Chapitre 4

ESPACES DE SOBOLEV

Exercice 4.2.1 Soit $\Omega = (0,1)$. Montrer que la fonction x^α est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Correction. Tout d'abord, x^α appartient à $L^2(0,1)$ si et seulement si $\alpha > -1/2$. Si α est un réel strictement plus grand que $-1/2$, d'après la Définition **4.2.3**, x^α admet une dérivée faible dans $L^2(0,1)$ si et seulement si il existe $w \in L^2(0,1)$ tel que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$,

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)dx = -\int_0^1 w(x)\varphi(x)dx.$$

Or comme φ est à support compact, il existe $a > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,a[$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)dx &= \int_a^1 x^\alpha \varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)dx = -\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)dx\end{aligned}$$

(Les intégrations par partie sur $(a,1)$ ne posent aucun problème, x^α étant de classe C^∞ sur cet intervalle). On en déduit que x^α admet une dérivée faible L^2 si et seulement si $\alpha x^{\alpha-1} = w \in L^2(0,1)$, c'est à dire $\alpha - 1 > -1/2$.

Exercice 4.2.2 Soit Ω un ouvert borné. Montrer qu'une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, et C^1 par morceaux est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

Correction. Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, C^1 par morceaux. Par définition, il existe une famille d'ouverts deux à deux disjoints $(\Omega_i)_{i=1,\cdots,N}$ telle que

$$\bigcup_i \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$$

de sorte que, pour tout indice i, la restriction de f à Ω_i (notée f_i) soit de classe C^1. On note $\Gamma_{i,j} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ la frontière commune entre deux sous-ouverts de Ω et n^i

la normale extérieure à l'ouvert Ω_i. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. En appliquant la formule de Green (**3.5**) à chacun des ouverts Ω_i, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx &= \sum_i \int_{\Omega_i} f_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx\\ &= \sum_i \left(\int_{\partial\Omega_i} f_i(x)\varphi(x)n_k^i ds - \int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\varphi(x)dx\right)\\ &= -\left(\sum_i \int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\varphi(x)dx\right) + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\int_{\Gamma_{i,j}} f_i(x)\varphi(x)n_k^i ds.\end{aligned}$$

Or pour tout couple (i,j) et tout point $x \in \Gamma_{i,j}$, $n_k^i(x) = -n_k^j(x)$, et comme f est continue, $f_i(x) = f_j(x)$. On en déduit que

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\int_{\Gamma_{i,j}} f_i(x)\varphi(x)n_k^i ds = \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\int_{\Gamma_{i,j}}\varphi(x)(f_i(x)n_k^i + f_j(x)n_k^j)ds = 0$$

et

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx = -\sum_i\int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\varphi(x)dx = -\int_\Omega \psi_k(x)\varphi(x)dx,$$

où $\psi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ est défini pour tout $x \in \Omega_i$ par $\psi_k(x) = \partial f_i/\partial x_k(x)$. Enfin, la fonction ψ_k étant continue par morceaux sur un ouvert borné, elle appartient à $L^2(\Omega)$. Ainsi f admet une dérivée faible L^2 et $\partial f/\partial x_k = \psi_k$.

Exercice 4.2.3 Soit Ω un ouvert borné. Montrer qu'une fonction C^1 par morceaux mais pas continue n'est pas dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

Correction. On utilise les mêmes notations que l'exercice précédent, on a toujours

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx = -\left(\sum_i\int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\varphi(x)dx\right) + \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\int_{\Gamma_{i,j}}\varphi(x)(f_i(x)n_k^i + f_j(x)n_k^j)ds$$

d'où

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx = -\left(\sum_i\int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\varphi(x)dx\right) + \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\int_{\Gamma_{i,j}}\varphi(x)(f_i(x) - f_j(x))n_k^i ds$$

Supposons que f soit dérivable au sens faible dans L^2. Dans ce cas, il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\int_{\Gamma_{i,j}}\varphi(x)(f_i(x) - f_j(x))n_k^i ds = \int_\Omega w(x)\varphi(x)dx.$$

En particulier, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_i)$, on a

$$\int_{\Omega_i} w(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Ainsi, $w = 0$ presque partout sur Ω, car $\Omega \setminus \cup_i \Omega_i$ est de mesure nulle. De plus, pour tout indice k, et toute fonction test φ,

$$\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \int_{\Gamma_{i,j}} \varphi(x)(f_i(x) - f_j(x))n_k^i ds = 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in \cup_{i,j}\Gamma_{i,j}$, $f_i(x) = f_j(x)$, c'est à dire que f est continue.

Exercice 4.2.4 Soit Ω un ouvert borné constitué de deux ouverts Ω_1 et Ω_2 séparés par une surface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Montrer qu'une fonction vectorielle de classe C^1 sur chaque morceau Ω_1 et Ω_2 admet une divergence faible dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si sa composante normale est continue à travers la surface Γ.

Correction. Soit σ une fonction de Ω à valeurs vectorielles. On note σ_1, σ_2 les restrictions de σ à Ω_1 et Ω_2 respectivement et n^1, n^2 les normales extérieures à Ω_1 et Ω_2. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, d'après la formule de Stokes (voir Exercice 3.2.1),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx &= \int_{\Omega_1} \sigma_1(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx \\
&= \int_\Gamma \sigma_1(x) \cdot n^1(x)\varphi(x)ds - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\sigma_1)(x)\varphi(x)dx \\
&\quad + \int_\Gamma \sigma_2 \cdot n^2(x)\varphi(x)ds - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\sigma_2)(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, si la composante normale de σ est continue à l'interface, on en déduit que

$$\int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = -\int_{\Omega_1} \psi(x)\varphi(x)dx,$$

avec $\psi(x) = \operatorname{div}(\sigma_i)(x)$ pour tout $x \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$. La fonction à valeurs vectorielles σ admet donc une divergence faible et $\operatorname{div}(\sigma)(x) = \psi(x)$.
Réciproquement, si σ possède une divergence faible, il existe donc $w \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\int_\Gamma (\sigma_1 - \sigma_2)(x) \cdot n^1(x)\varphi ds = \int_\Omega w(x)\varphi dx,$$

et par un raisonnement similaire à celui effectué dans l'exercice précédent, on en déduit que $(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot n^1 = 0$ sur Γ.

Exercice 4.3.1 Montrer que les fonctions continues, C^1 par morceaux et à support borné dans $\overline{\Omega}$, appartiennent à $H^1(\Omega)$.

Correction. D'après l'Exercice **4.2.2** (on utilise les même notations), pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\,dx = -\int_\Omega \psi_k(x)\varphi(x)\,dx,$$

où $\psi_k(x) = \partial f_i/\partial x_k(x)$ pour tout $x \in \Omega_i$. Le support de f étant borné, ψ_k est continue à support borné et donc appartient à $L^2(\Omega)$. Ainsi f admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ et appartient à $H^1(\Omega)$.

Exercice 4.3.2 Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $N = 2$, montrer que la fonction $u(x) = |\log(|x/2|)|^\alpha$ appartient à $H^1(B)$ pour $0 < \alpha < 1/2$, mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Si $N \geq 3$, montrer que la fonction $u(x) = |x|^{-\beta}$ appartient à $H^1(B)$ pour $0 < \beta < (N-2)/2$, mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Correction.

1. Cas $N = 2$

Soit α, $0 < \alpha < 1/2$ et u la fonction définie sur la boule unité de $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x) = |\log(|x/2|)|^\alpha.$$

Tout d'abord, on vérifie que u est un élément de $L^2(B)$. En effet,

$$\int_B |u|^2 dx = 2\pi \int_0^1 |\log(r/2)|^{2\alpha} r dr < +\infty.$$

Reste à prouver que u admet une dérivée faible L^2 (u n'est évidemment pas bornée au voisinage de 0). Rappelons que $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\nabla|x| = x/|x|$. Ainsi, la fonction u, en tant que fonction composée de fonctions dérivables, est dérivable au sens classique sur $B \setminus \{0\}$ et $\nabla u = \psi$ où

$$\psi(x) = -\frac{\alpha x}{|x|^2}|\log(|x/2|)|^{\alpha-1}.$$

De plus, ψ appartient à $L^2(\Omega)^2$. En effet,

$$\int_B |\psi|^2 dx = \int_B \left(\frac{\alpha \log(|x/2|)^{\alpha-1}}{|x|}\right)^2 dx$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned}\int_B |\psi|^2 dx &= 2\pi\alpha^2 \int_0^1 \frac{|\log(r/2)|^{2(\alpha-1)}}{r} dr \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{1-2\alpha}\left[|\log(r/2)|^{2\alpha-1}\right]_0^1 < +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, ψ est un élément de $L^2(B)$. Pour être tout à fait rigoureux, il reste à prouver que la dérivée au sens classique coïncide avec la définition de la dérivée faible. Soit

$\varphi \in C_0^\infty(B)$, pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned}\int_B u(x)\nabla\varphi(x)dx &= \int_{\varepsilon<|x|<1} u(x)\nabla\varphi(x)dx + \int_{|x|<\varepsilon} u(x)\nabla\varphi(x)dx \\ = \quad & -\int_{\varepsilon<|x|<1} \psi(x)\varphi(x)dx + \int_{|x|=\varepsilon} u(x)\varphi(x)ds + \int_{|x|<\varepsilon} u(x)\nabla\varphi(x)dx \\ = \quad & -\int_{\varepsilon<|x|<1} \psi(x)\varphi(x)dx + |\log(\varepsilon/2)|^\alpha \int_{|x=\varepsilon|} \varphi(x)ds + \int_{|x|<\varepsilon} u(x)\nabla\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes de l'expression tendent vers zéro lorsque ε tend vers zéro. En effet,

$$|\log(\varepsilon/2)|^\alpha \int_{|x=\varepsilon|} \varphi(x)ds \sim |\log(\varepsilon/2)|^\alpha 2\pi\varepsilon\varphi(0) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

et

$$\left|\int_{|x|<\varepsilon} u(x)\nabla\varphi\, dx\right| \le \|u\|_{L^2(B)} \left(\int_{|x|<\varepsilon} |\nabla\varphi|^2\, dx\right)^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Ainsi,

$$\int_B u(x)\nabla\varphi(x)\, dx = -\int_B \psi(x)\varphi(x)\, dx,$$

ce qui achève la démonstration.

2. Cas $N \ge 3$

Soit $0 < \beta < (N-2)/2$. On pose

$$u(x) = |x|^{-\beta}.$$

Dans un premier temps, on vérifie que u est un élément de $L^2(B)$. Soit S_N la sphère unité,

$$\int_B |u|^2 dx = |S_N| \int_0^1 |r|^{N-1-2\beta} dr < +\infty.$$

Pour tout $x \neq 0$, u est dérivable au sens classique et $\nabla u(x) = \psi(x)$ où

$$\psi(x) = -\beta x|x|^{-(\beta+2)}$$

On vérifie que la fonction ψ est un élément de $L^2(B)^N$. En effet,

$$\begin{aligned}\int_B |\psi|^2 dx &= \beta^2 \int_B |\psi|^{-2(\beta+1)} dx \\ &= \beta^2 |S_N| \int_0^1 r^{N-1} r^{-2(\beta+1)} dr \\ &= \beta^2 |S_N| \int_0^1 r^{-2\beta+N-3} dr.\end{aligned}$$

La dernière intégrale est fini car $-2\beta + N - 3 > -1$. Enfin, en procédant comme dans le cas $N = 2$, on vérifie que les dérivées faible et classique coïncident.

Exercice 4.3.3 Le but de cet exercice est de montrer que le Théorème de trace **4.3.13** n'est pas vrai si l'ouvert Ω n'est pas régulier. Soit l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ défini par $0 < x < 1$ et $0 < y < x^r$ avec $r > 2$ (voir la Figure **4.2**). Soit la fonction $v(x) = x^\alpha$. Montrer que $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$, tandis que $v \in L^2(\partial\Omega)$ si et seulement si $2\alpha > -1$. Conclure. (On peut aussi montrer avec ce même exemple que le Théorème **4.3.5** de densité et la Proposition **4.4.2** de prolongement ne sont pas vrais pour un tel ouvert.)

Correction. On a

$$\int_\Omega |v|^2 dxdy = \int_\Omega x^{2\alpha} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^r} x^{2\alpha} dy \right) dx = \int_0^1 x^{2\alpha + r} dx.$$

Ainsi, $v \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $2\alpha + r > -1$. De plus, $\partial v / \partial y = 0$ et $\partial v / \partial x = \alpha x^{\alpha - 1}$. On en déduit que $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $2(\alpha - 1) + r > -1$, c'est à dire $2\alpha + r > 1$. Soit $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$ et Γ_2 la partie du bord de Ω paramétrée par la fonction $(0, 1) \ni x \mapsto (x, y) = (x, x^r) \in \partial\Omega$. On a D'autre part,

$$\int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 ds = \int_{\Gamma_1} |v(x)|^2 dx + \int_{\Gamma_2} |v(x)|^2 dx = 1 + \int_0^1 x^{2\alpha} (1 + r^2 x^{2r-2})^{1/2} dx.$$

Comme $r > 2$, la fonction $(1 + r^2 x^{2r-2})^{1/2}$ est bornée sur $(0, 1)$ et $v \in L^2(\partial\Omega)$ si et seulement si $2\alpha > -1$. Si r est strictement supérieur à 2, il existe α tel que $1 - r < 2\alpha < -1$. Dans ce cas, $v \in H^1(\Omega)$ et $v_{|\partial\Omega} \notin L^2(\partial\Omega)$. Le Théorème **4.3.13** est mis en défaut dans ce cas. En effet, on introduit la suite croissante de fonctions $v^n \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ définie par

$$v^n(x) = \min(v(x), n).$$

La suite v^n converge vers v dans $H^1(\Omega)$ et $v^n_{|\partial\Omega}$ converge presque partout vers $v_{|\partial\Omega}$. On a alors

$$\lim_n \|v^n\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\lim_n \|v^n\|_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |v_{|\partial\Omega}(x)|^2 ds = +\infty.$$

Quel que soit $K > 0$, pour n assez grand, on a donc

$$\|v^n\|_{L^2(\partial\Omega)} > K \|v^n\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 4.3.4 Le but de cet exercice est de montrer qu'il ne peut pas y avoir de notion de trace pour des fonctions de $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\|v_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour simplifier, on choisit comme ouvert Ω la boule unité. Construire une suite de fonctions régulières dans $\overline{\Omega}$ égales à 1 sur $\partial\Omega$ et dont la norme dans $L^2(\Omega)$ tend vers zéro. Conclure.

Correction.

Soit T une fonction régulière de $[0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $T(0)=1$, $T(s)=0$ pour $s>1$ et $0\leq T(s)\leq 1$ pour tout s. On définit la suite u^n de fonctions de la boule Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$u^n(x)=T(n(1-|x|)).$$

Pour tout n, quel que soit $x\in\partial\Omega$, $|u^n(x)|=1$. D'autre part, la suite $|u^n(x)|$ est majorée par 1 pour tout $x\in\Omega$. Enfin, $u_n(x)=0$ pour tout x appartenant à la boule de rayon $1-1/n$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue, $\|u^n\|_{L^2(\Omega)}\to 0$, et quel que soit C, pour n assez grand,

$$\|u^n\|_{L^2(\partial\Omega)}=\|u^0\|_{L^2(\partial\Omega)}>C\|u^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'opérateur trace définit de $C(\overline{\Omega})\cap L^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ n'est pas continue. A fortiori, il ne peut être prolongé en une application continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.