N = 1/G$ nombre de points par longueur d'onde et θ direction de l'onde.

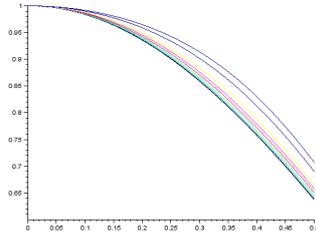


FIGURE 3 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = 0$, $\gamma = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

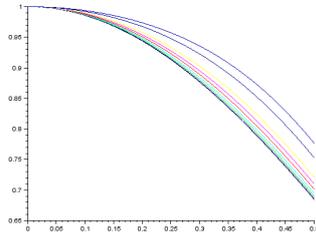


FIGURE 4 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = \pi/12$, $\gamma = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

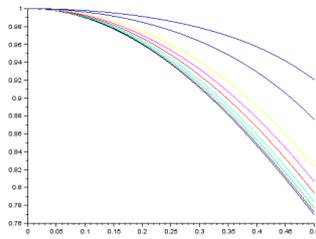


FIGURE 5 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = \pi/6$, $\gamma = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

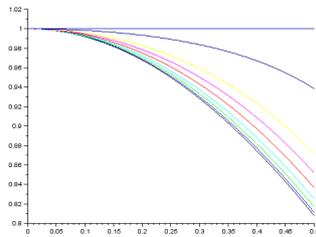


FIGURE 6 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = \pi/4$, $\gamma = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

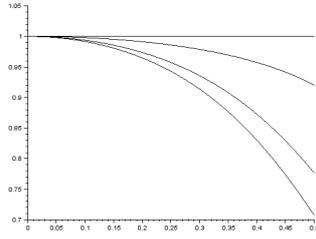


FIGURE 7 – Courbes de dispersion 2D à cfl max, $\theta = 0, 15, 30, 45^\circ$

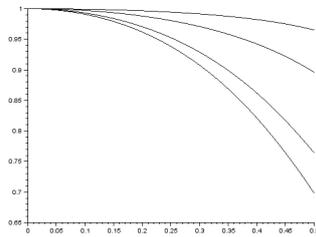


FIGURE 8 – Courbes de dispersion 2D à 0.95 cfl max, $\theta = 0, 15, 30, 45^\circ$

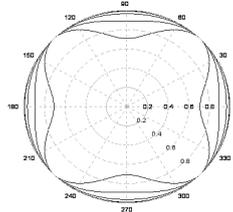


FIGURE 9 – Courbes d'anisotropie à cfl max, $\gamma=1, N = 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100$

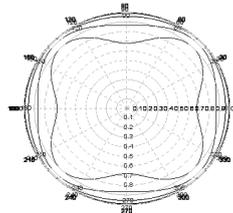


FIGURE 10 – Courbes d'anisotropie à cfl max*0.8, $\gamma=0.8, N = 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100$

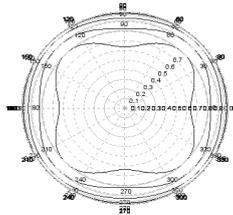


FIGURE 11 – Courbes d’anisotropie du schéma semi-discrétisé, $\gamma=0$, $N = 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100$