Ecole Polytechnique, Promotion X2009
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Contrôle Hors Classement du 12 avril 2011

Sujet proposé par François Alouges

IMPORTANT: Prière d'indiquer votre numéro de groupe de PC sur votre copie.

Problème (14 points). Soit Ω un domaine borné régulier et connexe de $\mathbb{R}^N$, et Ω_1 un sous-domaine borné régulier connexe strictement inclus dans Ω (c'est-à-dire que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$). Dans tout le problème, $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \,,$$

et l'on note $||u||_{H_0^1} = \sqrt{(u,u)}$ la norme associée. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On considère pour tout $\varepsilon > 0$ le problème

$$\begin{aligned} &\text{Trouver} \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \ \text{tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \,. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Montrer que le problème (1) a une unique solution.
En supposant que la restriction à $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ (resp. à Ω_1) de la solution u_ε de (1) est dans $H^2(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ (resp. $H^2(\Omega_1)$) quel problème aux limites vérifie-t-elle sur Ω?
Montrer également que u_ε est l'unique solution du problème de minimisation

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} J_\varepsilon(u) \,,$$

où $J_\varepsilon(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \dfrac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx \,.$

2. Montrer qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de ε telles que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \leq C_1 \text{ et } \int_{\Omega_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \leq C_2 \varepsilon \,.$$

Soit V l'espace défini par

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } u|_{\Omega_1} \text{ est constante}\}\,.$$

On considère également le problème

$$\begin{array}{l} \text{Trouver} \quad u_0 \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx\,. \end{array} \tag{2}$$

3. Montrer que V est un sous espace fermé de $H_0^1(\Omega)$ et en déduire que le problème (2) admet une unique solution.

4. Montrer que

$$\forall v \in V\,, \quad \int_\Omega \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla v\, dx = 0\,, \tag{3}$$

et en déduire que

$$||u_\varepsilon||_{H_0^1} \geq ||u_0||_{H_0^1}\,.$$

5. En utilisant (3), montrer que

$$||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1}^2 = \inf_{v\in V} ||u_\varepsilon - v||_{H_0^1}^2\,,$$

c'est-à-dire que u_0 est la projection sur V de u_ε pour la norme $H_0^1(\Omega)$.

6. On note $V^\perp$ l'orthogonal à V dans $H_0^1(\Omega)$ pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Montrer que si $v \in V^\perp$ est tel que $|v|_V^2 = \displaystyle\int_{\Omega_1} |\nabla v|^2\, dx = 0$ alors $v = 0$. En déduire que $|\cdot|_V$ est une norme sur $V^\perp$.

7. En admettant que $|\cdot|_V$ défini ci-dessus est une norme sur $V^\perp$ équivalente à la norme $H_0^1(\Omega)$, montrer qu'il existe $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} \leq C\sqrt{\epsilon}\,,$$

et en conclure que u_ε converge dans $H^1(\Omega)$ vers u_0 lorsque ε tend vers 0.

Exercice (6 points). On considère l'équation d'advection posée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{array}\right. \tag{4}$$

dans laquelle le signe de la vitesse c n'est pas prescrit. On discrétise (4) par le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\left(\theta \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + (1-\theta)\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}\right) = 0\,,$$

dans lequel Δt et Δx sont les pas de temps temporel et spatial, $\theta \in [0,1]$ est un paramètre qui ne dépend pas de Δt ni de Δx et u_j^n est une approximation de $u(n\Delta t, j\Delta x)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On supposera dans toute la suite que $\lambda = c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ est constant.

1. Etudier la stabilité L^2 de ce schéma.

2. Prouver un résultat de convergence du schéma vers la solution de l'équation d'advection.