Chapitre 10

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ ET ALGORITHMES

Exercice 10.1.1 Montrer que la dérivabilité de J en u implique la continuité de J en u. Montrer aussi que, si L_1, L_2 vérifient

$$\begin{cases} J(u+w) \geq J(u) + L_1(w) + o(w) \ , \\ J(u+w) \leq J(u) + L_2(w) + o(w) \ , \end{cases} \tag{10.1}$$

alors J est dérivable et $L_1 = L_2 = J'(u)$.

Correction. Si J est dérivable au sens de Fréchet en u, il existe une forme linéaire continue L telle que

$$J(u+w) = J(u) + L(w) + o(w).$$

Ainsi,

$$|J(u+w) - J(u)| \leq \|L\|\|w\| + |o(w)|.$$

Le terme de droite convergeant vers zéro lorsque w tend vers zéro, J est continue en u.

Considérons une fonction J vérifiant (10.1). De

$$J(u+w) \geq J(u) + L_1(w) + o(w)$$

et

$$-J(u+w) \geq -J(u) - L_2(w) + o(w),$$

on déduit que

$$0 \geq (L_1 - L_2)(w) + o(w).$$

Ainsi, pour tout réel $\alpha > 0$,

$$0 \geq (L_1 - L_2)(w) + \frac{o(\alpha w)}{\alpha}$$

(on applique l'inégalité précédente à αw et on divise par α). En faisant tendre α vers zéro, on obtient que pour tout w,

$$0 \geq (L_1 - L_2)(w).$$

Cette inégalité appliquée $-w$, nous donne l'inégalité inverse et finalement l'égalité $L_1(w) = L_2(w)$. Il en découle que J est dérivable au sens de Fréchet et que $J' = L_1 = L_2$.

Exercice 10.1.2 (essentiel !) Soit a une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$. Soit L une forme linéaire continue sur V. On pose $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)$. Montrer que J est dérivable sur V et que $\langle J'(u), w\rangle = a(u,w) - L(w)$ pour tout $u, w \in V$.

Correction. Il suffit de développer l'expression $J(u+w)$. On obtient

$$J(u+w) = J(u) + a(u,w) - L(w) + a(w,w)/2.$$

La forme bilinéaire a étant continue, $a(w,w)$ est un petit o de $\|w\|$. La fonction J est donc dérivable et

$$\langle J'(u), w\rangle = a(u,w) - L(w).$$

Exercice 10.1.3 Soit A une matrice symétrique $N \times N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$. Montrer que J est dérivable et que $J'(x) = Ax - b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Correction. C'est un cas particulier de l'Exercice précédent. On a

$$J(x+y) = J(x) + (Ax - b) \cdot y + Ay \cdot y/2.$$

Ainsi, J est dérivable et si on identifie $\mathbb{R}^N$ et son dual à l'aide du produit scalaire euclidien, on obtient

$$J'(x) = Ax - b.$$

Exercice 10.1.4 On reprend l'Exercice **10.1.2** avec $V = L^2(\Omega)$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^N$), $a(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$, et $L(u) = \int_\Omega fu\,dx$ avec $f \in L^2(\Omega)$. En identifiant V et V', montrer que $J'(u) = u - f$.

Correction. D'après l'Exercice 10.1.2,

$$\langle J'(u), w\rangle = a(u,w) - L(w),$$

d'où

$$\langle J'(u), w\rangle = \int_\Omega uw - fw dx = (u - f, w)_{L^2(\Omega)}.$$

En identifiant $L^2(\Omega)$ et son dual à l'aide du produit scalaire $L^2(\Omega)$, on obtient $J'(u) = u - f$.

Exercice 10.1.5 On reprend l'Exercice **10.1.2** avec $V = H_0^1(\Omega)$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^N$) que l'on munit du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,dx.$$

On pose $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, et $L(u) = \int_\Omega f u \, dx$ avec $f \in L^2(\Omega)$. Montrer (au moins formellement) que $J'(u) = -\Delta u - f$ dans $V' = H^{-1}(\Omega)$. Montrer que, si on identifie V et V', alors $J'(u) = u_0$ où u_0 est l'unique solution dans $H^1_0(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + u_0 = -\Delta u - f & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Correction. D'après le résultat établi à l'Exercice **10.1.2**, la fonction J est dérivable et pour tout $w \in H^1_0(\Omega)$ on a

$$\langle J'(u), w \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - f w dx.$$

Si u appartient à $H^2(\Omega)$ alors $J'(u)$ appartient au dual de $L^2(\Omega)$. Suite à une intégration par partie, on obtient

$$\langle J'(u), w \rangle = -\int_\Omega (\Delta u + f) w dx.$$

Aussi, si on identifie $L^2(\Omega)$ et son dual à l'aide du produit scalaire $L^2(\Omega)$, on obtient $J'(u) = -\Delta u - f$. Si on utilise le produit scalaire $H^1(\Omega)$ pour associer une fonction à $J'(u)$, on obtient évidemment un autre résultat. Soit v l'élément de $H^1_0(\Omega)$ associé à $J'(u)$ par identification de $H^1_0(\Omega)$ et son dual à l'aide du produit scalaire $H^1(\Omega)$. En d'autres termes, v est l'unique élément de $H^1_0(\Omega)$ tel que pour tout $w \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w + v w \, dx = \langle J'(u), w \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w + f w \, dx.$$

Par intégration par partie, on en déduit que v est solution du problème aux limites vérifié par u_0. Ainsi $v = u_0$ et, si on identifie $H^1_0(\Omega)$ et son dual à l'aide du produit scalaire H^1, $J'(u) = u_0$.

Exercice 10.1.6 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (on pourra se restreindre au cas où $N = 1$ avec $\Omega =]0,1[$). Soit $L = L(p,t,x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$, dérivable par rapport à p et t sur cet ensemble, de dérivées partielles $\frac{\partial L}{\partial p}$ et $\frac{\partial L}{\partial t}$ Lipschitziennes sur cet ensemble. On pose $V = H^1_0(\Omega)$ et $J(v) = \displaystyle\int_\Omega L(\nabla v(x), v(x), x) dx$.

1. Montrer que J est dérivable sur $H^1_0(\Omega)$ et que

$$\langle J'(u), w \rangle = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial p}(\nabla u(x), u(x), x) \cdot \nabla w(x) + \frac{\partial L}{\partial t}(\nabla u(x), u(x), x) w(x) \right) dx \, .$$

2. Si $N = 1$ et $\Omega =]0,1[$, montrer que, si $u \in H^1_0(0,1)$ satisfait $J'(u) = 0$, alors u vérifie

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\big(u'(x), u(x), x\big) \right) - \frac{\partial L}{\partial t}\big(u'(x), u(x), x\big) = 0 \, , \qquad (10.2)$$

presque partout dans l'intervalle $]0,1[$.

3. Si L ne dépend pas de x (i.e. $L = L(p,t)$) et si u est une solution de classe $C^2(]0,1[)$ de l'équation différentielle (10.2), montrer que la quantité

$$L\big(u'(x),u(x)\big) - u'(x)\frac{\partial L}{\partial p}\big(u'(x),u(x)\big)$$

est constante sur l'intervalle $[0,1]$.

Correction.

1. Tout d'abord, comme L est dérivable par rapport à p et t, de dérivées Lipschitziennes, on a

$$\left|L(p+q,t+s,x) - L(p,t,x) - \frac{\partial L}{\partial p}(p,t,x)\cdot q - \frac{\partial L}{\partial t}(p,t,x)s\right| \leq \frac{K}{2}(|q|^2+|s|^2). \tag{10.3}$$

En particulier,

$$L(p,t,x) \leq C(1+|p|^2+t^2),$$

et J est correctement défini. On vérifie également que

$$M(u)\cdot w = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial p}(\nabla u,u,x)\cdot\nabla w + \frac{\partial L}{\partial t}(\nabla u,u,x)w\right)dx$$

est une forme linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\overline{\Omega})$. Enfin, d'après l'inégalité (10.3)

$$|J(u+w) - J(u) - M(u)\cdot w| \leq \frac{K}{2}\|w\|^2_{H^1}.$$

La fonction J est donc dérivable en u de dérivée $M(u)$.

2. Si $J'(u)=0$, on a pour tout $w\in H^1_0(0,1)$,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial p}(u',u,x)\cdot w' + \frac{\partial L}{\partial t}(u',u,x)w\right)dx = 0.$$

On en déduit que $\partial L/\partial p(u',u,x)$ appartient à $H^1(0,1)$ et que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}(u',u,x)\right) - \frac{\partial L}{\partial t}(u',u,x) = 0$$

presque partout.

3. Comme u est de classe C^2, les calculs suivants sont licites :

$$\frac{d}{dx}\left(L(u',u) - u'\frac{\partial L}{\partial p}(u',u)\right) = \frac{d(L(u',u))}{dx} - u''\frac{\partial L}{\partial p} - u'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}(u',u)\right)$$
$$= u'\left(\frac{\partial L}{\partial t}(u',u) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}(u',u)\right)\right) = 0.$$

et $L(u',u) - u'\partial L/\partial p(u',u)$ est constant sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 10.1.7 Montrer qu'une fonction J dérivable sur V est strictement convexe si et seulement si

$$J(v) > J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle \quad \forall\, u, v \in V \quad \text{avec} \quad u \neq v\ ,$$

ou encore

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle > 0 \quad \forall\, u, v \in V \quad \text{avec} \quad u \neq v\ .$$

Correction. Notons tout d'abord, que ces équivalences ont été établies dans le cours dans le cas convexe avec des inégalités larges.

Soit J une fonction dérivable. Prouvons tout d'abord que J est strictement convexe si et seulement si

$$J(v) > J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle \quad \forall\, u, v \in V \quad \text{avec} \quad u \neq v.$$

Soit J une fonction strictement convexe, u et $v \in V$ tels que $u \neq v$. On a

$$J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \geq J(u) + \Big\langle J'(u), \frac{v-u}{2}\Big\rangle.$$

De plus

$$J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) < \frac{J(u)+J(v)}{2}.$$

Ainsi,

$$J(v) > J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle.$$

Réciproquement, si J vérifie cette dernière inégalité, pour tout couple (u, v), J est convexe. Ainsi, pour tout u et v, non seulement l'inégalité précédente est vérifiée, mais on a

$$2J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \geq 2J(v) + \langle J'(u), u - v\rangle.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$2J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) > J(u) + J(v).$$

Reste à prouver l'équivalence entre la stricte convexité et la deuxième inégalité.

Si J est une fonction strictement convexe, on vient de prouver que

$$J(v) > J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle.$$

En commutant u et v dans cette inégalité, on obtient

$$J(u) > J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle.$$

Par sommation, on en déduit que

$$0 > \langle J'(v) - J'(u), u - v\rangle.$$

Réciproquement, si une fonction J vérifie cette inégalité pour tout couple (u, v), elle est convexe. Ainsi,

$$J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \geq J(u) + \Big\langle J'(u), \frac{u-v}{2}\Big\rangle$$

et

$$J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \geq J(v) + \Big\langle J'(v), \frac{v-u}{2}\Big\rangle,$$

d'où

$$\begin{aligned} J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) &\geq \frac{J(u)+J(v)}{2} + \frac{1}{4}\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle \\ &> \frac{J(u)+J(v)}{2} \end{aligned}$$

et J est strictement convexe.

Exercice 10.1.8 Soit a une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$. Soit L une forme linéaire continue sur V. On pose $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)$. Montrer que J est deux fois dérivable sur V et que $J''(u)(v,w) = a(v,w)$ pour tout $u, v, w \in V$. Appliquer ce résultat aux exemples des Exercices **10.1.3**, **10.1.4**, **10.1.5**.

Correction. Tout d'abord, on montre que J est dérivable. En effet,

$$J(u+v) = J(u) + a(u,v) + L(v) + \frac{1}{2}a(v,v)$$

et comme a est continue, $a(v,v) = o(v)$. On a donc $J'(u) = a(u,.) + L$. Montrons que J' est lui même dérivable au sens de Fréchet :

$$J'(u+w) = a(u,.) + L + a(w,.) = J'(u) + a(w,.).$$

Ainsi, $J''(u)w = a(w,.)$ ou encore $J''(u)(v,w) = a(v,w)$.

La fonctionnelle $J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$ de l'Exercice 10.1.3 est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}^N$ et $J''(x)(X,Y) = AX \cdot Y$.

La fonctionnelle $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega uv\,dx - \int_\Omega fu\,dx$ de l'Exercice 10.1.4 est deux fois dérivable dans $L^2(\Omega)$ et $J''(u)(v,w) = \int_\Omega vw\,dx$.

La fonctionnelle $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,dx - \int_\Omega fu\,dx$ de l'Exercice 10.1.5 est deux fois dérivable dans $H^1_0(\Omega)$ et $J''(u)(v,w) = \int_\Omega(\nabla v \cdot \nabla w + vw)\,dx$.

Exercice 10.1.9 Montrer que si J est deux fois dérivable sur V les conditions des Propositions **10.1.4** et **10.1.5** sont respectivement équivalentes à

$$J''(u)(w,w) \geq 0 \quad \text{et} \quad J''(u)(w,w) \geq \alpha\|w\|^2 \quad \forall\, u, w \in V\ . \tag{10.4}$$

Correction. Montrons que pour tout $\alpha \geq 0$, les conditions de la proposition **10.1.5** sont équivalentes à

$$J''(u)(w,w) \geq \alpha\|w\|^2, \quad \forall u, w \in V$$

(l'équivalence avec les conditions de la Proposition **10.1.4** est obtenue en choisissant $\alpha = 0$). Supposons que pour tout u et v,

$$J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u\rangle + \frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2.$$

Comme J est deux fois différentiable,

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u+w) \\ &= J(u) + \langle J'(u), w\rangle + \frac{1}{2}J''(w,w) + o(\|w\|^2), \end{aligned}$$

où $w = v - u$. Ainsi, pour tout w,

$$J''(u)(w,w) + o(\|w\|^2) \geq \alpha\|w\|^2.$$

Soit λ un réel non nul. Quitte à remplacer w par λw dans l'équation précédente, il vient

$$\lambda^2 J''(u)(w,w) + o(\lambda^2\|w\|^2) \geq \alpha\lambda^2\|w\|^2$$

et

$$J''(u)(w,w) + o(\lambda^2\|w\|^2)/\lambda^2 \geq \alpha\|w\|^2$$

En faisant tendre λ vers zéro, on obtient $J''(w,w) \geq \alpha\|w\|^2$. Réciproquement, si $J''(w,w) \geq \alpha\|w\|^2$, On pose $f(t) = J(u + t(u-v))$. La fonction f est deux fois dérivable,

$$f'(t) = \langle J'(u + t(v-u)), v - u\rangle$$

et

$$f''(t) = J''(u + t(v-u))(v-u, v-u) \geq \alpha\|v-u\|^2.$$

Ainsi,

$$f'(1) - f'(0) = \int_0^1 f''(t)dt \geq \alpha\|u-v\|^2$$

c'est à dire

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle \geq \alpha\|u-b\|^2.$$

Exercice 10.2.1 Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V. Pour $x \in V$, on cherche la projection $x_K \in K$ de x sur K (voir le Théorème **12.1.10**)

$$\|x - x_K\|^2 = \min_{y\in K}\left\{J(y) := \|x-y\|^2\right\}.$$

Montrer que la condition nécessaire et suffisante

$$\langle J'(x_K), y - x_K\rangle \geq 0 \quad \forall\, y \in K \tag{10.5}$$

du Théorème **10.2.1** se ramène exactement à

$$\langle x_K - x, x_K - y\rangle \leq 0, \qquad \forall y \in K. \tag{10.6}$$

Correction. Soit

$$J(y) = \|x-y\|^2.$$

La fonction J est dérivable de plus, pour tous éléments x_K et y de V, $\langle J'(x_K), y - x_K\rangle = 2\langle x - x_K, x_K - y\rangle$. La condition d'optimalité de x_K (10.5) est

$$\langle J'(x_K), y - x_K\rangle \geq 0 \text{ pour tout } y \in K,$$

c'est à dire

$$\langle x - x_K, x_K - y\rangle \geq 0 \text{ pour tout } y \in K,$$

qui n'est rien d'autre que (10.6).

Exercice 10.2.2 Soit A une matrice réelle d'ordre $p \times n$ et $b \in \mathbb{R}^p$. On considère le problème "aux moindres carrés"

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2.$$

Montrer que ce problème admet toujours une solution et écrire l'équation d'Euler correspondante.

Correction. On pose

$$J(x) = \|Ax - b\|^2.$$

Soit K l'orthogonal du noyau de A. On introduit le réel α définit par

$$\alpha = \inf_{u\in K, \|u\|=1} \|Au\|^2.$$

Comme la sphère unité de K est un fermé compact, l'infimum est atteint en un élément u de cette dernière. De plus, u ne peut appartenir à la fois au noyau de A et à son orthogonal, car dans ce cas $u \cdot u = 0$ d'une part et $\|u\|^2 = 1$ d'autre part. On en déduit que α est strictement positif. On en déduit aisément que J est α-convexe sur K convexe. Elle admet donc un unique minimum sur K qui est un minimum sur $\mathbb{R}^n$, car $J(x + y) = J(x)$ pour tout élément y du noyau de A. Comme

$$\langle J'(x), y\rangle = 2(Ax - b) \cdot Ay,$$

l'équation d'Euler correspondante $J'(x) = 0$ est

$$A^*Ax = A^*b.$$

Exercice 10.2.3 On reprend l'Exemple **9.1.6**

$$\inf_{x\in\mathrm{Ker}B} \left\{ J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x \right\}$$

avec A matrice symétrique carrée d'ordre n, et B de taille $m \times n$ ($m \leq n$). Montrer qu'il existe une solution si A est positive et qu'elle est unique si A est définie positive. Montrer que tout point de minimum $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$A\overline{x} - b = B^*p \text{ avec } p \in \mathbb{R}^m.$$

Correction. La fonctionnelle J est dérivable et $J'(x) = Ax - b$. Ainsi, un élément $\overline{x}$ de $\operatorname{Ker} B$ est un minimiseur de J sur $\operatorname{Ker} B$ si et seulement si, pour tout $y \in \operatorname{Ker} B$, $(A\overline{x} - b) \cdot y = 0$, c'est à dire $A\overline{x} - b \in (\operatorname{Ker} B)^\perp$. Enfin,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ker} B)^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \cdot y = 0, \forall y \in \mathbb{R}^m\}^\perp \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot B^* y = 0, \forall y \in \mathbb{R}^m\}^\perp \\
&= ((\operatorname{Im} B^*)^\perp)^\perp \\
&= \operatorname{Im} B^*.
\end{aligned}$$

Il existe donc $p \in \mathbb{R}^m$ tel que $A\overline{x} - b = B^* p$.

Exercice 10.2.4 On reprend l'Exemple **9.1.10**. Montrer que l'équation d'Euler vérifiée par le point de minimum $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx \right\}$$

est précisément la solution du problème variationnelle consistant à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

(On retrouve ainsi un résultat de la Proposition **5.2.7**.)

Correction.

$$J(u + v) = J(u) + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f v) \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx.$$

Ainsi, J est dérivable en tout point u de $H_0^1(\Omega)$ et

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f v) \, dx,$$

Au point de minimum de J, $J'(u) = 0$, c'est à dire

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)$$

Exercice 10.2.5 Soit K un convexe fermé non vide de V, soit a une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur V, et soit L une forme linéaire continue sur V. Montrer que $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$ admet un unique point de minimum dans K, noté u. Montrer que u est aussi l'unique solution du problème (appelé inéquation variationnelle)

$$u \in K \quad \text{et} \quad a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall\, v \in K\ .$$

Correction. La forme bilinéaire a étant coercive, la fonction J est fortement convexe. Elle admet donc un unique minimum u sur le convexe fermé non vide K. De plus, J étant symétrique,

$$\langle J'(u), w \rangle = a(u, w) - L(w).$$

Un élément u de K est un minimiseur de J sur K si et seulement si

$$\langle J'(u), v-u\rangle \geq 0, \text{ pour tout } v \in K,$$

c'est à dire

$$a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K.$$

Exercice 10.2.6 Soit J_1 et J_2 deux fonctions convexes continues sur une partie convexe fermée non vide $K \subset V$. On suppose que J_1 seulement est dérivable. Montrer que $u \in K$ est un minimum de $J_1 + J_2$ si et seulement si

$$\langle J_1'(u), v-u\rangle + J_2(v) - J_2(u) \geq 0 \quad \forall\, v \in K\ .$$

Correction. Soit u minimum de $J_1 + J_2$ sur K, alors pour tout $v \in K$ et $h \in]0,1[$, $u + h(v-u) \in K$ et

$$\frac{J_1(u+h(v-u)) - J_1(u)}{h} + \frac{J_2(u+h(v-u)) - J_2(u)}{h} \geq 0$$

De plus,

$$J_2(u+h(v-u)) = J_2((1-h)u + hv) \leq (1-h)J_2(u) + hJ_2(v)$$

d'où

$$\frac{J_1(u+h(v-u)) - J_1(u)}{h} + J_2(v) - J_2(u) \geq 0.$$

En passant à la limite en $h \to 0$, on obtient

$$\langle J_1'(u), v-u\rangle + J_2(v) - J_2(u) \geq 0 \text{ pour tout } v \in K$$

La réciproque découle de (**10.7**). Si J_1 et J_2 vérifient l'équation précédente, J_1 étant convexe, on a

$$J_1(v) \geq J_1(u) + \langle J_1'(u), v-u\rangle.$$

Ainsi,

$$J_1(v) - J_1(u) + J_2(v) - J_2(u) \geq 0 \text{ pour tout } v \in K$$

et u est un minimiseur de $J_1 + J_2$ sur K.

Exercice 10.2.7 Soit K un sous-ensemble d'un espace de Hilbert V. Montrer que pour tout $v \in K$,

$$K(v) = \left\{ \begin{array}{l} w \in V\ ,\ \exists\,(v^n) \in K^{\mathbb{N}}\ ,\ \exists\,(\varepsilon^n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}\ , \\ \lim_{n\to+\infty} v^n = v\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \varepsilon^n = 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{v^n - v}{\varepsilon^n} = w \end{array} \right\}$$

est un cône fermé et que $K(v) = V$ si v est intérieur à K. Donner un exemple où $K(v)$ est réduit à $\{0\}$.

Correction. Montrons que $K(v)$ est un cône. Tout d'abord, 0 appartient toujours à $K(v)$ (il suffit de choisir $v_n = v$). Soit w un élément de $K(v)$ et α un réel strictement positif. D'après la définition de $K(v)$, il existe une suite v_n d'éléments de K, une suite ε_n de réels positifs tels que v_n converge vers v, ε_n converge vers zéro et

$$\frac{v_n - v}{\varepsilon_n} \to w.$$

On pose $\widetilde{\varepsilon}_n = \alpha^{-1}\varepsilon_n$. On a

$$\frac{v_n - v}{\widetilde{\varepsilon}_n} \to \alpha w,$$

d'où $\alpha w \in K(v)$ et $K(v)$ est un cône.

Montrons que $K(v)$ est fermé. Soit w un élément de V et w_m une suite d'éléments de $K(v)$ tels que $w_m \to w$. On note $v^{n,m}$ et $\varepsilon^{n,m}$ les suites telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v^{n,m} - v}{\varepsilon^{n,m}} = w_m.$$

Pour tout $\delta > 0$, il existe m tel que

$$\|w_m - w\| \leq \delta/2$$

Comme $(v^{n,m} - v)/\varepsilon^{n,m}$ converge vers w_m lorsque n tend vers l'infini et , il existe n tel que

$$\left\|\frac{v^{n,m} - v}{\varepsilon^{n,m}} - w_m\right\| \leq \delta/2 \qquad \text{et} \qquad \|v^{n,m} - v\| \leq \delta.$$

On a montré que, pour tout $\delta > 0$, il existe $v_\delta = v^{n,m} \in K$ et $\varepsilon_\delta = \varepsilon^{n,m} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\varepsilon_\delta \leq \delta, \qquad \left\|\frac{v_\delta - v}{\varepsilon_\delta} - w\right\| \leq \delta \qquad \text{et} \qquad \|v_\delta - v\| \leq \delta.$$

Ainsi, w appartient à $K(v)$.

Si $K(v)$ est à l'intérieur de K, il existe un réel r strictement positif tel que la boule de rayon r centrée en v soit incluse dans K. Pour tout élément $w \in V$,

$$w = \lim_{n\to 0} \frac{v^n - v}{\varepsilon^n} \in K(v),$$

où $v^n = v + \frac{rw}{n\|w\|}$ et $\varepsilon^n = \frac{r}{n\|w\|}$. En d'autres termes, $V \subset K(v)$, d'où $K(v) = V$. Enfin, pour $K = 0$, $K(0) = \{0\}$.

Exercice 10.2.8 Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n, et B une matrice de taille $m \times n$ avec $m \leq n$. A l'aide des conditions d'optimalité du Théorème **10.2.8**, déterminer une expression explicite de la solution $\overline{x}$ du problème d'optimisation

$$\min_{Bx=c} \left\{ J(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x \right\},$$

où $c \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur donné.

Correction. Les conditions d'optimalité s'écrivent à nouveau

$$A\overline{x} - b = B^*p.$$

Ainsi, $\overline{x} = A^{-1}(b + B^*p)$ et comme $B\overline{x} = c$. Si B est de rang m, $BA^{-1}B^*$ est inversible et

$$p = (BA^{-1}B^*)^{-1}(c - BA^{-1}b) \text{ et } x = A^{-1}b + A^{-1}B^*(BA^{-1}B^*)^{-1}(c - BA^{-1}b).$$

Si B n'est pas de rang maximal, les contraintes sont soit redondantes, soit contradictoires. Si elles sont contradictoires, il n'y a pas d'optimum (l'ensemble de minimisation est vide). Si les contraintes sont redondantes, il existe $p \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$BA^{-1}B^*p = c - BA^{-1}b,$$

et p est défini à l'addition d'un élément de $\operatorname{Ker} B^*$ près. Par contre, $\overline{x}$ est défini de manière unique par la relation $\overline{x} = A^{-1}(b + B^*p)$.

Exercice 10.2.9 On reprend l'Exemple **9.1.7**. Soit A une matrice symétrique d'ordre n et $J(x) = Ax \cdot x$. A l'aide du Théorème **10.2.8**, montrer que les points de minimum de J sur la sphère unité sont des vecteurs propres de A associés à la plus petite valeur propre.

Correction. On note K la sphère unité, définie par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F(x) = 0\},$$

où $F(x) = 1 - |x|^2$. Les fonctions J et F sont toutes deux dérivables et en identifiant $\mathbb{R}^N$ et son dual à l'aide du produit scalaire euclidien, on a

$$J'(x) = 2Ax \quad F'(x) = -2x.$$

Ainsi, d'après le Théorème **10.2.8**, si $\overline{x}$ est un point de minimum de J sur la sphère unité, il existe λ tel que

$$J'(\overline{x}) + \lambda F'(\overline{x}) = 0,$$

c'est à dire

$$A\overline{x} - \lambda\overline{x} = 0.$$

Toute solution optimale $\overline{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ. Notons que l'existence d'un minimiseur est évidente, K étant compact et J continue. Le problème de minimisation de J sur K est donc équivalent au problème de minimisation de J sur l'ensemble des vecteurs propres de A de norme un. Or pour tout vecteur propre x de A (tel que $\|x\| = 1$) de valeur propre μ, on a

$$J(x) = \mu.$$

Le minimum de J est donc atteint pour les vecteurs propres de plus petite valeur propre.

Exercice 10.2.10 Rappelons que le problème de Didon (Exemple **9.1.11**) consiste de déterminer ξ et $y : [0, \xi] \to \mathbb{R}$ tel que $y(0) = y(\xi) = 0$, maximisant

$$J(y) = \int_0^\xi y(x)dx,$$

sous la contrainte

$$L(y) = \int_0^\xi \sqrt{1 + |y'|^2}dx - l = 0.$$

En utilisant les résultats précédents et ceux de l'Exercice **10.1.6**, montrer que la solution du problème de Didon est nécessairement un arc de cercle.

Correction. Soit y et ξ solution du problème de Didon. En particulier, y est solution du même problème pour ξ fixé. On souhaite prouver que toute solution y à ce dernier problème est un arc de cercle.
D'après l'exercice **10.1.6**, la fonctionnelle L est dérivable et pour toute fonction $v \in H_0^1(]0, \xi[)$, on a

$$\langle L'(y), v\rangle = \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1 + |y'|^2}} y'v'dx.$$

La fonctionnelle J est également dérivable car linéaire. Ainsi, les conditions d'optimalité d'ordre un (Théorème **10.2.8**) impliquent que si y est une solution, il existe λ tel que

$$J'(y) + \lambda L'(y) = 0$$

pourvu que $L'(y) \neq 0$. Le cas $L'(y) = 0$ se traite de manière trivial et conduit à la solution $y = 0$. On a donc

$$\int_0^\xi v + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + |y'|^2}} y'v'dx = 0$$

pour tout $v \in H_0^1(]0, \xi[)$. En intégrant par partie le second membre de cette équation, on en déduit que

$$\lambda \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + |y'|^2}}\right)' = 1$$

et qu'il existe une constante C telle que

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + |y'|^2}} = \lambda^{-1}x + C. \tag{10.7}$$

Dans un premier temps, on élève cette équation au carré afin de déterminer $|y'|^2$ en fonction de x. On obtient

$$\frac{1}{1 + |y'|^2} = 1 - (\lambda^{-1}x + C)^2.$$

En substituant cette expression dans l'équation (10.7), on en déduit que

$$y' = \frac{\lambda^{-1}x + C}{\sqrt{1 - (\lambda x + C)^2)}}.$$

Par intégration, il existe une constante D telle que

$$y = -\lambda\sqrt{1 - (\lambda^{-1}x + C)^2} + D.$$

Pour conclure, il suffit de constater que

$$(y - D)^2 + (x + \lambda C)^2 = \lambda^2.$$

Ainsi, $(x, y(x))$ est bien un arc de cercle. Remarquons que le multiplicateur de Lagrange λ associé à la contrainte sur la longueur n'est autre que le rayon du cercle obtenu.

Exercice 10.2.11 On étudie la première valeur propre du Laplacien dans un domaine borné Ω (voir la Section **7.3**). Pour cela on introduit le problème de minimisation sur $K = \{v \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega v^2 dx = 1\}$

$$\min_{v\in K} \left\{ J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right\}.$$

Montrer que ce problème admet un minimum (on montrera que K est compact pour les suites minimisantes à l'aide du Théorème de Rellich **4.3.21**). Écrire l'équation d'Euler de ce problème et en déduire que la valeur du minimum est bien la première valeur propre et que les points de minimum sont des vecteurs propres associés.

Correction. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on note

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(\Omega)$. Soit u_n une suite minimisante de J sur K. D'après le Théorème de Rellich, il existe une sous suite de u_n (que nous noterons également u_n) et un élément $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que u_n converge vers u dans $L^2(\Omega)$. Montrons que (u_n) est une suite convergente dans $H_0^1(\Omega)$. Tout d'abord,

$$\left| \frac{u_n - u_p}{2} \right|_{H_0^1}^2 = \frac{|u_n|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u_p|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \left| \frac{u_n + u_p}{2} \right|_{H_0^1}^2. \tag{10.8}$$

On note

$$\mu = \inf_{v\in K} J(v)$$

et

$$\alpha_{n,p} = \left\| \frac{u_n + u_p}{2} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme u_n converge vers u dans $L^2(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et $u \in K$. De plus, $\alpha_{n,p}$ converge vers 1 lorsque n et p tendent vers l'infini. D'après l'équation (10.8),

$$\left| \frac{u_n - u_p}{2} \right|_{H_0^1}^2 = \frac{|u_n|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u_p|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \alpha_{n,p}^2 \left| \frac{u_n + u_p}{2\alpha_{n,p}} \right|_{H_0^1}^2.$$

Comme $\frac{u_n+u_p}{2\alpha_{n,p}} \in K$, on a donc

$$\left|\frac{u_n - u_p}{2}\right|^2_{H^1_0} \leq \frac{|u_n|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u_p|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2} - \alpha^2_{n,p}\mu.$$

Ainsi, $|u_n - u_p|_{H^1_0} \to 0$ lorsque n et p tendent vers l'infini et u_n est une suite de Cauchy dans $H^1_0(\Omega)$. Ainsi, u_n converge dans $H^1_0(\Omega)$ vers u et $J(u) = \mu$.

Soit $F(v) = 1 - \int_\Omega |v|^2 dx$. L'ensemble de minimisation K est donné par

$$K = \{v \in H^1_0(\Omega) \ : \ F(v) = 0\}.$$

De plus, F est dérivable et pour tout v, $w \in H^1_0(\Omega)$, on a

$$\langle F'(v), w\rangle = -2 \int_\Omega vwdx.$$

de même, J est dérivable et

$$\langle J'(v), w\rangle = 2 \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w dx.$$

D'après le Théorème **10.2.8**, comme F' est non nul pour tout élément de K (et donc en particulier pour u), il existe λ tel que

$$J'(u) + \lambda F'(u) = 0,$$

c'est à dire tel que pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uvdx.$$

Ainsi, u est un vecteur propre de valeur propre λ. En choisissant $v = u$ dans l'expression précédente, on en déduit de plus que $\lambda = \mu$. Enfin, on vérifie sans peine que λ est nécessairement la plus petite valeur propre du Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet.

Exercice 10.2.12 Soit A une matrice $n \times n$ symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ non nul.

1. Montrer que les problèmes

$$\sup_{Ax\cdot x \leq 1} b \cdot x \quad \text{et} \quad \sup_{Ax\cdot x = 1} b \cdot x$$

   sont équivalents et qu'ils ont une solution. Utiliser le Théorème **10.2.8** pour calculer cette solution et montrer qu'elle est unique.

2. On introduit un ordre partiel dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n en disant que $A \geq B$ si et seulement si $Ax \cdot x \geq Bx \cdot x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Déduire de la question précédente que, si $A \geq B$, alors $B^{-1} \geq A^{-1}$.

Correction. 1. Tout d'abord, les deux problèmes admettent tous deux une solution en tant que problème de maximisation d'une fonction continue sur un compact non vide. On a pose $J(x) = b \cdot x$. Soit $\overline{x}$ la solution du problème de maximisation de J sur

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax \cdot x \leq 1\}.$$

Comme la dérivée de J est égale à b supposé non nul, le maximum de J sur K ne peut être atteint dans l'intérieur de K. Il est donc atteint sur le bord, d'où

$$\sup_{Ax \cdot x \leq 1} Ax \cdot x = \sup_{Ax \cdot x = 1} Ax \cdot x.$$

Les deux problèmes sont équivalents. Reste à déterminer la solution de ces problèmes. D'après les conditions d'optimalité du premier ordre, il existe λ tel que

$$A\overline{x} - \lambda b = 0.$$

Ainsi,

$$\overline{x} = \lambda A^{-1} b.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le multiplicateur de Lagrange λ pour définir $\overline{x}$ de manière unique. Comme $A\overline{x} \cdot \overline{x} = 1$, on en déduit que

$$\lambda^2 = (A^{-1} b \cdot b)^{-1}.$$

On en déduit (λ est nécessairement positif) que

$$\lambda = (A^{-1} b \cdot b)^{-1/2},$$

ce qui détermine $\overline{x}$ de manière unique.
2. Soit A et B deux matrices symétriques définies positives telles que $A \geq B$. Pour tout b non nul, on a

$$(A^{-1} b \cdot b)^{1/2} = \sup_{Ax \cdot x \leq 1} b \cdot x \leq \sup_{Bx \cdot x \leq 1} b \cdot x = (B^{-1} b \cdot b)^{1/2}.$$

d'où $B^{-1} \geq A^{-1}$.

Exercice 10.2.13 En théorie cinétique des gaz les molécules de gaz sont représentées en tout point de l'espace par une fonction de répartition $f(v)$ dépendant de la vitesse microscopique $v \in \mathbb{R}^N$. Les quantités macroscopiques, comme la densité du gaz ρ, sa vitesse u, et sa température T, se retrouvent grâce aux moments de la fonction $f(v)$

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)\, dv \ , \quad \rho u = \int_{\mathbb{R}^N} v\, f(v)\, dv \ , \quad \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{N}{2}\rho T = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 f(v)\, dv \ . \tag{10.9}$$

Boltzmann a introduit l'entropie cinétique $H(f)$ définie par

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(v) \log\big(f(v)\big)\, dv \ .$$

Montrer que H est strictement convexe sur l'espace des fonctions $f(v) > 0$ mesurables telles que $H(f) < +\infty$. On minimise H sur cet espace sous les contraintes de moment (10.9), et on admettra qu'il existe un unique point de minimum $M(v)$. Montrer que ce point de minimum est une Maxwellienne définie par

$$M(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2T}\right).$$

Correction. La fonction $\varphi(t) = t\log(t)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, en effet, $\varphi''(t) = 1/t > 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} H(\theta f + (1-\theta)g) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\theta f + (1-\theta)g)dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \theta\varphi(f) + (1-\theta)\varphi(g)dv \\ &= \theta H(f) + (1-\theta)H(g). \end{aligned}$$

Ainsi, H est convexe. De plus, l'inégalité est une égalité si et seulement si

$$\varphi(\theta f + (1-\theta)g) = \theta\varphi(f) + (1-\theta)\varphi(g)$$

presque partout. En particulier, si θ est différent de 0 et 1, on en déduit que $f = g$ presque partout. La fonction H est donc strictement convexe (quitte à identifier les fonctions égales presque partout). On a

$$\langle H'(f), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} ((\log f(v)) + 1)g(v)\,dv.$$

Les contraintes sont linéaires et les conditions d'optimalité du premier ordre impliquent qu'il existe λ_1 et λ_3 réels, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((\log f(v)) + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot v + |v|^2\lambda_3)g(v)\,dv = 0$$

pour tout g. En d'autres termes,

$$(\log f(v)) + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot v + |v|^2\lambda_3 = 0$$

presque partout ou encore

$$f(v) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 \cdot v - \lambda_3|v|^2).$$

Reste à déterminer les multiplicateurs de Lagrange λ_1, λ_2 et λ_3. Un calcul un peu fastidieux permet de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 \cdot v - \lambda_3|v|^2)dv = \sqrt{\pi}^N \frac{e^{-(1+\lambda_1)}e^{|\lambda_2|^2/4\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_3}^N},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v\exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 \cdot v - \lambda_3|v|^2)dv = -\sqrt{\pi}^N \lambda_2 \frac{e^{-(1+\lambda_1)}e^{|\lambda_2|^2/4\lambda_3}}{2\sqrt{\lambda_3}^{N+2}}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \exp(-1-\lambda_1-\lambda_2\cdot v-\lambda_3|v|^2)dv =$$
$$\frac{e^{-(1+\lambda_1)}e^{|\lambda_2|^2}4\lambda_3}{|\lambda_2|^3\sqrt{\lambda_3}^{N-1}}\left(\frac{N}{2}\sqrt{\pi}^N\left(\frac{|\lambda_2|}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^3+\frac{\sqrt{\pi}^N}{4}\left(\frac{|\lambda_2|}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^5\right).$$

Les contraintes vérifiées par v nous permettent de déterminer les multiplicateurs de Lagrange. On obtient $\lambda_2 = -u/T$, $\lambda_3 = (2T)^{-1}$ et $e^{-(1+\lambda_1)} = \sqrt{2\pi T}^{-N} e^{-|u|^2/2T}\rho$, d'où on conclut que $f = M$.

Exercice 10.2.14 Calculer la condition nécessaire d'optimalité du second ordre pour chacun des problèmes d'optimisation suivants
1. Optimisation quadratique à contraintes linéaires (Exemple **9.1.6**)

$$\inf_{x\in \operatorname{Ker}B}\left\{J(x)=\frac{1}{2}Ax\cdot x-b\cdot x\right\},$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive, B une matrice rectangulaire de taille $m\times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
2. Première valeur propre (Exemple **9.1.7**)

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|=1}\{J(x)=Ax\cdot x\},$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie.

Correction.

1. On note F la fonction contrainte $F(x)=Bx$. On a
$$J''(u)(v,v)=Av\cdot v$$
De plus, $F''=0$. La condition d'optimalité d'ordre deux est donc
$$Av\cdot v\geq 0$$
pour tout $v\in \operatorname{Ker} B$. Comme A est définie positive, cette condition est toujours vérifiée.
2. On note F la fonction de contrainte $F(x)=x\cdot x-1$. D'après la condition d'optimalité du premier ordre, si u est une solution du problème de minimisation, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que
$$2Au+\lambda u=0.$$
Comme
$$J''(u)(v,v)=2Av\cdot v$$
et $F''(u)(v,v)=v\cdot v$, la condition d'optimalité d'ordre deux est donc
$$2Av\cdot v+\lambda v\cdot v\geq 0$$
pour tout v tel que $v\cdot u=0$.

Exercice 10.2.15 Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n, et B une matrice de taille $m \times n$ avec $m \leq n$ et de rang m. On considère le problème de minimisation

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n,\ Bx\leq c} \left\{ J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x \right\},$$

Appliquer le Théorème **10.2.15** pour obtenir l'existence d'un multiplicateur de Lagrange $p \in \mathbb{R}^m$ tel qu'un point de minimum $\overline{x}$ vérifie

$$A\overline{x} - b + B^*p = 0\ , \quad p \geq 0\ , \quad p \cdot (B\overline{x} - c) = 0.$$

Correction. L'ensemble des solutions admissibles est défini par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ F_i(x) \leq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, m\},$$

où $F_i(x) = B_i x - c_i$. Les fonctions F_i sont dérivables et $\langle F'(x), y\rangle = B_i y = (B_i)^* \cdot y$. De même, la fonction objectif

$$J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$$

est dérivable et

$$J'(x) = Ax - b.$$

Comme les contraintes sont affines, elles sont automatiquement qualifiées. On peut appliquer le Théorème **10.2.15**. Si $\overline{x}$ est la solution du problème de minimisation de J sur K, il existe donc $p \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$J'(x) + \sum_i p_i F_i'(x) = 0, \quad p_i \geq 0, \quad p_i F_i' = 0,$$

c'est à dire

$$A\overline{x} - b + \sum_i p_i (B_i)^* = 0, \quad p_i \geq 0, \quad p_i(B_i\overline{x} - c_i) = 0.$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$A\overline{x} - b + B^*p = 0, \quad p \geq 0, \quad p \cdot (B\overline{x} - c) = 0.$$

Notons que K étant convexe et J fortement convexe, il existe un unique minimiseur au problème considéré.

Exercice 10.2.16 Soit $f \in L^2(\Omega)$ une fonction définie sur un ouvert borné Ω. Pour $\epsilon > 0$ on considère le problème de régularisation suivant

$$\min_{u\in H_0^1(\Omega),\ \|u-f\|_{L^2(\Omega)}\leq\epsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Montrer que ce problème admet une unique solution u_ϵ. Montrer que, soit $u_\epsilon = 0$, soit il existe $\lambda > 0$ tel que u_ϵ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + \lambda(u_\epsilon - f) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Correction. On note J la fonction objectif

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

et K l'ensemble des solutions admissibles, c'est à dire

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \ : \ F(v) \leq 0\},$$

où $F(v) = \|v - f\|^2_{L^2(\Omega)} - \epsilon^2$. L'ensemble K est un convexe fermé tandis que la fonctionnelle J est fortement convexe. Il existe donc une unique solution u_ϵ au problème de minimisation de J sur K. Les fonctionnelles J et F sont toutes deux dérivables et, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\langle J'(u_\epsilon), v\rangle = 2\int_\Omega \nabla u_\epsilon . \nabla v dx$$

et

$$\langle F'(u_\epsilon), v\rangle = 2\int_\Omega (u_\epsilon - f) v dx.$$

Si la contrainte est active, c'est à dire si $F(u_\epsilon) = 0$, on a $F'(u_\epsilon) \neq 0$. Les contraintes sont donc nécessairement qualifiées et d'après le Théorème **10.2.15**, il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que

$$J'(u_\epsilon) + \lambda F'(u_\epsilon) = 0, \quad \lambda F(u_\epsilon) = 0,$$

c'est à dire tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon . \nabla v + \lambda(u_\epsilon - f) v dx = 0, \quad \lambda(\|u_\epsilon - f\|^2_{L^2} - \epsilon) = 0.$$

On déduit de la première équation que u_ϵ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + \lambda(u_\epsilon - f) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si la contrainte n'est pas active, $\lambda = 0$ et $u = 0$ (cas $\epsilon \geq \|f\|_{L^2}$).

Exercice 10.3.1 On considère le problème d'optimisation, dit perturbé

$$\inf_{F_i(v) \leq u_i, \ 1 \leq i \leq m} J(v), \tag{10.10}$$

avec $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$.
On se place sous les hypothèses du Théorème **10.3.4** de Kuhn et Tucker. On note $m^*(u)$ la valeur minimale du problème perturbé (10.10).

1. Montrer que si p est le multiplicateur de Lagrange pour le problème non perturbé (c'est-à-dire (10.10) avec $u = 0$), alors

$$m^*(u) \geq m^*(0) - pu \ . \tag{10.11}$$

2. Déduire de (10.11) que si $u \mapsto m^*(u)$ est dérivable, alors

$$p_i = -\frac{\partial m^*}{\partial u_i}(0).$$

Interpréter ce résultat (cf. l'Exemple **9.1.8** en économie).

Correction.

1. D'après le Théorème du **10.2.15**, la solution $\overline{v}$ du problème (10.10) non perturbé est telle qu'il existe $p_i \geq 0$ tel que

$$J'(\overline{v}) + p_i F_i'(\overline{v}) = 0, \quad p_i F_i(\overline{v}) = 0. \tag{10.12}$$

Comme les fonctions J et F_i sont supposées convexes, pour tout v, on a

$$J(v) + p \cdot F(v) - J(\overline{v}) - p \cdot F(\overline{v}) \geq \langle J'(\overline{v}) + p \cdot F'(\overline{v}), v - \overline{v} \rangle.$$

D'après l'équation (10.12), on a donc

$$J(v) + p \cdot F(v) - J(\overline{v}) \geq 0.$$

Enfin, si v est la solution du problème perturbé, on en déduit comme $F(v) \leq u$ que

$$m^*(u) + p \cdot u - m^*(0) \geq 0.$$

2. Supposons que l'application $u \mapsto m^*(u)$ soit dérivable. Dans ce cas,

$$m^*(u) = m^*(0) + \frac{\partial m^*}{\partial u}(0) \cdot u + o(u).$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\left(\frac{\partial m^*}{\partial u}(0) + p\right) \cdot u + o(u) \geq 0$$

pour tout u. En divisant cette équation par la norme de u, on obtient que pour tout élément u de norme unité,

$$\left(\frac{\partial m^*}{\partial u}(0) + p\right) \cdot u \geq 0.$$

En appliquant cette inégalité à $-u$ au lieu de u, on en déduit que

$$\frac{\partial m^*}{\partial u}(0) + p = 0.$$

Lorsque u augmente, l'ensemble des solutions admissibles croît. Ainsi, la valeur de $m^*(u)$, solution du problème de minimisation, ne peut que décroître. Grâce au multiplicateur de Lagrange p, on a une information supplémentaire : il nous permet de déterminer le taux de décroissance de $m^*(u)$ en fonction de u. Plus p est important, plus une petite variation de u par rapport à zéro entraînera une forte variation de m^*. L'exemple **9.1.8** modélise les choix d'un ménage en matière de consommation entre différents produits pour un budget donné. Le ménage cherche à maximiser sa "fonction d'utilité" sous sa contrainte budgétaire. Le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire n'est autre que l'utilité marginale, c'est à dire correspond à l'augmentation de la fonction d'utilité du ménage par rapport à l'augmentation de leur budget.

Exercice 10.3.2 Donner un exemple de Lagrangien pour lequel l'inégalité

$$\inf_{v\in U}\left(\sup_{q\in P}\mathcal{L}(v,q)\right) \geq \sup_{q\in P}\left(\inf_{v\in U}\mathcal{L}(v,q)\right). \tag{10.13}$$

est stricte avec ses deux membres finis.

Correction. On pose $U=\mathbb{R}$, $P=\mathbb{R}$ et

$$\mathcal{L}(v,q)=F(v+q),$$

où F est une fonction bornée non constante. On a alors

$$\inf_{v\in U}\left(\sup_{q\in P}\mathcal{L}(v,q)\right) = \sup_{\mathbb{R}} F > \inf_{\mathbb{R}} F = \sup_{q\in P}\left(\inf_{v\in U}\mathcal{L}(v,q)\right).$$

Exercice 10.3.3 Soit U (respectivement P) un convexe compact non vide de V (respectivement Q). On suppose que le Lagrangien est tel que $v\to\mathcal{L}(v,q)$ est strictement convexe continue sur U pour tout $q\in P$, et $q\to\mathcal{L}(v,q)$ est concave continue sur P pour tout $v\in U$. Montrer alors l'existence d'un point selle de $\mathcal{L}$ sur $U\times P$.

Correction. Pour tout $q\in P$, on note $\varphi(q)$ l'unique minimiseur sur U de l'application $v\mapsto\mathcal{L}(v,q)$ (l'existence est assurée par la compacité de U et la continuité de $\mathcal{L}$, l'unicité par la stricte convexité de $v\mapsto\mathcal{L}(v,q)$). De plus, on pose

$$F(q)=\mathcal{L}(\varphi(q),q)=\min_{v\in U}\mathcal{L}(v,q).$$

L'application F est l'infimum d'une famille de fonctions concaves, semi-continues supérieurement. Elle est donc elle même concave et semi-continue supérieurement. Comme P est compact et que F est semi-continue supérieurement, F admet au moins un maximum sur P noté q^*. On pose de plus $v^*=\varphi(q^*)$. On va montrer que (v^*,q^*) est un point selle de $\mathcal{L}$ sur $U\times P$, c'est à dire que

$$\mathcal{L}(v^*,q)\leq\mathcal{L}(v^*,q^*)\leq\mathcal{L}(v,q^*)$$

pour tout couple $(v,q)\in U\times P$. La deuxième inégalité est évidente et découle simplement de la définition de $v^*=\varphi(q^*)$. Il reste à prouver que pour tout $q\in V$,

$$\mathcal{L}(v^*,q)\leq\mathcal{L}(v^*,q^*). \tag{10.14}$$

Pour tout $t\in[0,1]$ et tout $q\in V$, on pose

$$v_t=\varphi((1-t)q^*+tq)$$

D'après la concavité de $\mathcal{L}(v, \cdot)$, on a pour tout $v \in U$

$$\mathcal{L}(v, (1-t)q^* + tq) \geq (1-t)\mathcal{L}(v, q^*) + t\mathcal{L}(v, q),$$

d'où on déduit (puisque q^* maximise F sur P et $\mathcal{L}(v_t, q^*) \geq F(q^*)$), que

$$\begin{array}{rcl} F(q^*) & \geq & F((1-t)q^* + tq) = \mathcal{L}(v_t, (1-t)q^* + tq) \\ & \geq & (1-t)\mathcal{L}(v_t, q^*) + t\mathcal{L}(v_t, q) \\ & \geq & (1-t)F(q^*) + t\mathcal{L}(v_t, q), \end{array}$$

ce qui donne en fin de compte que pour tout $q \in V$ et tout $t \neq 0$,

$$F(q^*) \geq \mathcal{L}(v_t, q).$$

Comme U est compact, il existe une suite t_n convergent vers zéro tel que v_{t_n} soit convergente. Soit $\tilde{v}$ la limite de v_{t_n}. D'après l'inégalité précédente, on a

$$F(q^*) = \mathcal{L}(v^*, q^*) \geq \lim \mathcal{L}(v_{t_n}, q) = \mathcal{L}(\tilde{v}, q).$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\tilde{v} = v^*$ et ainsi obtenir l'inégalité (10.14). Or, pour tout n on a

$$\begin{array}{rcl} (1-t_n)\mathcal{L}(v_{t_n}, q^*) + t_n\mathcal{L}(v_{t_n}, q) & \leq & \mathcal{L}(v_{t_n}, (1-t_n)q^* + t_n q) \\ & \leq & \mathcal{L}(v, (1-t_n)q^* + t_n q). \end{array}$$

En passant à la limite, on en déduit que pour tout $v \in U$,

$$\mathcal{L}(\tilde{v}, q^*) \leq \mathcal{L}(v, q^*).$$

Ainsi, $\tilde{v}$ est un minimiseur de $v \mapsto \mathcal{L}(v, q^*)$. Comme cette dernière application est strictement convexe, elle admet au plus un minimiseur et $\tilde{v} = \varphi(q^*) = v^*$.

Exercice 10.3.4 Soit une matrice rectangulaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 6 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -6 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose que deux joueurs choisissent l'un une ligne i, l'autre une colonne j, sans qu'ils ne connaissent le choix de l'autre. Une fois révélé leurs choix, le gain (ou la perte, selon le signe) du premier joueur est déterminé par le coefficient a_{ij} de la matrice A (l'autre joueur recevant ou payant $-a_{ij}$). Montrer que la stratégie optimale de minimisation du risque conduit à un problème de min-max que l'on résoudra. Le jeu est-il équitable avec cette matrice A ?

Correction. Le premier joueur cherche à maximiser son gain quelque soit le choix du deuxième joueur, il choisit donc la ligne i tel que $\min_j a_{i,j}$ soit maximal. En adoptant cette stratégie, son gain minimal est alors

$$G_1 = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Le deuxième joueur tient un raisonnement identique. Son gain minimal est donc

$$G_2 = -\min_j \max_i a_{ij}.$$

On résout aisément ces deux problèmes. La solution au premier problème pour le premier joueur consiste à jouer la première ligne ce qui lui assure un gain au moins nul (il ne peut pas perdre). La stratégie minimisant les risques pour le deuxième joueur consiste à jouer la première colonne ce qui lui assure au moins un gain de -1, c'est à dire au pire une perte de 1. Le jeu n'est pas équitable. Si les deux joueurs adoptent cette stratégie, le premier joueur gagne 1 tandis que le deuxième perd 1.

Exercice 10.4.1 On considère le problème de commande optimal (**10.72**) avec $K = \mathbb{R}^M$, $f = 0$, $z = 0$, et $z_T = 0$. Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$p(t) \cdot y(t) = Dy(T) \cdot y(T) + \int_t^T Qy(s) \cdot y(s)\, ds + \int_t^T R^{-1}B^*p(s) \cdot B^*p(s)\, ds\,.$$

En déduire que s'il existe $t_0 \in [0, T]$ tel que $y(t_0) = 0$, alors $y(t) = p(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Interpréter ce résultat.

Correction. Soit u la solution optimale au problème (**10.72**), y l'état du système et p l'état adjoint correspondants. On rappelle que la commande optimale est $u = -R^{-1}B^*p$. Ainsi, d'après l'équation différentielle ordinaire (**10.71**) vérifiée par y,

$$\frac{dy}{dt} = Ay - BR^{-1}B^*p.$$

De plus, on rappelle que

$$\frac{dp}{dt} = -A^*p - Qy.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(p \cdot y) &= -Qy \cdot y - A^*p \cdot y + p \cdot Ay - B^*p \cdot R^{-1}B^*p \\ &= -Qy \cdot y - R^{-1}B^*p \cdot B^*p.\end{aligned}$$

Par intégration, il vient

$$\begin{aligned}p \cdot y(t) &= p \cdot y(T) + \int_t^T Qy \cdot y + R^{-1}B^*p \cdot B^*pdt \\ &= Dy(T) \cdot y(T) + \int_t^T Qy \cdot y + R^{-1}B^*p \cdot B^*pdt.\end{aligned}$$

S'il existe $t_0 \in [0,T]$ tel que $y(t_0) = 0$, on a $p \cdot y(t_0) = 0$. Comme tous les termes du second membre de la formule précédente sont positifs ou nuls et de somme nulle, ils sont tous nuls. En particulier, si $t \in [t_0,T]$, $R^{-1}B^*p \cdot B^*p(t) = 0$. Comme R est symétrique, définie positive, on en déduit que $u(t) = R^{-1}B^*p(t) = 0$. La commande est donc nulle pour tout $t \in [t_0,T]$, et $y(t) = \exp(A(t-t_0))y(t_0) = 0$ pour $t \in [t_0,T]$. De même, on obtient la nullité de p sur $[t_0,T]$. Ce résultat n'est pas étonnant. Il signifie que si on cherche a annulé y alors que y est déjà nul, la commande optimale consiste simplement à ne rien faire. Reste à prouver la nullité de y, u et p sur l'intervalle $[0,t_0]$. Il suffit de constater que le coupe (y,p) est solution d'un système différentielle linéaire de condition initiale $(y,p)(t_0) = (0,0)$ (la flèche du temps est inversée). Ce système admet une solution unique : la solution nulle.

Ce résultat stipule que, si l'état initial n'est pas l'état cible, il n'est jamais rentable d'atteindre exactement ce dernier. Le coût nécessaire pour s'approcher de l'état cible devient plus important que le gain réalisé.

Exercice 10.4.2 Obtenir l'équivalent de la Proposition **10.4.4** et du Théorème **10.4.6** pour le système parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v + f \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ y = 0 \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ y(0) = y_0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où $y_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)$, $v \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ est la commande, et on minimise

$$\inf_{v\in L^2(]0,T[\times\Omega)} J(v) = \int_0^T\int_\Omega v^2 dt\,dx + \int_0^T\int_\Omega |y-z|^2 dt\,dx + \int_\Omega |y(T)-z_T|^2 dx,$$

où $z \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $z_T \in L^2(\Omega)$.

Correction. L'application qui à v associe y est linéaire continue de $L^2(]0,T[\times\Omega)$ dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))$. On en déduit que J est continue. De plus, J est fortement convexe et admet donc un unique minimiseur. Combinaison de fonctions différentiables, J est elle même différentiable (l'application qui à v associe y est dérivable car affine continue !) et

$$\langle J'(v), w\rangle = \\ 2\left(\int_0^T\int_\Omega vw\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (y-z)y_w\,dx\,dt + \int_\Omega (y(T)-z_T)y_w(T)\,dx\right) \quad (10.15)$$

où y_w est solution du problème parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial y_w}{\partial t} - \Delta y_w = w & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ y_w = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ y_w(0) = 0 \end{cases}$$

La condition d'optimalité nécessaire et suffisante est $J'(y) = 0$. Comme dans le cas présenté dans le cours, la formule précédente permettant de calculer la dérivée de

J est inexploitable : elle nécessite pour chaque fonction test w la résolution d'un système parabolique. On peut obtenir une expression explicite de J' en fonction d'un état adjoint p solution du système

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = y - z & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ p = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ p(T) = y(T) - z_T. \end{cases}$$

On vérifie sans mal que

$$\langle J'(v), w\rangle = \int_0^T \int_\Omega (v+p)w\,dx.$$

Exercice 10.4.3 Généraliser l'exercice précédent à l'équation des ondes.

Correction. Il s'agit d'étudier le problème hyperbolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 t} - \Delta y = v + f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $v \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ est la commande. On minimise

$$\inf_{v\in L^2(]0,T[\times\Omega)} J(v) = \int_0^T \int_\Omega v^2 dt\,dx + \int_0^T \int_\Omega |y-z|^2 dt\,dx + \int_\Omega |y(T) - z_T|^2 dx,$$

où $z \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $z_T \in L^2(\Omega)$. A nouveau, J est dérivable, fortement convexe et admet donc un unique minimiseur. De plus, la dérivée de J possède la même expression (10.15) que précédemment. Cependant, y_w est dans ce cas solution du problème hyperbolique

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_w}{\partial t^2} - \Delta y_w = w & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ y_w = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ y_w(0) = 0 \\ \frac{\partial y_w}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

A nouveau, on peut introduire un état adjoint afin de déterminer explicitement J'. L'équation vérifiée par l'état adjoint est

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = w & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ p = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ p(0) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} = z_T - y(T) \end{cases}$$

et

$$\langle J'(v), w\rangle = \int_0^T \int_\Omega (v+p)w\,dx\,dt.$$

Notons que pour trouver l'état adjoint, on peut introduire un Lagrangien comme dans le cas de la dimension finie.

Exercice 10.5.1 Pour $V = \mathbb{R}^2$ et $J(x,y) = ax^2 + by^2$ avec $a, b > 0$, montrer que l'algorithme de gradient à pas optimal converge en une seule itération si $a = b$ ou si $x^0 y^0 = 0$, et que la convergence est géométrique dans les autres cas. Étudier aussi la convergence de l'algorithme de gradient à pas fixe : pour quelles valeurs du paramètre μ la convergence se produit-elle, pour quelle valeur est-elle la plus rapide ?

Correction. L'algorithme de gradient à pas optimal converge en une unique itération si et seulement si le minimiseur de J (en l'occurrence 0) appartient à la droite paramétrée par la fonction $t \mapsto tJ'(x,y) + (x,y)$, c'est à dire si et seulement si (x,y) et $J'(x,y)$ sont colinéaires. Comme $J'(x,y) = 2(ax, by)$, l'algorithme converge en une itération si et seulement le produit vectoriel entre (x_0, y_0) et (ax_0, by_0) est nul, c'est à dire si $a = b$ ou $x_0 y_0 = 0$. Dans le cas contraire, considérons (x_n, y_n) la solution obtenue au bout de n itérations du gradient à pas optimal. Comme le pas est choisi de manière optimal, le gradient de J en (x_{n+1}, y_{n+1}) est orthogonal au gradient de J en (x_n, y_n). Ainsi, le gradient de J en (x_{n+2}, y_{n+2}) est colinéaire au gradient de J en (x_n, y_n). On en déduit que (x_n, y_n) et (x_{n+2}, y_{n+2}) sont colinéaires. Il existe donc $\alpha(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que

$$(x_{n+2}, y_{n+2}) = \alpha(x_n, y_n)(x_n, y_n).$$

Enfin, pour tout réel r, on a $\alpha(rx, ry) = \alpha(x,y)$. On a donc $\alpha(x_{n+2}, y_{n+2}) = \alpha(x_n, y_n)$ et $\alpha(x_{2p}, y_{2p}) = \alpha(x_0, y_0)$. Ainsi,

$$(x_{2p}, y_{2p}) = \alpha(x_0, y_0)^p (x_0, y_0).$$

La convergence est donc géométrique.

Considérons l'algorithme de gradient à pas fixe. D'après l'expression de la dérivée de J,

$$x_{n+1} = (1 - 2\mu a)x_n \text{ et } y_{n+1} = (1 - 2\mu b)y_n.$$

Par récurrence évidente, on en déduit une formule explicite de (x_n, y_n) :

$$x_n = (1 - 2\mu a)^n x_0 \text{ et } y_n = (1 - 2\mu b)^n y_0.$$

La convergence a lieu lorsque $\max(|1 - 2\mu a|, |1 - 2\mu b|) < 1$, c'est à dire

$$\mu < \min(a^{-1}, b^{-1}).$$

Le pas optimal est obtenu en minimisant $\beta = \max(|1 - 2\mu a|, |1 - 2\mu b|)$ par rapport à μ. Par une étude graphique rapide, on obtient que le pas optimal est

$$\mu_{opt} = (a + b)^{-1}.$$

La raison de la suite géométrique est alors

$$\beta = |a - b|/(a + b).$$

Pour terminer, notons qu'on peut également calculer explicitement la raison β' de la suite dans le cas de l'algorithme à pas optimal. A titre indicatif, on obtient

$$\beta' = |a - b||x_0||y_0|\sqrt{ab}\left((ax_0^2 + by_0^2)(a^3 x_0^2 + b^3 y_0^2)\right)^{-1/2}.$$

L'algorithme du gradient à pas optimal converge au moins aussi rapidement que l'algorithme à pas fixe optimal. La convergence des deux algorithmes est identique si $a = b$ ou $a|x_0| = b|y_0|$.

Exercice 10.5.2 Soit $V = \mathbb{R}^N$ et $K = \{x \in \mathbb{R}^N$ tel que $\sum_{i=1}^N x_i = 1\}$. Expliciter l'opérateur de projection orthogonale P_K et interpréter dans ce cas la formule

$$u_{n+1} = P_K(u_n - \mu J'(u_n)) \tag{10.16}$$

définissant l'algorithme de gradient projeté à pas fixe en terme de multiplicateur de Lagrange.

Correction. L'opérateur de projection sur K est défini par

$$P_K(u) = u - (1 - u \cdot n)n/N,$$

où $n = \sum_{i=1}^N e_i$. L'algortihme de gradient projecté peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P_K(u_n - \mu J'(u_n)) = u_n - \mu(J'(u_n) - N^{-1}(J'(u_n) \cdot n)n) \\ &= u_n - \mu(J'(u_n) - \lambda_n n) \end{aligned}$$

avec

$$\lambda_n = N^{-1}(J'(u_n) \cdot n).$$

Si un point fixe est atteint, on obtient qu'il existe un réel λ tel que

$$J'(u) - \lambda n = 0,$$

et on retrouve les conditions d'optimalité du premier ordre associé au porblème de minimisation de J sur K.

Exercice 10.5.3 Appliquer l'algorithme d'Uzawa au problème

$$\min_{v \in \mathbb{R}^N,\ F(v) = Bv - c \leq 0} \left\{ J(v) = \frac{1}{2} Av \cdot v - b \cdot v \right\}, \tag{10.17}$$

où A est une matrice $N \times N$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^N$, B une matrice $M \times N$ et $c \in \mathbb{R}^M$. Si la matrice B est de rang M, ce qui assure l'unicité de p d'après la Remarque **10.3.12**, montrer que la suite p^n converge vers p.

Correction. Le Lagrangien associé à ce problème est

$$\mathcal{L}(v, q) = \frac{1}{2} Av \cdot v - b \cdot v + q \cdot (Bv - c)$$

avec $q \in \mathbb{R}_+^M$. Soit p^n la suite de multiplicateurs obtenus par l'algorithme d'Uzawa et u^n la suite d'éléments de $\mathbb{R}^N$ définie par

$$\mathcal{L}(u^n, p^n) = \min_v \mathcal{L}(v, p^n). \tag{10.18}$$

On rappelle que p^{n+1} est déterminé à l'aide de p^n par

$$p^{n+1} = P_{\mathbb{R}^M_+}\left(p^n + \mu F(u^n)\right), \tag{10.19}$$

où μ est le pas de l'algorithme, choisit suffisamment petit. La matrice A étant symétrique définie positive, le problème (10.18) admet comme unique solution

$$u^n = A^{-1}(b - B^* p).$$

En explicitant la définition (10.19) de p^{n+1} en fonction de p^n, on obtient

$$p^{n+1} = P_{\mathbb{R}^M_+}\left((\operatorname{Id} - \mu BA^{-1}B^*)p^n + \mu(BA^{-1}b - c)\right).$$

Afin de prouver la convergence de la suite p^n, il suffit de montrer que l'application qui à p^{n+1} associe p^n est strictement contractante. Comme la projection $P_{\mathbb{R}^M_+}$ est contractante, il suffit de prouver que l'application

$$q \mapsto (\operatorname{Id} - \mu BA^{-1}B^*)q + \mu(BA^{-1}b - c)$$

est strictement contractante. Comme B est de rang M, la matrice $BA^{-1}B^*$ est définie positive. Pour μ suffisamment petit, la matrice $\operatorname{Id} - \mu BA^{-1}B^*$ est symétrique, définie positive de valeurs propres strictement plus petites que l'identité. L'application précédente est donc strictement contractante et l'algorithme convergent. On note p sa limite. La suite u^n est également convergente et sa limite u est telle que

$$Au - b + B^* p = 0. \tag{10.20}$$

Enfin, comme $p = P_{\mathbb{R}^M_+}(p + \mu F(u))$, pour tout $q \in \mathbb{R}^M_+$, on a

$$(p - (p + \mu F(u))) \cdot (q - p) \geq 0,$$

c'est à dire $F(u) \cdot p \geq F(u) \cdot q$. On en déduit que

$$F(u) \leq 0 \tag{10.21}$$

et que $F(u) \cdot p \geq 0$. Or comme $F(u) \leq 0$ et $p \geq 0$, on a également $F(u) \cdot p \leq 0$. Ainsi,

$$F(u) \cdot p = 0. \tag{10.22}$$

De (10.20), (10.21) et (10.22), on conclut que u est solution du problème de minimisation étudié.

Exercice 10.5.4 En plus des hypothèses de la Proposition **10.5.10**, on suppose que les fonctions J et $F_1, \ldots, F_M$ sont continûment différentiables. On note de nouveau $I(u)$ l'ensemble des contraintes actives en u, et on suppose que les contraintes sont qualifiées en u au sens de la Définition **10.2.13**. Enfin, on suppose que les vecteurs $\left(F_i'(u)\right)_{i \in I(u)}$ sont linéairement indépendants, ce qui assure l'unicité des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ tels que $J'(u) + \sum_{i=1}^M \lambda_i F_i'(u) = 0$, avec $\lambda_i = 0$ si $i \notin I(u)$. Montrer alors que, pour tout indice $i \in \{1, \ldots, M\}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} \max\left(F_i(u_\varepsilon), 0\right)\right] = \lambda_i .$$

Correction. Pour tout $i \notin I(u)$, on a $F_i(u) < 0$. Ainsi, pour ϵ assez petit, on a $F_i(u_\epsilon) < 0$ et $\max(F_i(u_\epsilon), 0) = 0$. En particulier, pour tout $i \notin I(u)$, on a bien

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} \max\left(F_i(u_\varepsilon), 0\right) \right] = 0 = \lambda_i \, .$$

On pose

$$J_\epsilon(v) = J(v) + \epsilon^{-1} \sum_{i=1}^{M} \left[\max(F_i(v), 0)\right]^2 .$$

Les fonction F_i étant supposées continûment dérivables, J_ϵ est dérivable et

$$J'_\epsilon(v) = J'(v) + 2\epsilon^{-1} \sum_{i=1}^{M} \max(F_i(v), 0) F'_i(v).$$

Comme u_ϵ minimise J_ϵ, on a $J'_\epsilon(u_\epsilon) = 0$ et

$$J'(u_\epsilon) = -2\epsilon^{-1} \sum_{i=1}^{M} \max(F_i(u_\epsilon), 0) F'_i(u_\epsilon). \tag{10.23}$$

De plus u_ϵ converge vers u pour lequel

$$J'(u) = -\sum_{i \in I(u)} \lambda_i F'_i(u). \tag{10.24}$$

Comme les applications linéaires $(F'_i(u))_{i \in I(u)}$ sont indépendantes, il existe une famille $(a_i)_{i \in I(u)}$ d'éléments de $\mathbb{R}^N$ telle que

$$\langle F'_i(u), a_j \rangle = \delta_i^j$$

pour tout i et $j \in I(u)$. Comme $F'_i(u_\epsilon)$ converge vers $F'_i(u)$, pour ϵ assez petit, la famille $(F'_i(u_\epsilon))_{i \in I(u)}$ est indépendante et il existe une famille $(a_i^\epsilon)_{i \in I(u)} \in \mathrm{Vect}((a_i)_{i \in I(u)})$ telle que

$$\langle F'_i(u_\epsilon), a_j^\epsilon \rangle = \delta_i^j$$

pour tout i et $j \in I(u)$. De plus, pour tout $i \in I(u)$, a_i^ϵ converge vers a_i. Enfin, pour tout $i \in I(u)$,

$$-2\epsilon^{-1} \max(F_i(u), 0) = \left\langle -2\epsilon^{-1} \sum_{j \in I(u)} \max(F_j(u_\epsilon), 0) F'_j(u_\epsilon), a_i^\epsilon \right\rangle.$$

Comme $\epsilon^{-1} \max(F_i(u), 0))$ converge vers zéro pour tout $i \notin I(u)$,

$$\begin{aligned}
\lim_\epsilon -2\epsilon^{-1} \max(F_i(u), 0) &= \lim_\epsilon -2\epsilon^{-1} \sum_{j=1}^{M} \max(F_j(u_\epsilon), 0) \, \langle F'_j(u_\epsilon), a_i^\epsilon \rangle \\
&= \lim_\epsilon \langle J'(u_\epsilon), a_i^\epsilon \rangle \\
&= \langle J'(u), a_i \rangle = \lambda_i.
\end{aligned}$$