Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Capacité d'un ouvert en dimension 3.

sujet proposé par F. Alouges
alouges@cmapx.polytechnique.fr

Le but de ce mini-projet est de comprendre comment résoudre théoriquement et numériquement des problèmes de Laplace à l'extérieur d'un domaine tridimensionnel. On illustrera le concept avec le calcul de la capacité d'un ouvert. On considère un domaine borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, et l'on suppose que $0 \in \Omega$. Dans la suite, on souhaite résoudre le problème de Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \phi = 1 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \phi \text{ "raisonnablement" intégrable en } +\infty. \end{cases}$$

Dans les équations précédentes, le sens de l'intégrabilité à l'infini doit évidemment être précisé.

1. Résolution théorique du problème

Nous commençons par introduire un cadre variationnel adapté à la résolution du problème (1) puis étudions sa résolution numérique par la méthode des éléments finis.

1.1 Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact. Montrer que

$$(2) \qquad \int_0^{+\infty} \phi(r)^2\,dr \le 4\int_0^{+\infty} r^2(\phi'(r))^2\,dr.$$

On pourra utiliser pour cela une intégration par parties en écrivant $\phi(r)^2 = 1\times\phi(r)^2$.

1.2 Montrer que pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, on a

$$(3) \qquad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2}\,dx \le 4\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} |\nabla\phi(x)|^2\,dx.$$

Attention, la fonction ϕ n'est pas supposée s'annuler sur $\partial\Omega$, mais seulement au delà d'une boule $B(0,R)$ suffisamment grande. On pourra passer en coordonnées sphériques et utiliser l'estimation de la question précédente.

1.3 On pose

$$(4) \qquad W = \left\{\phi \text{ tel que } \frac{\phi}{|x|} \in L^2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) \text{ et } \nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)\right\}$$

muni du produit scalaire

$$(5) \qquad (\phi,\psi)_W = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \frac{\phi(x)\psi(x)}{|x|^2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \nabla\phi(x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx.$$

Montrer que W est un espace de Hilbert. Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ est dense dans W. On définit aussi W_0 comme la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ dans W. Noter que les fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ s'annulent sur $\partial\Omega$.

1.4 En utilisant les questions précédentes montrer que W muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x)\, dx \tag{6}$$

est aussi un espace de Hilbert. On montrera que les normes sous-jacentes $||\cdot||_W$ et $||\cdot||_{\dot{H}^1}$ sont équivalentes.

1.5 Montrer que $W \neq H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$.

1.6 On pose maintenant W_1 l'espace affine

$$W_1 = \{\phi \in W \text{ tel que } \phi|_{\partial\Omega} = 1\}\ .$$

Montrer que la formulation variationnelle du problème (1) est

$$\text{Trouver } \phi \in W_1, \text{ tel que } \forall\psi \in W_0, \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla\phi \cdot \nabla\psi\, dx = 0\,. \tag{7}$$

Montrer également que cette formulation variationnelle a une solution unique qui est aussi la solution du problème de minimisation

$$\min_{\phi \in W_1} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\,.$$

Dans la suite on notera $C(\Omega)$ la valeur de ce minimum qui s'appelle la **capacité** de l'ouvert Ω.

1.7 Montrer que

$$C(\lambda\Omega) = \lambda C(\Omega)\,.$$

---

2. Troncature spatiale

Pour résoudre le problème numériquement, on cherche d'abord à le rendre de taille finie, afin de le discrétiser. On approche donc le problème posé sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ tout entier par un problème posé sur une boîte B englobant Ω suffisamment grande (voir Fig. 1). On rajoute alors la condition au bord de la boîte

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial B \tag{8}$$

où n est la normale extérieure à ∂B. On cherche donc à résoudre

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ dans } B \setminus \Omega, \\ \phi = 1 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial B. \end{cases} \tag{9}$$

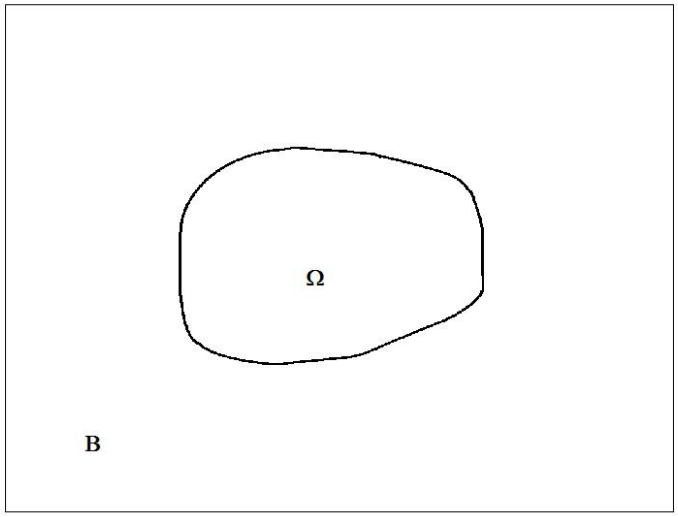

FIGURE 1. Le problème posé dans une boîte englobante

2.1 Donner la formulation variationnelle du problème (9). Montrer que cette formulation variationnelle possède une unique solution.

2.2 On considère un maillage de B par des triangles de telle sorte que ce maillage respecte la frontière de Ω (supposée polyédrique), et une approximation du problème par des éléments finis $\mathbb{P}_1$. On note V_h l'espace des fonctions de $H^1(B)$, linéaires sur chaque triangle du maillage, et continues sur B. Ecrire la formulation variationnelle discrète associée au problème continu de la question **2.1**. Montrer que celle-ci admet une unique solution.

---

3. Approximation numérique

3.1 Dans la suite nous allons effectuer des calculs numériques en utilisant le logiciel FREEFEM++. Afin de simplifier l'étude, on supposera que les domaines considérés sont tous à symétrie cylindrique d'axe vertical Oz et on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z), où les coordonnées cartésiennes sont données par

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\,, \\ y = r\sin(\theta)\,, \\ z = z\,. \end{cases}$$

Montrer que la solution ϕ du problème (7) ne dépend pas de θ. Réécrire la formulation variationnelle en fonction d'un intégration en (r, z) uniquement.

3.2 Prendre pour boite englobante un cylindre centré en 0

$$B = \{(r, \theta, z) \text{ tel que } r \in]0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [-R, R]\}$$

où R est choisi assez grand pour que $\Omega \subset B$ et réécrire de même la formulation variationnelle tronquée dans la boîte B.

3.3 Ecrire un programme FREEFEM++ qui résout le problème de façon bidimensionnelle en (r, z) uniquement, et calculer la capacité approchée, en prenant pour Ω des ellipsoïdes de révolution de demi grand axe vertical 1 et de demi grand axe horizontal r_0 pour $\frac{1}{2} \leq r_0 \leq 2$. On prendra pour la boîte englobante $R = 5$, et on détaillera la condition (au bord) que l'on imposera sur l'axe de révolution.

3.4 Tracer les isovaleurs de la solution du problème obtenue dans les cas $r_0 = \frac{1}{2}, 1, 2$

3.5 Tracer une courbe en fonction de r_0 de la quantité

$$\frac{C(\Omega)}{Vol(\Omega)^{\frac{1}{3}}}$$

où $Vol(\Omega)$ est le volume de l'ellipsoïde Ω. Conclure.