Chapitre 1

INTRODUCTION A LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET A LA SIMULATION NUMÉRIQUE

Exercice 1.2.1 On suppose que la donnée initiale θ_0 est continue et uniformément bornée sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$\theta(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu t}\right) dy \tag{1.1}$$

est bien une solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial\theta}{\partial t} + V\frac{\partial\theta}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t=0,x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Correction. Dans un premier temps, nous allons vérifier formellement que l'expression de $\theta(t,x)$ (1.1) proposée est solution de l'équation de convection diffusion (1.2). Dans un deuxième temps, nous justifierons les calculs effectués.

On pose $G(x,t,y) = \exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu t}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{x-Vt-y}{2\nu t} G(x,t,y) \\
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \left(-\frac{1}{2\nu t} + \frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu^2 t^2}\right) G(x,t,y) \\
\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{(x+Vt-y)(x-Vt-y)}{4\nu t^2} G(x,t,y).
\end{aligned}$$

Quitte à permuter les opérateurs de dérivation et d'intégration, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) G(x,t,y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \frac{\partial G}{\partial x} dy \qquad (1.3) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \frac{x-Vt-y}{2\nu t} G(x,t,y) dy.
\end{aligned}$$

De manière similaire,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)G(x,t,y)dy = -\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)\left(\frac{1}{2\nu t}-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu^2t^2}\right)G(x,t,y)dy$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)G(x,t,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)\frac{(x+Vt-y)(x-Vt-y)}{4\nu t^2}G(x,t,y).$$

On obtient ainsi l'expression des dérivées partielles de $\theta(t,x)$ pour tout $t>0$, à savoir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)\frac{x-Vt-y}{2\nu t}G(x,t,y)dy\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)\left(\frac{1}{2\nu t}-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu^2t^2}\right)G(x,t,y)dy\\
\frac{\partial\theta}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)\left(\frac{(x+Vt-y)(x-Vt-y)}{4\nu t^2}-\frac{1}{2t}\right)G(x,t,y)dy.
\end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+V\frac{\partial\theta}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0.$$

Il reste à prouver que $\theta(t,x)$ est prolongeable en $t=0$ et vérifie bien la condition initiale, c'est à dire que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_0(y)\exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu t}\right)dy=\theta_0(x). \tag{1.4}$$

Rappelons que,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}. \tag{1.5}$$

Pour établir cette relation, il suffit de calculer $\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2}e^{-|x|^2}dx$ en coordonnées polaires. On pose

$$\rho(x,t,y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu t}\right).$$

D'après (1.5), $\int\rho(x,t,y)dy=1$ pour tout x et t. Enfin, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on constate que pour tout y différent de x, $\lim_{t\to 0}\rho(x,t,y)=0$. Ainsi, x étant fixé, $\rho(x,t,y)$ est une fonction de y se concentrant en x lorsque t tend vers zéro. Pour être plus précis, on montre que pour tout δ et ε réels strictement positifs, il existe $t(\delta,\varepsilon)$ tel que pour tout $t<t(\delta,\varepsilon)$,

$$\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta}\rho(x,t,y)dy-1\right|\le\varepsilon.$$

et
$$\left|\int_{-\infty}^{x-\delta} \rho(x,t,y)dy + \int_{x+\delta}^{\infty} \rho(x,t,y)dy\right| \leq \varepsilon.$$
L'équation (1.4) découle alors du fait que θ_0 est continue, uniformément bornée.

Reste à prouver que les commutations des opérateurs d'intégration et de dérivation effectuées lors du calcul des dérivées partielles de $\theta(t,x)$ sont licites. Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $t > 0$, il existe des constantes $C_1(x,t)$ et $C_2(x,t)$ telles que si z est suffisamment proche de x,
$$\left|\frac{z - Vt - y}{2\nu t}\right| \leq C_1(x,t)(1 + |y|)$$
et
$$(z - Vt - y)^2 \geq \frac{|y|^2}{2} + C_2(x,t).$$
En postant $C(x,t) = C_1(x,t)\exp(-C_2(x,t)/4\nu t)$, il vient
$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(z,t,y)\right| \leq C(x,t)(1 + |y|)\exp\left(-\frac{|y|^2}{8\nu t}\right).$$
Comme $\theta_0(y)$ est uniformément bornée, on en déduit que
$$\left|\theta_0(y)\frac{\partial G}{\partial x}(z,t,y)\right| \leq C(x,t)(1 + |y|)\exp\left(-\frac{|y|^2}{8\nu t}\right)\sup_s |\theta_0(s)|$$
pour tout z appartenant à un voisinage de x. Le terme de droite est intégrable par rapport à y. Ainsi, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que l'échange des opérateurs d'intégration et de dérivation dans (1.3) est licite. On peut procéder de manière similaire pour justifier les deux autres commutations effectuées.

Exercice 1.2.2 On suppose que la donnée initiale θ_0 est dérivable et uniformément bornée sur $\mathbb{R}$. Vérifier que
$$\theta(t,x) = \theta_0(x - Vt) \tag{1.6}$$
est bien une solution de
$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial t} + V\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.7}$$
Montrer que (1.6) est la limite de (1.1) lorsque le paramètre ν tend vers zéro.

Correction.
$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = -V\frac{\partial\theta_0}{\partial x}(x - Vt) = -V\frac{\partial\theta}{\partial x}(x).$$
Ainsi, θ vérifie l'équation différentielle annoncée. De plus, θ vérifie trivialement la condition initiale.

Par un raisonnement analogue à celui qui nous avait permis d'établir la continuité de la solution en $t = 0$ dans l'exercice 1.2.1, on montre que
$$\lim_{\nu\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_0(y)\exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t})\right)dy = \theta_0(x - Vt) = \theta(t).$$

Exercice 1.3.1 On se propose de retrouver une propriété de décroissance exponentielle en temps (voir la formule (1.1)) de la solution de l'équation de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1.8}$$

dans un domaine Ω borné. En une dimension d'espace, on pose $\Omega = (0,1)$ et on suppose que $f = 0$. Soit $u(t,x)$ une solution régulière de (1.8). En multipliant l'équation par u et en intégrant par rapport à x, établir l'égalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 u^2(t,x)\,dx\right) = -\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 dx$$

Montrer que toute fonction $v(x)$ continûment dérivable sur $[0,1]$, telle que $v(0) = 0$, vérifie l'inégalité de Poincaré

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx \leq \int_0^1 \left|\frac{dv}{dx}(x)\right|^2 dx.$$

En déduire la décroissance exponentielle en temps de $\int_0^1 u^2(t,x)\,dx$.

Correction. En multipliant l'équation différentielle (1.8) par u on obtient par intégration que

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx.$$

Quitte à supposer u suffisamment régulière, on peut appliquer le théorème d'intégration sous le signe somme au terme de gauche et effectuer une intégration par parties sur le terme de droite. On obtient ainsi que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 u^2 dx\right) = -\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx. \tag{1.9}$$

Soit v une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $v(0) = 0$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$v^2(x) = \left(\int_0^x \frac{dv}{dx}(y) dy\right)^2 \leq x \int_0^x \left|\frac{dv}{dx}(y)\right|^2 dy \leq \int_0^1 \left|\frac{dv}{dx}(y)\right|^2 dy$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où,

$$\int_0^1 v^2(x) dx \leq \int_0^1 \left|\frac{dv}{dx}(x)\right|^2 dx.$$

En appliquant cette dernière inégalité à $v(x) = u(t,x)$, on déduit de (1.9) que

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}(t) \leq -E(t)$$

où

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)dx.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\frac{d(Ee^{2t})}{dt} = \left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} + E\right)e^{2t} \leq 0$$

et pour tout $t \geq 0$,

$$E(t)e^{2t} \leq E(0).$$

Exercice 1.3.2 On se place en dimension $N = 1$ d'espace. On suppose que les données initiales u_0 et u_1 sont des fonctions régulières, et que $f = 0$ avec $\Omega = \mathbb{R}$. On note U_1 une primitive de u_1. Vérifier que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(U_1(x+t) - U_1(x-t)\right), \tag{1.10}$$

est la solution unique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

dans la classe des fonctions régulières.

Correction. La fonction $u(t,x)$ définie par (1.10) est trivialement une solution de l'équation des ondes (1.11). Comme l'équation est linéaire, il suffit de prouver l'unicité pour $u_0 = u_1 = 0$. Soit $x_0 < x_1$ et $2t < x_1 - x_0$. En multipliant l'équation aux dérivées partielles par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on obtient par intégration par parties que

$$0 = \int_{x_0+t}^{x_1-t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2\right)dx + \int_{x_0+t}^{x_1-t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\right)dx$$
$$- 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}(x_1 - t) + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + t).$$

On rappelle que pour toutes fonctions a, b et g régulières,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} g(t,x)dx\right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)dx + b'(t)g(t,b(t)) - a'(t)g(t,a(t)).$$

On en déduit que

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_{x_0+t}^{x_1-t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\right]dx\right)$$
$$+ \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x_0+t,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x_1-t,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x_0+t,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-t,t)\right|^2$$
$$- 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}(x_1-t,t) + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}(x_0+t,t)$$

c'est à dire

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{x_0+t}^{x_1-t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\right]dx\right)=$$
$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_0+t,t)\right|^2+\left|\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_1-t,t)\right|^2.$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_0+t}^{x_1-t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\right]dx\right)\leq 0.$$

Pour tout $t\geq 0$, pour tout y_0 et y_1 tels que $y_0\leq y_1$, on a donc

$$\int_{y_0}^{y_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\right]dx\leq\int_{x_0}^{x_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\right|^2\right]dx=0 \tag{1.12}$$

où $x_0=y_0-t$ et $x_1=y_1+t$. On déduit de (1.12) que $u(x,t)=0$ pour tout x et $t\geq 0$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 1.3.3 Vérifier que la solution (1.10) au point (x,t) ne dépend des données initiales u_0 et u_1 qu'à travers leurs valeurs sur le segment $[x-t,x+t]$. Vérifier aussi $u(-t,x)$ est solution de (1.11) dans $\Omega\times\mathbb{R}_*^-$, quitte à changer le signe de la vitesse initiale $u_1(x)$.

Correction. On rappelle que

$$u(t,x)=\frac{1}{2}(u_0(x+t)+u_0(x-t))+\frac{1}{2}(U_1(x+t)-U_1(x-t)),$$

où U_1 est une primitive de u_1. Comme

$$U_1(x+t)-U_1(x-t)=\int_{x-t}^{x+t}u_1(y)dy$$

ne dépend que de la restriction de u_1 sur l'intervalle $[x-t,x+t]$, on en déduit que $u(t,x)$ ne dépend que de u_0 et u_1 restreints à $[x-t,x+t]$. On dit que l'information se propage à vitesse finie. Enfin, on vérifie sans mal que $u(-t,x)$ est solution de la même équation sur $\Omega\times\mathbb{R}_*^-$, quitte à remplacer u_1 par $-u_1$.

Exercice 1.3.4 On se propose de démontrer un principe de conservation de l'énergie pour l'équation des ondes (1.11) sans utiliser la formule explicite (1.10). En une dimension d'espace, on pose $\Omega=(0,1)$ et on suppose $f=0$. Soit $u(t,x)$ une solution régulière de (1.11). En multipliant l'équation par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant par rapport à x, établir l'égalité d'énergie

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^2dx+\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2dx\right)=0.$$

Conclure et comparer à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur.

Correction. En multipliant l'équation des ondes par $\partial u/\partial t$, on obtient par intégration

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx = 0.$$

On applique alors le théorème de dérivation sous le signe somme au premier terme de l'équation et on effectue une intégration par parties sur le second. Aucun terme de bord n'apparaît suite à l'intégration par parties car comme $u(t,0) = u(t,1) = 0$, on a $\partial u/\partial t(t,0) = \partial u/\partial t(t,1) = 0$. On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\right) + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}dx = 0.$$

En appliquant à nouveau le théorème de dérivation sous le signe somme (au deuxième terme cette fois), on établit l'égalité d'énergie demandée.
Dans le cas de l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet, l'énergie totale décroît exponentiellement. La température tend à devenir uniformément nulle au sein de l'ouvert Ω. Il y a une déperdition d'énergie par le bord de Ω. Le comportement est très différent pour la solution de l'équation des ondes. L'énergie est conservée au cours du temps et l'onde est réfléchie sur les bords.

Exercice 1.3.5 On se propose de démontrer des principes de conservation de l'énergie pour l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - Vu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_* \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.13}$$

Soit $u(t,x)$ une solution régulière de (1.13) en une dimension d'espace qui décroît vers zéro (ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$) lorsque $|x| \to +\infty$. Montrer que pour toute fonction dérivable $v(t)$ on a

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\overline{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial |v|^2}{\partial t},$$

où $\mathcal{R}$ désigne la partie réelle et $\overline{v}$ le complexe conjugué de v. En multipliant l'équation par $\overline{u}$ et en intégrant par rapport à x, établir l'égalité d'énergie

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2\, dx.$$

En multipliant l'équation par $\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 + V(x)\,|u(t,x)|^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}(x)\right|^2 + V(x)\,|u_0(x)|^2\right) dx.$$

Correction. Soit v une fonction dérivable,

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\overline{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\overline{v} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial t}v\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial v\overline{v}}{\partial t}.$$

On a bien

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\overline{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial |v|^2}{\partial t}. \tag{1.14}$$

En multipliant l'équation de Schrödinger par $\overline{u}$, on obtient par intégration que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(i\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{u} - V|u|^2 \right) dx = 0$$

Par intégration par parties sur le second membre, on obtient

$$i\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + V|u|^2 \right) dx$$

(les hypothèses de décroissance effectuées sur u permettent d'éliminer les termes de bords à "l'infini"). Comme le second membre est réel, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} dx$ est un imaginaire pur,

$$\mathcal{R}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} dx \right) = 0.$$

D'après (1.14), on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial |u|^2}{\partial t} dx = 0.$$

Pourvu que la solution u soit suffisamment régulière, on peut commuter le signe somme et intégrale, ainsi

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx.$$

En multipliant l'équation de Schrödinger par $\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \left(i\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - Vu\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \right) dx = 0$$

Par intégration par parties du second terme, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(i\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t \partial x} - Vu\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \right) dx = 0.$$

En considérant la partie réelle de cette égalité, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + V|u|^2 \right) dx = 0.$$

Il suffit d'échanger la dérivation par rapport au temps et le signe intégrale afin d'obtenir le résultat escompté

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + V|u|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 + V|u_0|^2 \right) dx.$$

Exercice 1.4.1 Le but de cet exercice est de montrer que le schéma implicite pour l'équation de la chaleur

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \tag{1.15}$$

vérifie aussi le principe du maximum discret. On impose des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que la formule (1.15) est valable pour $1 \leq j \leq J$ et on fixe $u_0^n = u_{J+1}^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit deux constantes $m \leq 0 \leq M$ telles que $m \leq u_j^0 \leq M$ pour $1 \leq j \leq J$. Vérifier que l'on peut bien calculer de manière unique les u_j^{n+1} en fonction des u_j^n. Montrer que pour tous les temps $n \geq 0$ on a encore les inégalités $m \leq u_j^n \leq M$ pour $1 \leq j \leq J$ (et ceci sans condition sur Δt et Δx).

Correction. Tout d'abord, montrons que le schéma implicite (1.15) est correctement défini. On pose $U^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq J}$. On vérifie que le schéma implicite équivaut à déterminer U^n tel que

$$AU^n = U^{n-1}.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1+2c & -c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -c & 1+2c & -c & 0 & & & \vdots \\ 0 & -c & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -c & 0 \\ \vdots & & & 0 & -c & 1+2c & -c \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c & 1+2c \end{pmatrix}$$

et $c = \nu\Delta t/(\Delta x)^2$. Il s'agit donc de prouver que la matrice A est inversible, ce qui est aisé, car A est symétrique, définie positive donc inversible. En effet, soit $X \in \mathbb{R}^J$. Par convention, on pose $X_0 = X_{J+1} = 0$. On a

$$X^T A X = \sum_{j=0}^{J} \frac{X_j^2 + X_{j+1}^2}{2} + c(X_{j+1} - X_j)^2.$$

Reste à prouver que le schéma vérifie le principe du maximum. On raisonne par récurrence sur n. Supposons que $m \leq u_j^{n-1} \leq M$ pour tout $j \in \{0, \cdots, J+1\}$. Soit $m' = \inf_{j \in \{1,\cdots,J\}} u_j^n$ et $M' = \sup_{j \in \{1,\cdots,J\}} u_j^n$. Montrons que $M' \leq M$. Si $M' = 0$, on n'a rien à démontrer car $0 \leq M$ par hypothèse. Dans le cas contraire, soit $k \in \{1, \cdots, J\}$ tel que $M' = u_k^n$. D'après le schéma,

$$(1+2c)u_k^n = u_k^{n-1} + 2c\left(\frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2}\right).$$

Comme $\frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} \leq u_k^n$, on en déduit que

$$(1+2c)\, u_k^n \leq u_k^{n-1} + 2cu_k^n,$$

d'où

$$M' = u_k^n \leq u_k^{n-1} \leq M.$$

Quitte a remplacer u par $-u$, on obtient également $m' \geq m$.

Exercice 1.4.2 Montrer que, si la condition CFL

$$|V|\Delta t \leq \Delta x \tag{1.16}$$

n'est pas satisfaite, le schéma décentré amont

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{1.17}$$

pour l'équation d'advection est instable pour la donnée initiale $u_j^0 = (-1)^j$.

Correction. Le schéma décentré amont est défini par

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Considérons comme donnée initiale $u_j^0 = (-1)^j$. On montre par une récurrence évidente que

$$u_j^n = \left(1 - \frac{2V\Delta t}{\Delta x}\right)^n (-1)^j.$$

Ainsi, la suite u^n reste bornée si et seulement si

$$\left|1 - \frac{2V\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1,$$

ou encore si la condition CFL

$$\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

est vérifiée.

Exercice 1.4.3 Écrire un schéma explicite centré en espace pour l'équation des ondes (1.11) en une dimension d'espace et sans terme source. Préciser comment démarrer les itérations en temps. Vérifier l'existence d'un cône de dépendance discret analogue à celui continu illustré par la Figure **1.3**. En déduire que, si ce schéma converge, les pas de temps et d'espace doivent nécessairement satisfaire la condition (de type CFL) $\Delta t \leq \Delta x$.

Correction. Pour l'équation des ondes (1.11) sans terme source, le schéma explicite centré est

$$\frac{u_j^{n-1}-2u_j^n+u_j^{n+1}}{(\Delta t)^2}+\frac{-u_{j-1}^n+2u_j^n-u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}=0.$$

Ainsi,

$$u_j^{n+1}=-u_j^{n-1}+2u_j^n+\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n). \tag{1.18}$$

On initialise le schéma en posant

$$u_j^0=u_0(j\Delta x) \text{ et } u_j^1=u_j^0+u_1(j\Delta x)\Delta t.$$

Au vu de l'équation (1.18), on montre par une récurrence évidente que la valeur de u_j^{n+1} ne dépend que des valeurs des u_{j+k}^1 pour k entier, $-n\leq k\leq n$ et de u_{j+l}^0 pour l entier, $-n<l<n$. On note $u(t,x)$ la solution de l'équation des ondes. Soit $(\Delta t)_m$ et $(\Delta x)_m$, suites de discrétisations en temps et espace, tel que le schéma soit convergent. Dans ce cas, pour tout temps t et tout point de l'espace x, on a

$$u_j^{n+1}\xrightarrow{m\to\infty}u(t,x)$$

avec $n=[t/(\Delta t)_m]$ et $j=[x/(\Delta x)_m]$ (où les crochets désignent la partie entière). Comme nous venons de l'établir, la valeur de u_j^{n+1} dépend uniquement de la restriction de u_0 et u_1 sur l'intervalle $[(j-n)(\Delta x)_m,(j+n)(\Delta x)_m]$. Ainsi, par passage à la limite, on en déduit que la valeur de sa limite ne dépend que de la restriction de u_0 et u_1 à l'intervalle $[x-t\liminf((\Delta x)_m/(\Delta t)_m),x+t\liminf((\Delta x)_m/(\Delta t)_m)]$. Or $u(t,x)$ dépend de toutes les valeurs de u_0 et u_1 sur l'intervalle $[x-t,x+t]$. Pour que le schéma soit convergent, il faut donc que

$$x-t\liminf_{m\to\infty}\frac{\Delta x_m}{\Delta t_m}\leq x-t \text{ et } x+t\leq x+t\liminf_{m\to\infty}\frac{(\Delta x)_m}{(\Delta t)_m},$$

c'est-à-dire que la conditioin CFL doit être asymptotiquement vérifiée

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{\Delta x_m}{\Delta t_m}\geq 1.$$

Exercice 1.5.1 Le but de cet exercice est de montrer que le problème de Cauchy pour le Laplacien est mal posé. Soit le domaine bidimensionnel $\Omega=(0,1)\times(0,2\pi)$. On considère le problème de Cauchy en x et le problème aux limites en y suivant

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \text{dans } \Omega\\ u(x,0)=u(x,2\pi)=0 & \text{pour } 0<x<1\\ u(0,y)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=-e^{-\sqrt{n}}\sin(ny) & \text{pour } 0<y<2\pi\end{cases}$$

Vérifier que $u(x,y)=\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\sin(ny)\mathrm{sh}(nx)$ est une solution. Montrer que la condition initiale et toutes ses dérivées en $x=0$ convergent uniformément vers 0, tandis que, pour tout $x>0$, la solution trouvée $u(x,y)$ et toutes ses dérivées ne sont pas bornées quand n tend vers l'infini. Conclure.

Correction. Ici, x joue le rôle du temps. Rappelons que $\mathrm{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ et $\mathrm{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$. On vérifie sans mal que la solution proposée est une solution du système. D'autre part,

$$\frac{\partial^{k+l}u}{\partial x^k \partial y^l} = e^{-\sqrt{n}} n^{l+k-1} (i)^l \left(\frac{e^{iny} - (-1)^l e^{-iny}}{2i} \right) \left(\frac{e^{nx} - (-1)^k e^{-nx}}{2} \right).$$

On constate que en $x = 0$, la fonction u ainsi que toutes ses dérivées convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (pour tous les entiers k et l, $e^{-\sqrt{n}} n^{l+k-1}$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini). A contrario, si $x > 0$, ni u ni ses dérivées ne sont bornées par rapport à n (pour tous les entiers k et l, $e^{nx-\sqrt{n}} n^{l+k-1}$ diverge lorsque n tend vers l'infini). Or, pour des conditions initiales (i.e. en $x = 0$) nulles, la fonction $u = 0$ est une solution triviale du système. Ainsi, des perturbations infinitésimales des conditions initiales (même pour la norme très forte C^∞) induisent de très grandes perturbations de la solution (pour n'importe quelle norme raisonnable, même faible). Le problème de Cauchy proposé est donc mal posé dans tout espace “raisonnable”.