Ecole Polytechnique
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Mini-projet

Contact unilatéral pour des structures élastiques

Proposé par Bertrand Maury
Bertrand.Maury@math.u-psud.fr

Ce projet traite de la prise en compte de contrainte d'obstacle (non pénétration) en élasticité: il s'agit de chercher la forme d'équilibre d'un système mécanique en présence d'obstacles (ici des murs droits), ce qui conduit à des contraintes unilatérales. La première partie traite d'un système discret : on considère un système de type masses-ressorts, soumis à la gravité et assujetti à demeurer au dessus d'une paroi horizontale (logiciel Scilab, Matlab, ou Python). La seconde partie est basée sur les équations de l'élasticité linéaire (modèle de type équation au dérivées partielles, logiciel Freefem++)

Partie 0 : Préliminaires théoriques

On se place sur l'espace $V = \mathbb{R}^n$, A est une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle

$$v \in V \longmapsto J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v),$$

sur un ensemble K défini par une collection de contraintes d'inégalité affines:

$$K = \{v \in V\ ,\ Bv \leq z\}\ ,$$

où $B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est la matrice dont chaque ligne exprime une contrainte. La notation $\mu \leq z$ pour des vecteurs signifie que l'on a l'inégalité correspondante composante par composante.

1) Montrer que ce problème a une solution unique.

2) Ecrire la formulation point-selle associée, et montrer l'existence d'un point-selle $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Montrer que ce point-selle du Lagrangien est solution de

$$\begin{aligned} Au + B^\star\lambda \quad &= \quad b \\ Bu \quad &\leq z \\ \lambda \quad &\geq \quad 0 \\ (Bu - z, \lambda) \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

Que peut-on dire concernant l'unicité de λ ?

3) Écrire l'algorithme d'Uzawa permettant d'approcher la solution du système ci-dessus, en précisant la condition suffisante sur le paramètre ρ de convergence de l'algorithme.

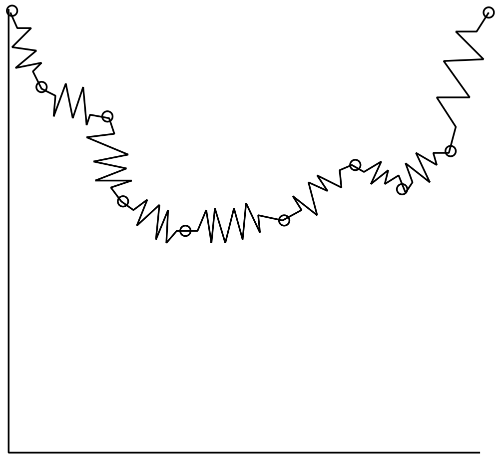

Figure 1: Système masses-ressorts

Partie A : Modèle discret

On considère une collection de N+2 masses (même masse m), dont on note

$$(x_0, y_0)\,,\ (x_1, y_1)\,,\ \ldots, (x_{N+1}, y_{N+1})$$

les positions (voir figure 1). On suppose que chaque masse i est reliée à la masse $i+1$ par un ressort de raideur k et de longueur au repos nulle, de telle sorte que l'énergie élastique associée est

$$\frac{k}{2}\left((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2\right).$$

L'energie potentielle de chaque masse est mgy_i.

On suppose que les masses extrêmes sont attachées en $(0,1)$ et $(1,1)$, respectivement, de telle sorte que le vecteur des degrés de libertés peut s'écrire

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Pour éviter une trop forte dépendance des résultats au nombre N, on choisira systématiquement, dans la suite, des valeurs de la raideur k et de la masse m sous la forme

$$k = k_0 \times N\,,\ m = \frac{m_0}{N}.$$

1) Écrire l'énergie totale $E(z)$ du système (énergie élastique + énergie potentielle), et montrer qu'elle peut s'écrire

$$E(u) = \frac{k}{2}\,(Az, z) - (b, z).$$

On précisera les expressions de la matrice A et du vecteur b.

2) Montrer que cette énergie admet un minimiseur unique sur $\mathbb{R}^{2N}$, et écrire le système d'équations qui le caractérise.

3) Écrire un programme qui permette de calculer numériquement ce minimiseur. On s'attachera à exploiter le caractère creux de la matrice A, en évitant de la construire comme matrice pleine.

4) Calculer numériquement le minimiseur pour diverses valeurs de N (entre 10 et 100, pour fixer les idées), et représenter graphiquement les résultats en représentant la chainette formée par les masses. On

choisira les paramètres m_0 et k_0 de façon à ce que certaines masses se retrouvent sous l'axe des x (par exemple avec une ordonnée minimale entre -1 et 0.

On suppose maintenant la présence d'un "plancher" au niveau de l'axe des x, de telle sorte que l'on cherche à minimiser maintenant la fonctionnelle sous les contraintes:

$$y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N-1.$$

5) Montrer que ce problème rentre dans le cadre général présenté au début (on précisera notamment la matrice B).

6) Programmer l'algorithme d'Uzawa qui permet la résolution numérique de ce problème, et illustrer son comportement sur des exemples. On s'attachera en particulier à estimer la borne supérieure en ρ qui assure la convergence de l'algorithme, et à vérifier que les valeurs de ρ qui vérifient cette condition assurent le bon fonctionnement de l'algorithme.

7) (Question plus ouverte) Proposer des contraintes différentes qui peuvent se traiter de la même manière, et illustrer le comportement de l'approche sur ces situations. On pourra considérer par exemple le cas d'un "plancher" non horizontal, le cas de plusieurs zones (demi-plans) interdites.

Partie B :

On s'intéresse maintenant à l'application de cette stratégie au cas de l'élasticité linéaire. On considère la situation représentée par la figure 2: le domaine occupé par la matériau élastique au repos est un anneau qui entoure un coeur rigide dont on prévoit de prescrire le déplacement (vertical, vers le bas) relativement à une position fixe. Sa frontière est donc constituée par deux composantes: le bord extérieur Γ, libre (qui sera partiellement en contact avec l'obstacle horizontal), et le bord intérieur, correspondant au coeur rigide, au niveau duquel le déplacement est imposé.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{U} & \text{sur } \gamma \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & = & 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, \mathrm{Id}$, où λ et μ sont les paramètres de Lamé du matériau.

Le problème ci-dessus, sans forçage extérieur ni obstacle, admet de façon évidente comme unique solution le déplacement uniformément égal à $\mathbf{U}$.

L'espace dans lequel on cherche le champ de déplacement est l'espace affine

$$V_{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \, , \; \mathbf{v}_{|\gamma} = \mathbf{U} \right\}$$

et la formulation variationnelle de ce problème consiste à trouver $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{U}}$ tel que

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \mu(\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{v} + {}^t\nabla \mathbf{v}) + \int_\Omega \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0,$$

où V_0 est l'espace vectoriel sous-jacent à V_1.

On considère maintenant la présence d'un support horizontal (axe des x), au travers duquel le matériau élastique ne peut pas pénétrer. On considèrera une situation telle que le domaine Ω (qui correspond à la forme d'équilibre du matériau, pour un déplacement nul) soit tangent au support. On considèrera

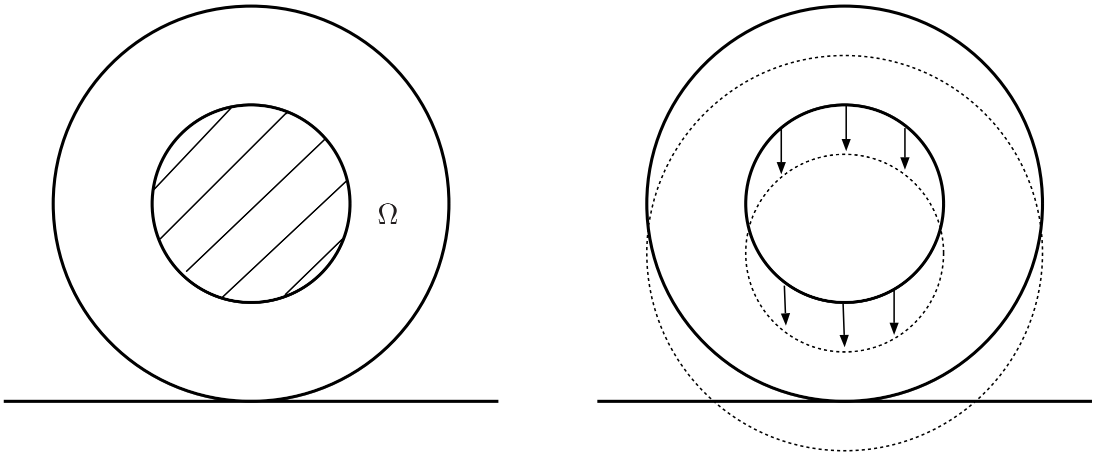

Figure 2: Élasticité linéaire

un déplacement $\mathbf{U}$ imposé vertical et dirigé vers le bas ($\mathbf{U} = -U\mathbf{e}_y$, avec $U > 0$), de façon à ce que la translation uniforme conduise à une violation de la contrainte.

Considérons un champ de dépassement $\mathbf{u}$ définit sur Ω. La nouvelle position d'un point sur la frontière extérieure, de coordonnées x et y, s'écrit $(x, y) + \mathbf{u}$. La contrainte de ne pas traverser le support horizontal s'écrit donc

$$-y - u_y \leq 0,$$

où u_y représente la composante verticale du déplacement, et y est l'altitude du point courant.

On se propose d'étendre à cette situation la démarche de point-selle présentée initialement dans le cas euclidien[1].

Pour éviter la confusion avec le second coefficient de Lamé, on notera p le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte, et q la fonction test associée. Le problème de point-selle que l'on cherche à résoudre s'écrit donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) : (\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}) + \int_\Omega \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \int_\Gamma p u_y &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0,\\
\int_\Gamma q(-u_y - y) &\leq 0 \quad \forall q \in \Lambda^+\\
p &\geq 0\\
\int_\Gamma p(-uy - y) &= 0
\end{aligned}$$

où Λ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Gamma)$, et

$$\Lambda^+ = \left\{\ q \in L^2(\Gamma)\,,\ q \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\right\}$$

L'algorithme d'Uzawa consiste donc à se donner $\rho > 0$, $p^0 \in \Lambda^+$ (on pourra prendre $p^0 \equiv 0$), puis à construire $p^1, \ldots, p^k$ récursivement selon le procédé suivant:

p^k étant connu, on calcule $\mathbf{u}^k$ solution de

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\nabla\mathbf{u}^k + {}^t\nabla\mathbf{u}^k) : (\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}) + \int_\Omega \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}^k)(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \int_\Gamma p^k u_y^k = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0,$$

[1] Le fait que l'on soit en dimension infinie est de nature à compliquer significativement l'étude théorique de la formulation point-selle. On se contentera ici d'appliquer l'approche et de la discrétiser, sans se préoccuper du caractère bien posé de la formulation au niveau continu.

avec $\mathbf{u}^k = \mathbf{U}$ sur la frontière intérieure γ.

Puis on met à jour le multiplicateur de Lagrange

$$p^{k+1} = \Pi^+ \left(p^k + \rho(-u_y^k - y) \right)$$

où Π^+ est la projection L^2 sur les fonctions positives (cela consiste simplement à prendre la partie positive de la fonction, c'est à dire le `max` de 0 et de la valeur courante).

1) Écrire un code `Freefem++` permettant de résoudre numériquement ce problème.

N.B. : on pourra prendre les deux disques centrés au point $(0, 1)$, avec un rayon 0.3 pour le cercle intérieur, et un déplacement imposé vers le bas de 0.2. On pourra représenter le résultat en construisant le maillage déformé par le champ de déplacement calculé, à l'aide de la commande `movemesh(Th,[x+ux,y+uy])`.

On notera par ailleurs qu'il n'est pas nécessaire de faire vivre le champ de pression p sur le bord, mais qu'on peut le définir comme un champ par exemple affine par morceaux sur l'ensemble du domaine, en prenant garde que seule sa trace sur Γ doit intervenir dans la formulation variationnelle permettant de calculer le champ de déplacement associé.

2) La force exercée par le support sur le matériau est $p\mathbf{e}_y$, où p est la pression calculée par résolution du problème de point-selle. La résultante verticale est donc l'intégrale de p sur Γ. A l'aide de calculs pour différentes valeurs du déplacement vertical (entre 0 et 0.5), tracer la courbe qui exprime la dépendance de la force verticale vis-à-vis du déplacement vertical.

Commenter la non-linéarité de cette dépendance.

3) Appliquer la démarche au cas d'un "demi-obstacle", c'est à dire que la contrainte sur l'ordonnée ne s'applique qu'aux points dont l'abscisse est positive.

Développements (questions subsidiaires).

1) Préciser ce qui, pour le problème d'élasticité en continu (donc de dimension infinie), exclut l'utilisation directe de théorèmes du cours sur l'existence d'un multiplicateur de Lagrange pour la formulation point-selle du problème sous contrainte.

2) Pour des valeurs extrêmes du déplacement (par exemple pour 0.65), il peut se produire que le maillage déformé présente des triangles retournés (`Freefem++` produit alors un message d'erreur). Commenter cette situation: s'agit-il d'un problème essentiellement numérique, d'une limite de la modélisation du matériau par un modèle linéaire, et/ ou d'une limite de la formulation du problème de contrainte sous forme de point-selle ?

3) ($\star$) Étudier numériquement la convergence des $\mathbf{u}^k$ vers la solution limite $\mathbf{u}$. Vérifier en particulier que cette convergence ne dégénère pas lorsque le pas du maillage tend vers 0. Si l'on applique un algorithme de gradient à pas fixe (ce qu'est en fait l'algorithme d'Uzawa) sur la matrice du Laplacien discret, on peut vérifier que le convergence est de plus en plus lente lorsque l'on augmente la taille de la matrice. Comment expliquer cette différence de comportement ?

4) ($\star$) Cette question concerne le système masses-ressorts de la partie A: proposer une stratégie permettant de traiter le cas d'une contrainte non-affine. On suppose par exemple que la zone de l'espace dans laquelle les masses peuvent être est l'épigraphe d'une fonction φ. La contrainte pour une masse en (x_i, y_i) s'écrit alors $y_i \geq \varphi(x_i)$.