

# ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique

G. ALLAIRE

28 Janvier 2014

## CHAPITRE I

- ➡ Analyse numérique: amphis 1 à 12. Optimisation: amphis 13 à 18.
- ➡ 6 premiers amphis: Grégoire ALLAIRE. 6 amphis suivants: François ALOUGES. 6 derniers amphis: Pierre-Louis LIONS.
- ➡ Site web du cours:  
[http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours\\_X\\_annee2.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee2.html)
- ➡ Mes coordonnées: [gregoire.allaire@polytechnique.fr](mailto:gregoire.allaire@polytechnique.fr)

# Introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique

## Les trois étapes des mathématiques appliquées:

- ➔ Modélisation.
- ➔ Analyse du modèle.
- ➔ Simulation numérique.

## Domaines d'applications innombrables ! Quelques exemples:

- ➔ Sciences de l'ingénieur: aérodynamique, calcul des structures, électromagnétisme, énergie, automatique, signal, finance...
- ➔ Autres sciences: physique, optique, chimie, biologie, économie...
- ➔ Enjeux sociétaux: climat, environnement...

Dans ce cours: modèles déterministes.

## Objectif final du cours

Acquérir les outils mathématiques pour comprendre et interpréter (sinon réaliser) des simulations numériques. *A quoi ça sert ?*

- ⇒ **Prévisions:** météo, environnement, sureté...
- ⇒ **Conception:** soufflerie numérique pour l'aérodynamique, optimisation...
- ⇒ **Expérimentation:** validation d'un modèle, vérification d'une théorie...

## Avertissement

**Attention aux belles images sans signification !**

CFD = computational fluid dynamics

CFD  $\neq$  color fluid dynamics !

**Ne jamais oublier de valider un calcul !**

## Buts de cette leçon

- ⇒ Expliquer brièvement ce qu'est la modélisation.
- ⇒ Introduire la méthode des différences finies.
- ⇒ Présenter quelques idées de base du calcul numérique.
- ⇒ Montrer que les aspects théoriques et pratiques forment un tout !
- ⇒ Montrer l'utilité des mathématiques appliquées !
- ⇒ Présenter un exemple actuel de recherche montrant les liens entre analyse numérique et optimisation et des applications industrielles.

**Remarque:** on reste assez formel dans l'analyse (voir les prochaines leçons pour un formalisme plus rigoureux).

## Exemple de modélisation

### Convection et diffusion de la chaleur.

**Notations.** Inconnue  $\equiv$  température  $\theta(t, x)$ .

$\Rightarrow$  Variables de temps  $t \in \mathbb{R}^+$  et d'espace  $x \in \mathbb{R}^N$ .

$\Rightarrow$  Dérivée partielle en temps:  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$\Rightarrow$  Gradient en espace:  $\nabla \theta = \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial x_N} \right)^T$

$\Rightarrow$  Divergence d'un vecteur  $q = (q_1, \dots, q_N)^T$ :  $\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$

$\Rightarrow$  Laplacien:  $\Delta \theta = \operatorname{div}(\nabla \theta) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2}$

## Conservation (ou bilan) de l'énergie

**Grandeurs physiques:** température  $\theta$ , flux de chaleur  $q$  (un vecteur), sources thermiques  $f$ , chaleur spécifique  $c > 0$  (une constante).

**Bilan dans un volume élémentaire  $V$**  (indépendant du temps):

Variation en temps = sources + pertes ou entrées à travers les parois

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V c \theta dx \right) = \int_V f dx - \int_{\partial V} q \cdot n ds.$$

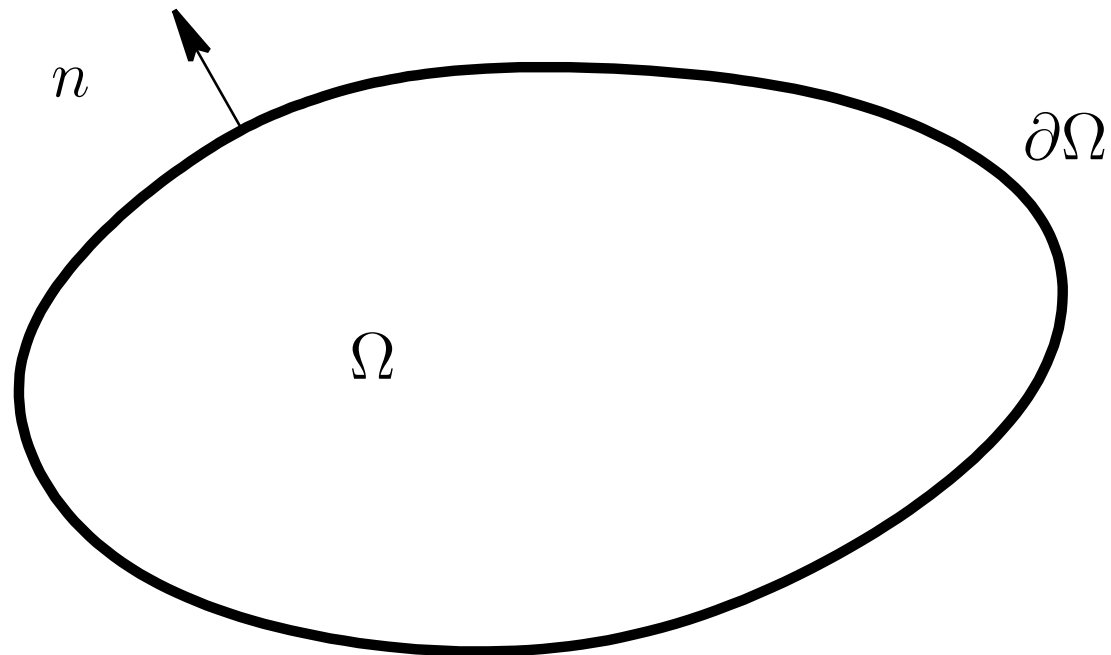
Par application du théorème de Gauss on obtient

$$\int_{\partial V} q \cdot n ds = \int_V \operatorname{div} q dx.$$

On permute la dérivée en temps et l'intégrale sur  $V$ . Comme le volume  $V$  est quelconque, on en déduit

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} q = f$$

## Normale unité d'un ouvert



**Convention:** normale extérieure !

Normale unité:  $\|n\| = 1$ .

## Loi constitutive (dite de Fourier ou de Fick)

**Grandeurs physiques:** vitesse convective  $V$ , conductivité thermique  $k > 0$ .

$$q(t, x) = cV\theta(t, x) - k\nabla\theta(t, x)$$

Relation linéaire entre le flux à travers une surface et la **convection** suivant la vitesse plus la **diffusion** suivant l'opposé du gradient thermique.

### Relations supplémentaires:

**Condition initiale:**  $\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$ .

**Conditions aux limites:**

☞ Dirichlet:  $\theta = 0$  sur le bord (**thermostat**).

☞ Neumann:  $q \cdot n = 0$  (**adiabatique**).



## Modèle de convection-diffusion

On trouve une **équation aux dérivées partielles**:

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + c V \cdot \nabla \theta - k \Delta \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

- ⇒ **Données:**  $c, V, k, f(t, x), \theta_0(x)$ , et  $\Omega$ .
- ⇒ **Inconnue:**  $\theta(t, x)$ .
- ⇒ Modèle issu d'une loi de conservation et d'une loi constitutive.
- ⇒ Modèle simplifié dont l'analyse montrera les limites !

## Modélisation (encore !)

Balance entre le terme de convection et le terme de diffusion mesurée par une grandeur sans dimension, le **nombre de Péclet**

$$\text{Pe} = \frac{cVL}{k},$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du problème (par exemple le diamètre du domaine  $\Omega$ ).

### Simplifications possibles du modèle:

$\text{Pe} \ll 1 \Rightarrow$  équation de la chaleur

$\text{Pe} \gg 1 \Rightarrow$  équation d'advection

On a donc **trois modèles** parmi lesquels il faut savoir choisir.

## Modèles simplifiés

Equation de la chaleur ( $Pe = 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equation d'advection ( $Pe = +\infty$ )

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + c V \cdot \nabla \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \{x \in \partial \Omega \text{ tel que } V \cdot n(x) < 0\} \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

## Solutions explicites

**Hypothèses:** dimension  $N = 1$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$  (pas de conditions aux limites), source  $f = 0$ . On pose  $\nu = k/c$ . **Faites le calcul pour vérifier !**

Equation de convection-diffusion:

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy.$$

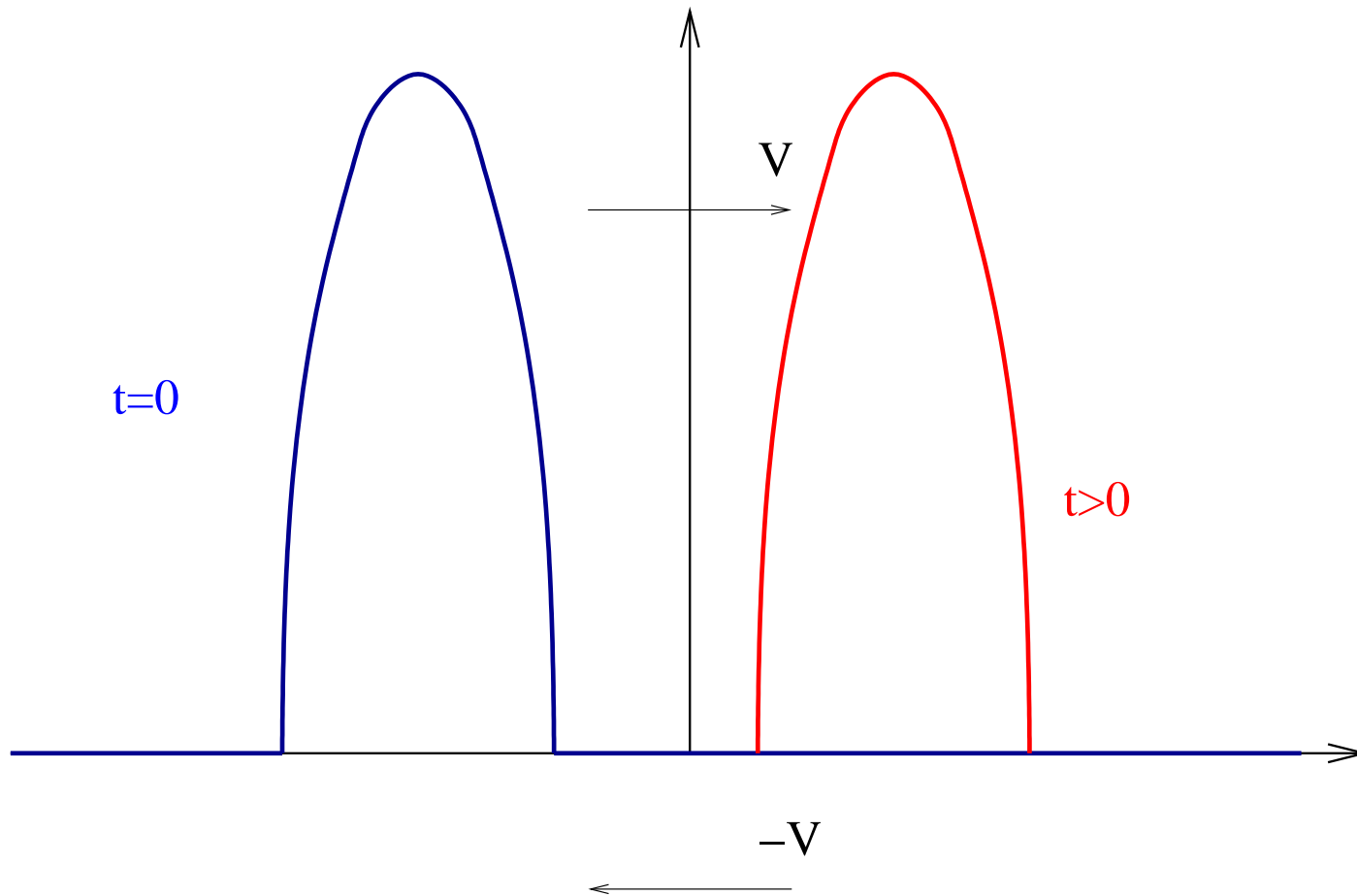
Equation de la chaleur:

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4\nu t}\right) dy.$$

Equation d'advection:

$$\theta(t, x) = \theta_0(x - Vt).$$

# Propriété de la solution explicite de l'équation de convection



**Principe du maximum** pour la solution  $\theta(t, x) = \theta_0(x - Vt)$ :

$$\min \theta_0 \leq \theta(t, x) \leq \max \theta_0$$

## Propriété des solutions de la chaleur et de convection-diffusion

**Principe du maximum** encore pour les solutions explicites des équations de la chaleur et de convection-diffusion.

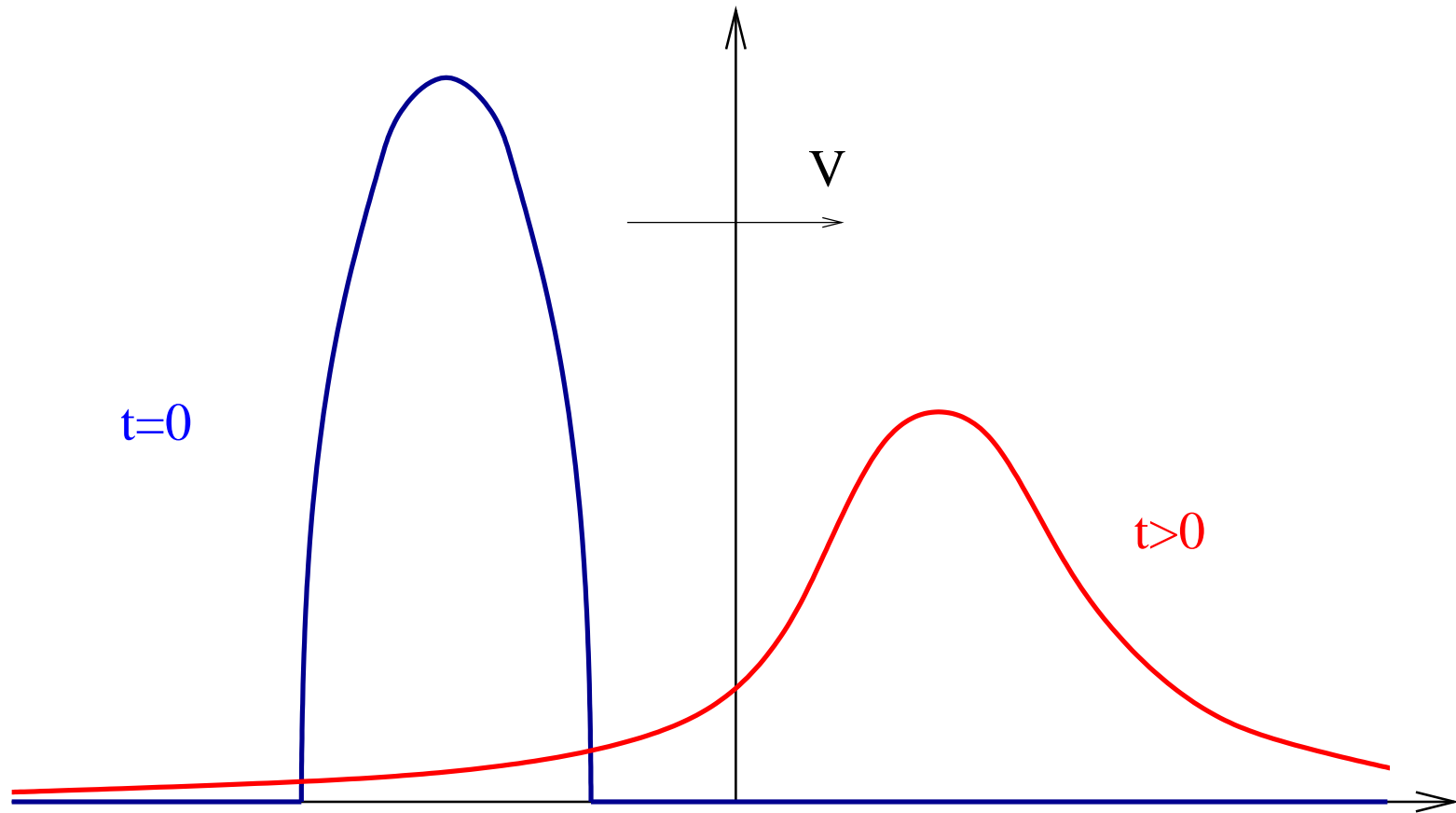
Solution = donnée initiale **moyennée** par un noyau gaussien:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy = 1.$$

**Faites le calcul pour vérifier !**

**Vitesse infinie de propagation !** Pour les équations de la chaleur et de convection-diffusion, si  $\theta_0(x) \geq 0$  et  $\theta_0 \neq 0$ , alors  $\theta(t, x) > 0$  pour tout  $t > 0$ .

# Solution de l'équation de convection-diffusion



Convolution de la donnée initiale avec un noyau gaussien

## Analyse des modèles

Au vu des solutions explicites:

☞ **Principe du maximum** pour les trois modèles:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \leq \theta(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

☞ **La “flèche” du temps:** l'équation d'advection est **réversible** en temps, tandis que l'équation de la chaleur (ou de convection-diffusion) est **irréversible**.

☞ **Vitesse de propagation:** finie pour l'équation d'advection, mais **infinie** pour l'équation de la chaleur (ou de convection-diffusion).



## Remarques

- ➡ Analyse plus poussée au Chapitre VIII: existence, unicité, et propriétés qualitatives des solutions de l'équation de la chaleur.
- ➡ **La même équation se retrouve dans d'autres problèmes:** évolution de la concentration d'un polluant, évaluation du prix des options en finance, écoulement potentiel d'un fluide, électrostatique...
- ➡ Très nombreux autres modèles à base d'équations aux dérivées partielles.

## Notion de problème bien posé (section 1.5.1)

- ➡ **Problème aux limites** = équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine.
- ➡ **Problème de Cauchy** = équation aux dérivées partielles où, pour la variable de temps  $t$ , les conditions “au bord” sont des conditions initiales (et pas finales).

**Définition.** On dit que le problème  $\mathcal{A}(u) = f$  est **bien posé** au sens de Hadamard si pour toute donnée  $f$  il admet une solution unique  $u$ , et si cette solution  $u$  dépend continuellement de la donnée  $f$ .

Condition nécessaire pour faire du calcul numérique !

Des petites variations de  $f$  (erreurs de mesures ou d'arrondis) ne doivent entraîner que des petites variations de  $u$ .

## Un peu de vocabulaire

⇒ Exemple d'équation **parabolique**: équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{ conditions aux limites } + \text{ condition initiale} \end{array} \right.$$

⇒ Exemple d'équation **elliptique**: équation de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \\ + \text{ conditions aux limites} \end{array} \right.$$

⇒ Exemple d'équation **hyperbolique**: équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{ conditions aux limites } + \text{ conditions initiales} \end{array} \right.$$

## Elliptique, parabolique, hyperbolique

Malgré les ressemblances, **propriétés très différentes:**

⇒ **Elliptique:** modèle stationnaire (thermique, électrostatique, membrane élastique, écoulement potentiel).

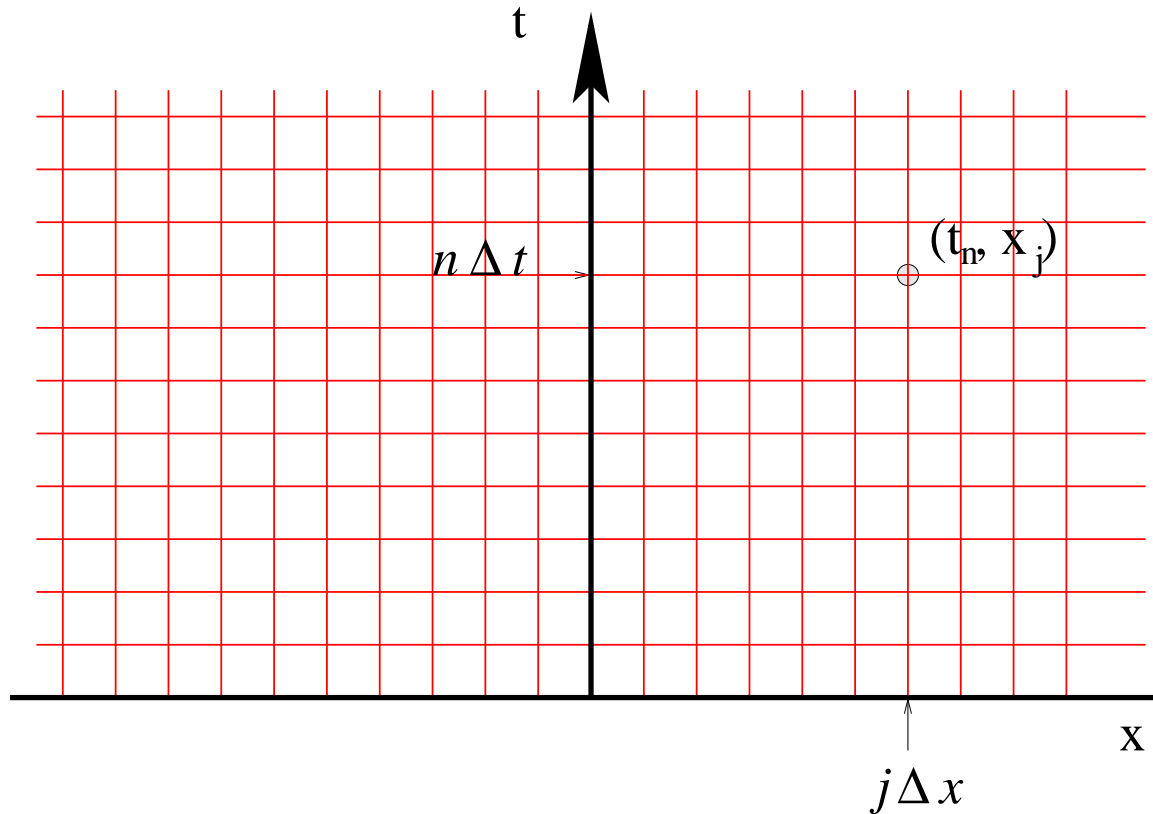
⇒ **Parabolique:** modèle instationnaire (diffusion thermique, chimique, neutronique, fluide visqueux incompressible).

**Irréversibilité, décroissance, principe du maximum, propagation à vitesse infinie.**

⇒ **Hyperbolique:** modèle instationnaire (propagation d'ondes, électromagnétisme, élastodynamique).

**Réversibilité, conservation de l'énergie, propagation à vitesse finie.**

## Différences finies (section 1.4)



**Maillage:** discrétisation de l'espace et du temps

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \quad \text{pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}$$

$\Delta t =$  pas de temps,  $\Delta x =$  pas d'espace (supposés "petits").

## Principe des différences finies

On calcule des **approximations**

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j)$$

On remplace les dérivées par des **différences finies**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

### Principe de discrétisation:

on remplace un problème de dimension **infinie** (calculer la fonction  $u(t, x)$ ) par un problème de dimension **finie** (calculer les valeurs discrètes  $u_j^n$ ), qui seul peut être résolu par un ordinateur.

## Différences divisées et formules de Taylor

Il n'y a pas **unicité** des formules d'approximation par différences finies.

On utilise des **formules de Taylor**. Par exemple

$$\begin{aligned}
 -u(t, x - \Delta x) + 2u(t, x) - u(t, x + \Delta x) = & -(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\
 & - \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^6\right)
 \end{aligned}$$

On en déduit la formule centrée (en espace)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \approx \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

à un terme d'ordre  $(\Delta x)^2$  près.

## Approximation de la dérivée en temps

Trois possibilités:

⇒ Différence finie **centrée** en temps:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

⇒ Différence finie décentrée (on avance dans le temps): **Euler explicite**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

⇒ Différence finie décentrée (on remonte dans le temps): **Euler implicite**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$



## Application à l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

avec  $\nu = \frac{k}{c} > 0$ .

Pour simplifier: dimension  $N = 1$  et  $\Omega = \mathbb{R}$ .

Nous allons faire des **expériences numériques**.

**But:**

montrer qu'il y a quelque chose à comprendre... c'est l'analyse numérique.

## Trois schémas pour l'équation de la chaleur

⇒ schéma centré: le plus "naturel"

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⇒ schéma d'Euler explicite: le plus simple

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(explicite  $\Leftrightarrow$  formule immédiate pour trouver  $u^{n+1}$  en fonction de  $u^n$ )

⇒ schéma d'Euler implicite: plus compliqué

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(implicite  $\Leftrightarrow$  système linéaire pour trouver  $u^n$  en fonction de  $u^{n-1}$ )

Initialisation:  $u_j^0 = u_0(x_j)$  où  $u_0(x)$  est la condition initiale.

## Données des expériences numériques

- ➡ Pas de terme source  $f = 0$ , ni de convection  $V = 0$ .
- ➡ Coefficient de diffusion  $\nu = 1$ .
- ➡ Domaine  $\Omega = ] - 10; +10[$ .
- ➡ Condition aux limites de Dirichlet  $u(-10) = u(+10) = 0$ .
- ➡ Donnée initiale

$$u_0(x) = \max(1 - x^2, 0).$$

- ➡ Comme  $\Omega \approx \mathbb{R}$  on compare avec la solution exacte dans  $\mathbb{R}$

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right) dy.$$

## Trois schémas pour l'équation de la chaleur

⇒ schéma centré: instable et inutilisable !

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⇒ schéma d'Euler explicite: stable sous condition

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⇒ schéma d'Euler implicite: toujours stable

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

## Condition de stabilité

Stabilité  $\Leftrightarrow$  pas d'oscillations numériques (définition précise au prochain chapitre).

**Observations numériques:** on fixe  $\Delta x$  et on fait varier  $\Delta t$ .

- ➡ Schéma centré: toujours instable.
- ➡ Schéma implicite: toujours stable.
- ➡ Schéma explicite: stable sous la condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy ; 1928 !)

$$2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2.$$

Le pas de temps ne peut pas être trop grand !

Condition de stabilité (suite)

**Justification mathématique de la condition CFL de stabilité pour le schéma explicite.**

**Principe du maximum discret:** le schéma explicite est équivalent à

$$u_j^{n+1} = \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n$$

$u_j^{n+1}$  est une **combinaison convexe** si la condition CFL est satisfaite.

Donc, si  $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ , on a

$$m \leq u_j^0 \leq M \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m \leq u_j^n \leq M \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall n \geq 0.$$

Si la condition CFL n'est pas satisfaite, il y a instabilité. Exemple:

$$u_j^0 = (-1)^j \quad \Rightarrow \quad u_j^n = (-1)^j \left(1 - 4\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)^n$$

qui tend (en valeur absolue) vers  $\infty$  car  $2\nu\Delta t > (\Delta x)^2 \Rightarrow 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} < -1$ .

**Conclusion 1**

**Pour certains schémas il existe une condition, dite CFL, qui est nécessaire et suffisante pour la stabilité.**

Autrement dit, pour certains schémas le pas de temps  $\Delta t$  doit être petit en comparaison au pas d'espace  $\Delta x$ .

## Expériences numériques pour la convection-diffusion

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u - \nu \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

**Schéma explicite en temps, centré en espace.** Mêmes données que précédemment avec  $\nu \Delta t = 0.4(\Delta x)^2$  et  $V = 1$ .

1.  $\nu = 1$
2.  $\nu = 0.1$
3.  $\nu = 0.01$

De plus en plus instable !



## Conclusion 2

**La condition CFL varie d'une équation à une autre.**

Quand la vitesse de convection domine le coefficient de diffusion (**grand nombre de Péclet**) il faut trouver une autre condition CFL.

## Expériences numériques pour l'advection

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

**Solution explicite:**  $u(x, t) = u_0(x - Vt)$ .

### 1. Schéma explicite **centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Instable quelque soit le choix de  $\Delta t$  !

### 2. Schéma explicite **décentré amont**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0.$$

On va chercher l'information en **remontant le courant** (une des idées majeures de l'analyse numérique).

## Stabilité du schéma décentré amont

Le schéma explicite décentré amont est stable sous une nouvelle condition CFL

$$|V|\Delta t \leq \Delta x.$$

**Justification mathématique:** on peut le réécrire sous la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n,$$

qui est une combinaison convexe si  $|V|\Delta t \leq \Delta x$ , donc il vérifie un **principe du maximum discret**.

### Conclusion 3

**Tous les schémas ne fonctionnent pas, même s'ils ont l'air raisonnables !**

Il faut faire appel à la physique du problème et à l'analyse mathématique pour trouver de **bons schémas**.

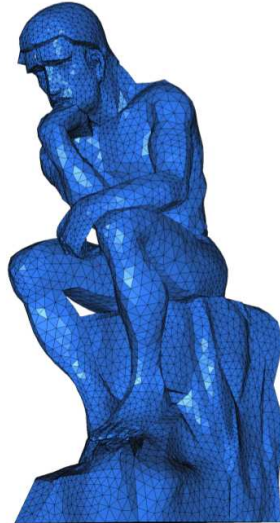
Dans le cas présent, l'idée clé est le **décentrement amont**.

## Constats et objectifs

- ☞ Le calcul numérique n'est pas toujours simple !
- ☞ Il existe des notions importantes: condition CFL pour la stabilité, décentrement des schémas, etc.
- ☞ On a besoin de l'analyse numérique pour sélectionner les “bons” schémas numériques.
- ⇒ Apprendre à bien utiliser les schémas numériques.
- ⇒ Pouvoir en concevoir de nouveaux.
- ⇒ Connaitre les bases théoriques indispensables.
- ⇒ A court terme (deux prochains amphis): stabilité, précision, et convergence des schémas de différences finies.

## Autre exemple: optimisation de structures mécaniques

RODIN project



Ecole Polytechnique,  
UPMC, INRIA,  
Renault, EADS,  
ESI group, etc.

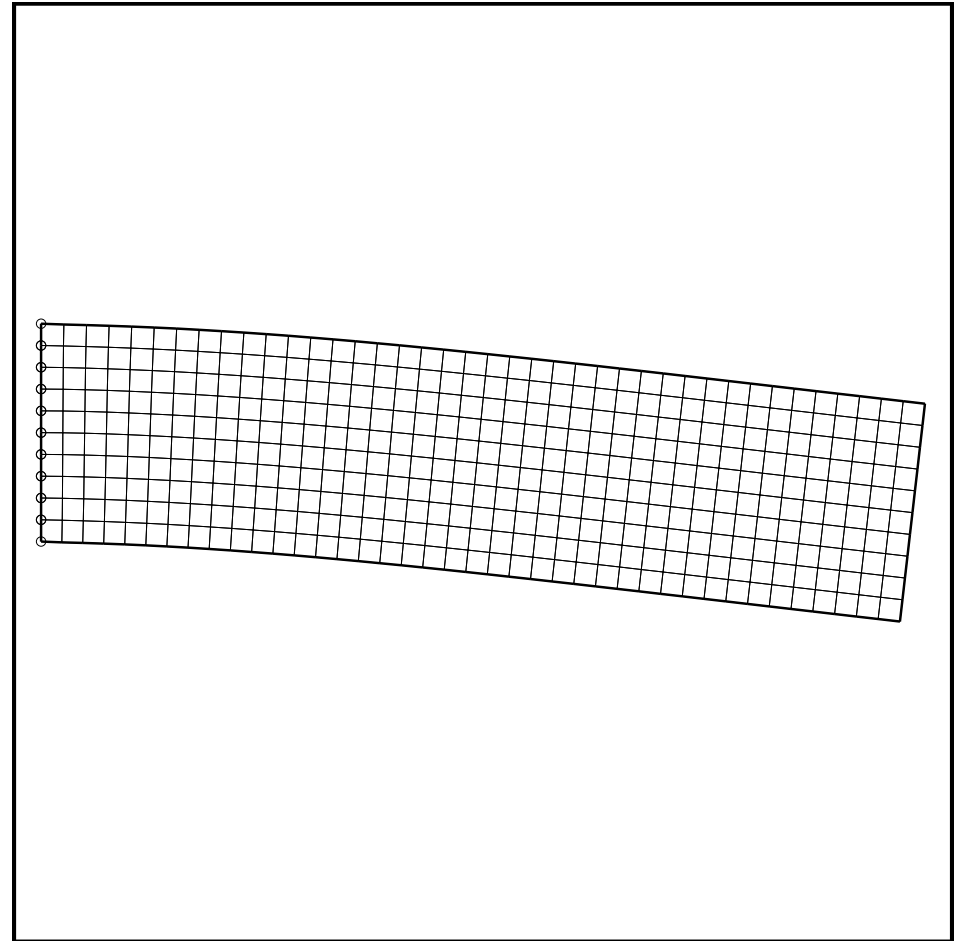
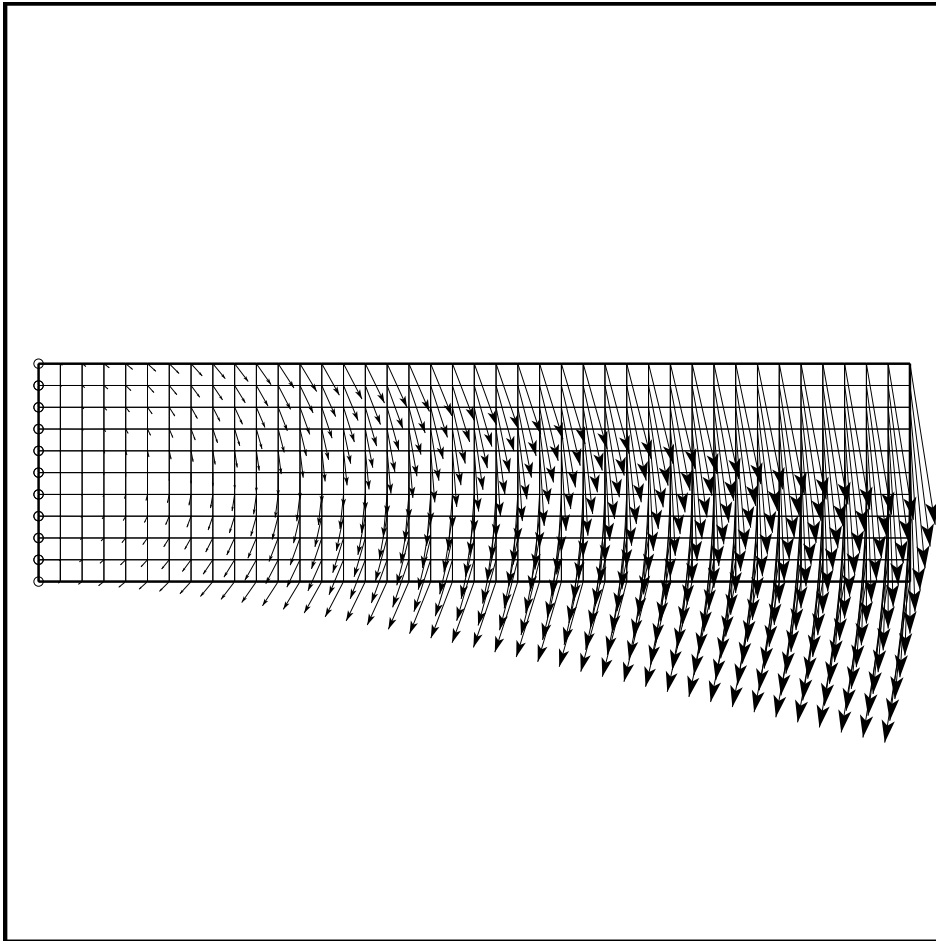
- ✍ **Trouver la forme d'une structure mécanique qui soit la plus légère possible tout en étant la plus solide possible.**
- ✍ Thème de recherche actuellement très intensif.
- ✍ Un exemple de couplage entre **analyse numérique et optimisation**.
- ✍ Applications industrielles: aéronautique, automobile, génie civil...
- ✍ Développement d'un logiciel: **projet RODIN** (partenariat entre des industriels et des laboratoires académiques).

## Modèle mécanique: élasticité linéarisée

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma = A e(u) \text{ avec } e(u) = 1/2 (\nabla u + (\nabla u)^T) & \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N \end{array} \right.$$

- ✘ Hypothèse de petits déplacements et petites déformations.
- ✘ Force appliquée  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$
- ✘ Inconnue: déplacement  $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$
- ✘ Tenseur des contraintes  $\sigma$ .
- ✘ Tenseur des déformations  $e(u)$  (il s'annule pour les "mouvements de corps rigide" ou rotations infinitésimales).
- ✘ Bord encasté  $\partial\Omega_D$ , bord libre  $\partial\Omega_N$ .

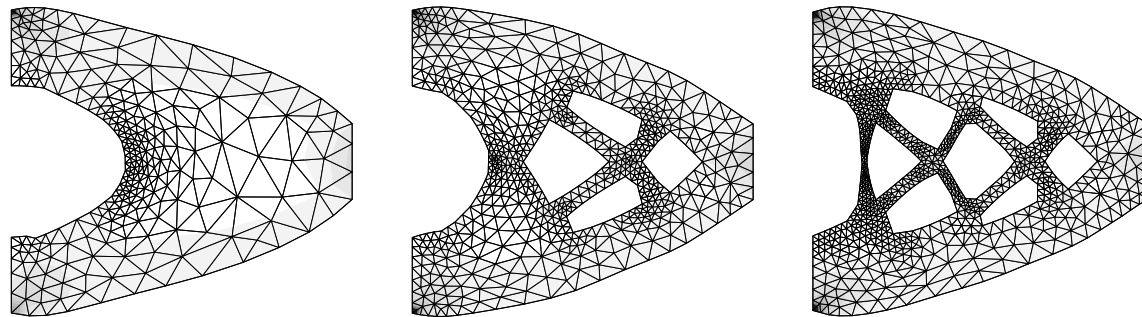
Exemple: la poutre en flexion simple (solution à gauche, déformation à droite)





## Optimisation

- ✘ Minimiser le **poids**  $P(\Omega) = \int_{\Omega} dx$ .
- ✘ Maximiser la "solidité" (définition ?).
- ✘ Exemple: la rigidité se mesure par la **compliance** ou travail des forces extérieures  $C(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx$ .
- ✘ **Difficulté:** la variable d'optimisation est la **forme**  $\Omega$  de la structure.
- ✘ **Plus grande difficulté:** la topologie de la structure doit être optimisée (en 2d, nombre de trous).



## Conclusion

- ⇒ Profonde interaction entre motivations mécaniques, modélisation mathématique, simulation numérique et optimisation.
- ⇒ **La simulation numérique aide à la compréhension et à la conception !** Les mathématiques sont devenues une science expérimentale !
- ⇒ Les 6 dernières leçons du cours porteront sur l'optimisation.
- ⇒ Le cours vous expliquera comment fonctionne un code d'éléments finis. Vous pourrez utiliser FreeFem++ au cours des travaux pratiques.

## Travaux pratiques

- ⇒ Mise en oeuvre informatique avec les logiciels Scilab et FreeFem++.
- ⇒ Choisir à la scolarité un sujet de **mini-projet de simulation numérique** par binôme **avant le mardi 4 février**.
- ⇒ Pas plus de 15 binômes sur un même sujet. Pas de trinômes ou plus. L'attribution des sujets s'effectuera sur la base de **premier arrivé, premier servi**.
- ⇒ Assister aux 2 séances (obligatoires) de TP encadrées en salle informatique les 11 février et 1er avril.
- ⇒ Rendre un mini-rapport (un par binôme, pas plus de quelques pages avec un CD des programmes) pour le **vendredi 20 mai** au plus tard.
- ⇒ Prévoir, en plus des séances de TP encadrées, de l'ordre d'une vingtaine d'heures de travail personnel de réflexion, de mise en oeuvre informatique et de rédaction.

## Notation

$$\text{Note de module} = \frac{1}{3}CC + \frac{1}{6} \max(DV, CC) + \frac{1}{4} \max(HC, CC) + \frac{1}{4}TP + (\text{bonus} \leq 2)$$

- ⇒ Bonus attribué par les enseignants de PC.
- ⇒ HC, CC = contrôles hors classement et classant.
- ⇒ TP = mini-projet de travaux pratiques
- ⇒ DV = deux devoirs obligatoires (distribués le 4 mars et le 1er avril, à rendre chacun 2 semaines plus tard, corrigés par des moniteurs).
- ⇒ Transformation de la note chiffrée en lettre par mes soins...

Pour plus de détails, voir le site web du cours:

[http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours\\_X\\_annee2.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee2.html)

**Je cherche deux volontaires pour être délégués des élèves en MAP 431 !**