Mini-Projet d'analyse numérique du cours MAP 431 : homogénéisation de l'équation de la chaleur

Sujet proposé par Antoine Hocquet : *antoine.hocquet@cmap.polytechnique.fr*

L'équation de la chaleur dans un carré $D = [0,1]^2$ de conductivité thermique inhomogène $A(x)$, avec conditions nulles au bord, s'écrit

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f\,, & \text{dans } D \\ u_{|\partial D} = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

où u est l'inconnue , f est la source. Si l'on suppose de plus que A est D-périodique i.e. $A(x \pm (1,0)) = A(x)$ et $A(x \pm (0,1)) = A(x)$, alors on peut "dézoomer" (1) en prenant un paramêtre $\epsilon > 0$ petit et en considérant le nouveau problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,\left(A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u^\epsilon\right) = f\,, & \text{dans } D \\ u_{|\partial D} = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Si u^ϵ converge vers une fonction u, il semble que u^* soit solution d'une équation du type (1), mais la question intéressante est de savoir quelle sera la conductivité A^* de l'équation limite.

Notation. Étant donnée une fonction v, on notera $< v >$ la valeur moyenne de v i.e.

$$< v >= \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x\,.$$

On notera, pour $\epsilon > 0$, $a_\epsilon = a(\frac{\cdot}{\epsilon})$.

1 Préliminaires

1. Montrer que pour toute fonction périodique $a \in L^\infty([0,1])$, on a convergence faible de a_ϵ vers sa moyenne, dans le sens suivant : pour toute $v \in L^1([0,1])$:

$$\int_0^1 a(\frac{x}{\epsilon})v(x)\mathrm{d}x \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 < a > v(x)\mathrm{d}x\,.$$

   On pourra commencer par prouver ce résulat sur des fonctions v constantes par morceaux.

2. Trouver un contre-exemple montrant que la limite faible d'un produit de fonctions n'est en général pas le produit des limites faibles. On définit la convergence faible d'une suite de fonctions (f_n) dans L^p, $1 \leq p \leq \infty$, par :

$$f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow \forall g \in L^{p'}, \int f_n g \to \int f g$$

où p' est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (il s'agit en réalité de la convergence faible*...).

2 Etude numérique de la dimension 1

Soit une application $a \in L^2([0,1])$ périodique telle qu'il existe deux constantes $0 < m \leq M < \infty$ vérifiant pour presque tout x :

$$m \leq a(x) \leq M\,.$$

Soit également f dans $L^2([0,1])$. Le problème en dimension 1 s'écrit pour $\epsilon > 0$:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_\epsilon \frac{\mathrm{d}u^\epsilon}{\mathrm{d}x}\right) = f \text{ sur } [0,1]\,, \quad u^\epsilon(0) = u^\epsilon(1) = 0\,. \tag{3}$$

1. Donner une formulation variationnelle du problème. Prouver l'existence et l'unicité de la solution u^ϵ.
2. Montrer que la solution u^ϵ est l'unique minimiseur dans $H_0^1([0,1])$ de la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}^\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 a_\epsilon(x)\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|^2 - \int_0^1 fv$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}$, et soit $\Delta x = \dfrac{1}{N+1}$. Considérons l'approximation aux différences finies :

$$\frac{-a_\epsilon((j+1)\Delta x)u^\epsilon_{j+1} + [a_\epsilon((j+1)\Delta x) + a_\epsilon((j-1)\Delta x)]u^\epsilon_j - a_\epsilon((j-1)\Delta x)u^\epsilon_{j-1}}{(\Delta x)^2} = f(j\Delta x) \tag{4}$$

pour $j = 1, \ldots, N$, avec les conditions au bord

$$u_0^\epsilon = u_{N+1}^\epsilon = 0\,.$$

Montrer que l'on obtient un système matriciel du type

$$A^\epsilon U^\epsilon = F\,.$$

Comment les conditions au bord sont-elles prises en compte ?

4. Sous Scilab, écrire un programme

   ```
   u = chaleur(eps,N)
   ```

   résolvant le système précédent en fonction de N et de la variable ϵ. On utilisera comme données :

   $$f = 1$$

   et

   $$a(x) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1\,. \end{cases}$$

   Tracer sur un graphe les solutions obtenues pour $\epsilon = 1/10, 1/100$. Que se passe-t-il si $\epsilon > \Delta x$?

5. On pose désormais $\Delta x = \epsilon^2$. En utilisant les mêmes données que précédemment, notons $\tilde{u}$ et u^* les solutions respectives de

   $$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(< a > \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\right) = f\,,$$

   et

   $$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{< \frac{1}{a} >}\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right) = f\,.$$

   Déterminer numériquement les valeurs approchées de $\|\tilde{u} - u^\epsilon\|_{L^2}$ et $\|u^* - u^\epsilon\|_{L^2}$. On pourra tracer les erreurs sur un graphe quand $\epsilon \to 0$. Que constate-t-on ?

3 Analyse asymptotique en dimension 1

Comme le suggère la section précédente, la conductivité de l'équation limite n'est pas la limite faible de la conductivité, soit la valeur moyenne de a, mais plutôt la moyenne harmonique de a. Nous allons le démontrer dans cette section.

1. Montrer que la famille $(u^\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ est bornée dans $H_0^1([0,1])$, uniformément par rapport à ϵ.
2. Montrer en utilisant un résulat de compacité qu'il existe $u^* \in H_0^1([0,1])$, telle qu'à extraction près, $u^\epsilon \to u$ fortement dans L^2 et $\dfrac{\mathrm{d}u^\epsilon}{\mathrm{d}x} \rightharpoonup u^*$ faiblement dans L^2.
3. Montrer que $a_\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup < a > u^*$ dans $L^2([0,1])$ faible.
4. Montrer qu'il existe une suite de réels c_ϵ bornée telle que l'on ait :

   $$-a_\epsilon(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^\epsilon = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x + c_\epsilon\,.$$

5. Montrer que la limite u^* est solution de l'équation
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{<\frac{1}{a}>}\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right) = f\,.$$
6. Montrer que la moyenne harmonique $\frac{1}{<\frac{1}{a}>}$ est égale à la moyenne $< a >$ si et seulement si a est constante presque partout.

4 Cas de la dimension 2

On étudie ici le cas d'un matériau laminé, c'est à dire un matériau dont la conductivité ne présente une hétérogénéité que dans une certaine direction x_1. Cela signifie que $A(x_1, x_2)$ ne dépend en réalité que de la variable x_1. On étudie alors le problème suivant :
$$-\mathrm{div}\left(\begin{pmatrix} a_\epsilon(x_1) & 0 \\ 0 & a_\epsilon(x_1)\end{pmatrix}\nabla u^\epsilon(x_1, x_2)\right) = f \quad \text{dans } D\,, \tag{5}$$
avec conditions au bord de type Dirichlet homogène, où a, a_ϵ sont définies comme précédemment. La fonction f est toujours dans $L^2(D)$.

1. Écrire le problème variationnel correspondant à (5). Montrer l'existence et l'unicité de la solution u^ϵ.
2. En prenant les données :
$$f = 1$$
et
$$a(x_1) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 \le x_1 \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x_1 \le 1\,. \end{cases}$$
Sous Freefem++, écrire un script pour résoudre le problème (5) avec des éléments finis de type P_1. Tester ce script avec différentes valeurs de ϵ.
3. Comparer u^ϵ avec u^* l'unique solution du problème (avec conditions de Dirichlet homogènes) :
$$-\mathrm{div}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{<\frac{1}{a}>} & 0 \\ 0 & < a >\end{pmatrix}\nabla u^*(x_1, x_2)\right) = f \quad \text{dans } D\,. \tag{6}$$
4. Justifier, en reprenant les arguments utilisés pour la dimension 1, que u^ϵ converge à sous-suite près vers une fonction $\bar{u}$ dans $L^2(D)$ fort. On peut montrer, comme dans le cas de la dimension 1, que
$$a_\epsilon \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{1}{<\frac{1}{a}>}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \quad \text{dans } L^2(D) \text{ faible.}$$
Trouver des fonctions v^ϵ et v telles que $a_\epsilon \dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x_2} = \dfrac{\partial v^\epsilon}{\partial x_2}$ et $v^\epsilon \rightharpoonup v$. En conclure que $\bar{u}$ est égal à u^*, la solution de (6).

5. Comparer u^ϵ et u^* dans le cas où $\epsilon = 1/100$, avec les valeurs $\Delta x = 1/100$ et $\Delta x = 1/500$. Qu'observe-t-on ?