Chapitre 5

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

Exercice 5.2.1 A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un ouvert quelconque de l'espace $\mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega)$. Montrer en particulier que l'ajout d'un terme d'ordre zéro au Laplacien permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèse que Ω est borné.

Correction.

1er Étape. Recherche de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v nulle sur $\partial\Omega$. Par intégration par partie, on obtient que

$$\int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + uv\big)\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Afin que cette expression ait un sens, il suffit de choisir u et v dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème variationnel associé à l'équation (5.1) consiste donc à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + uv\big)\,dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx.$$

2eme Étape. Résolution du problème variationnel.

La continuité de $a(\cdot,\cdot)$ et $L(.)$ est évidente de même que la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. En effet,

$$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont réunies. Il existe donc une solution unique au problème variationnel. On vérifie enfin en effectuant les même intégrations par partie que lors de la première étape que ∇u est un élément de $H(\mathrm{div})$ (voir cours, **4.4.2**) et que $-\Delta u + u = f$ en tant qu'éléments de $L^2(\Omega)$ et donc presque partout dans Ω. Enfin, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, et que Ω est un ouvert régulier, la trace de u est bien définie et $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$.

Exercice 5.2.2 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant de convection-diffusion

$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et V est une fonction régulière à valeurs vectorielles telle que $\mathrm{div} V = 0$ dans Ω.

Correction.

<u>1er Étape. Recherche de la formulation variationnelle.</u>

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v nulle sur $\partial\Omega$. Par intégration par partie, on obtient la formulation variationnelle suivante :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + (V \cdot \nabla u)v\big)\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v\, dx.$$

<u>2ème Étape. Résolution du problème variationnel.</u>

Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$.

$$a(u, u) = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + (V \cdot \nabla u)u\big)\, dx$$

La diveregnce de V étant nulle, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega (V \cdot \nabla u) u\, dx &= \int_\Omega \big(\mathrm{div}(uV)u - \mathrm{div}(V)|u|^2\big)\, dx \\ &= \int_\Omega \mathrm{div}(uV) u\, dx \end{aligned}$$

Par intégration par partie et comme $u = 0$, il vient

$$\int_\Omega (V \cdot \nabla u) u\, dx = -\int_\Omega (V \cdot \nabla u) u\, dx.$$

Ainsi,
$$\int_\Omega (V\cdot\nabla u)u\,dx = 0$$
et
$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$
La coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ se déduit alors de l'inégalité de Poincaré.
3ème Étape. Équivalence avec l'équation.
$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega \big(fv - (V\cdot\nabla u)v\big)\,dx.$$
Ainsi, en majorant le membre de droite,
$$\left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|V\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)})\|v\|_{L^2(\Omega)},$$
et ∇u est un élément de $H(\mathrm{div})$. On en déduit donc par intégration par partie que
$$-\Delta u + V\cdot\nabla u = f \text{ en tant qu'éléments de } L^2(\Omega).$$
Enfin, comme $u\in H^1_0(\Omega)$, on a $u=0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 5.2.3 On reprend les notations et hypothèses de l'Exercice **5.2.2**. Montrer que tout $v\in H^1_0(\Omega)$ vérifie
$$\int_\Omega vV\cdot\nabla v\,dx = 0.$$
Montrer que la solution de la formulation variationnelle du problème de convection diffusion ne minimise pas dans $H^1_0(\Omega)$ l'énergie
$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + vV\cdot\nabla v\right)\,dx - \int_\Omega fv\,dx.$$

Correction. On a d'ores et déjà prouvé dans l'exercice précédent que
$$\int_\Omega vV\cdot\nabla v\,dx = 0$$
pour tout $v\in H^1_0(\Omega)$. Ainsi,
$$\begin{aligned} J(v) &= 1/2\int_\Omega \big(|\nabla v|^2 + v(V\cdot\nabla v)\big)\,dx - \int fv\,dx \\ &= 1/2\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int fv\,dx. \end{aligned}$$

Or le minimiseur u sur $H^1_0(\Omega)$ de J est solution du problème aux limites
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et n'a donc aucune raison (sauf cas exceptionnel) d'être solution du problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{ll} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Exercice 5.2.4 On considère à nouveau le problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{5.3}$$

où Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^N$, et f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$. On suppose que l'ouvert Ω est symétrique par rapport à l'hyperplan $x_N = 0$ de même que la donnée f (i.e. $f(x', x_N) = f(x', -x_N)$). Montrer que la solution de (5.3) a la même symétrie. Montrer que (5.3) est équivalent à un problème aux limites posé sur $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_N > 0\}$ avec une condition aux limites de Neumann sur $\Omega \cap \{x_N = 0\}$.

Correction. Deux approches sont possibles. On peut raisonner soit directement sur l'équation aux dérivées partielles (5.3) soit sur la formulation variationnelle associée. Un raisonnement direct sur l'EDP (5.3) peut se justifier rigoureusement, la solution étant régulière. On obtient sans mal que u est symétrique et que la restriction de u sur Ω^+ est solution de la même équation supplémentée de conditions aux limites de Neumann homogènes sur $\Omega \cap \partial\Omega^+$. On propose ici d'adopter plutôt l'approche basée sur la formulation variationnelle.

Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^N$ par rapport au plan $x_N = 0$. On note S l'application de $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ qui à toute fonction $v \in L^2(\Omega)$ associe la fonction $S(v) = v \circ s$. L'application S est une isométrie de $L^2(\Omega)$. De plus, la restriction de S à l'espace $H^1(\Omega)$ est également une isométrie. En effet, pour toute fonction régulière v, on a

$$\nabla(S(v)) = \nabla(v \circ s) = \nabla^T s(\nabla v \circ s),$$

et

$$\int_\Omega |\nabla(S(v))|^2\, dx = \int_\Omega (\nabla v \circ s)^T \nabla s \nabla^T s(\nabla v \circ s)\, dx$$

Comme s est une isométrie de $\mathbb{R}^N$, $\nabla s \nabla^T s$ n'est autre que l'identité et

$$\int_\Omega |\nabla(S(v))|^2\, dx = \int_\Omega |(\nabla v)) \circ s|^2\, dx,$$

et donc (par simple changement de variable),

$$\int_\Omega |\nabla(S(v))|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx. \tag{5.4}$$

Par densité des fonctions régulières dans $H^1(\Omega)$, on en déduit la relation (5.4) pour tout fonction $v \in H^1(\Omega)$ et que S est une isométrie de $H^1(\Omega)$. Par un raisonnement similiaire, l'ensemble des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ étant stable par S, on en déduit que S est une isométire de $H_0^1(\Omega)$. Enfin, la relation

$$\nabla(S(v)) = \nabla^T s(\nabla v \circ s)$$

valable pour toute fonction v régulière s'étend par densité à toute élément de $H^1(\Omega)$.

Considérons la solution de l'equation de la chaleur $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Par changmement de variable $x = s(y)$, il vient

$$\int_\Omega ((\nabla u) \circ s) \cdot ((\nabla u) \circ s) \, dy = \int_\Omega (f \circ s)(v \circ s) \, dy$$

et

$$\int_\Omega (\nabla S(u)) \cdot (\nabla S(v)) \, dy = \int_\Omega (f \circ s)(S(v)) \, dy.$$

L'application S étant une isométrie de $H^1_0(\Omega)$, on en déduit que pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla S(u)) \cdot \nabla v \, dy = \int_\Omega (f \circ s) v \, dy.$$

Comme $f \circ s = f$, $S(u)$ est solution du même problème variationnel que celui vérifié par u et

$$u \circ s = S(u) = u.$$

Reste à montrer qu'on peut reformuler le problème vérifié par u sur l'ouvert $\Omega^+ = \Omega \cap x_N > 0$. On introduit l'application de prolongement P de $L^2(\Omega^+)$ à valeur dans $L^2(\Omega)$ définie par

$$P(u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega^+ \\ u \circ s(x) & \text{si } x \notin \Omega^+ \end{cases}$$

On introduit également l'application de restriction R de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega^+)$ qui à une application u associe sa retriction à Ω^+. On peut montrer aisément que P et R définissent des applications continues respectivement de $H^1(\Omega^+)$ à valeurs dans $H^1(\Omega)$ et de $H^1(\Omega)$ à valeurs dans $H^1(\Omega^+)$.

Soit u la solution de l'équation de la chaleur (5.3), pour tout $v \in X := P^{-1}(H^1_0(\Omega))$, on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx = \int_\Omega f P(v) \, dx.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx &= \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx + \int_{\Omega^-} \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx \\
&= \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx + \int_{\Omega^+} ((\nabla u) \circ s) \cdot ((\nabla P(v)) \circ s) \, dx \\
&= \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx + \int_{\Omega^+} \nabla (u \circ s) \cdot \nabla (P(v) \circ s) \, dx
\end{aligned}$$

Or $u \circ s = u$ et $P(v) \circ s = P(v)$, ainsi

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx = 2 \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla P(v) \, dx.$$

De plus, on a également

$$\int_\Omega f P(v)\,dx = 2\int_{\Omega_+} f P(v)\,dx.$$

On a donc pour tout $v \in X$,

$$\int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_{\Omega_+} f v\,dx.$$

De plus, on a $Ru = P^{-1}(u) \in X$. Ainsi, la restriction Ru de u à Ω_+ est solution du problème variationnel consistant à trouver $Ru \in X$ tel que pour tout $v \in X$,

$$\int_{\Omega^+} \nabla Ru \cdot \nabla v\,dx = \int_{\Omega_+} f v\,dx.$$

Enfin, on vérifie sans mal que

$$X = \{v \in H^1(\Omega^+) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega\},$$

et donc que Ru est solution de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$ et de Neumann sur $\Omega \cap \{X_N = 0\}$.

Exercice 5.2.5 Démontrer que l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\ dx = \int_{\partial\Omega} g v\,ds + \int_\Omega f v\,dx\ \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{5.5}$$

vérifie l'estimation d'énergie suivante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right),$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de u, f et g.

Correction. Il suffit d'appliquer la formulation variationnelle (5.5) à la fonction test $v = u$. On en déduit que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx = \int_{\partial\Omega} g u\,ds + \int_\Omega f u\,dx.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au deuxième membre,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par le Théorème de Trace, il existe donc une constante positive C telle que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\big(\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\big(\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

Exercice 5.2.6 On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.6}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et g est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. On démontrera l'inégalité suivante (qui généralise celle de Poincaré)

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right) \ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Correction.

1er Étape. Recherche de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v. Par intégration par partie, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_\Omega f v \, dx.$$

Enfin, comme $\partial u/\partial n = g - u$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (g-u) v ds = \int_\Omega f v \, dx.$$

La formulation variationnelle retenue consiste donc à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} uvds$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} gvds.$$

2ème Étape. Résolution du problème variationnel.

Afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. A cet effet, on va montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\big(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

La coercivité est alors évidente. Afin d'établir ce dernier résultat, on raisonne par contradiction. Supposons que pour tout n, il existe v_n tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} > n\big(\|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

Quitte a considérer la suite $v_n/\|v_n\|_{L^2(\Omega)}$ au lieu de v_n, on peut supposer que pour tout n, $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ainsi, la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$ et d'après le théorème

de Rellich, il existe une sous suite $v_{n'}$ convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un élément v de $H^1(\Omega)$. De plus, $\nabla v_{n'}$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, $v_{n'}$ est une suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$, v appartient a $H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$. D'après la Proposition **4.2.5**, on en déduit que v est une constante sur chacune des composantes connexes de Ω. L'application trace étant continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, la trace de v sur le bord de Ω est égale à la limite des traces de $v_{n'}$ sur le bord de Ω. Or $\lim_n \|v_{n'}\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$, ainsi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Finalement, v étant constante sur chacune de ces composantes connexes, $v = 0$ dans tout Ω, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.
3eme Étape. Équivalence avec le problème aux limites.

Tout d'abord, on établit en appliquant la formulation variationnelle à des éléments $v \in C_c^\infty(\Omega)$ que ∇u est un élément de $H(\mathrm{div})$ et par intégration par partie que

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

De plus, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+u\right)v\,ds &= \int_\Omega \big((\Delta u)v + \nabla u\cdot\nabla v\big)\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,ds\\ &= \int_\Omega \big(-fv+\nabla u\cdot\nabla v\big)\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,ds = \int_{\partial\Omega} gv ds.\end{aligned}$$

On en déduit en particulier que $\partial u/\partial n$ est un élément de $L^2(\partial\Omega)$ et que

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = g \text{ presque partout sur } \partial\Omega.$$

Remarque 5.2.1 *En toute rigueur, l'intégrale $\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+u\right)v\,ds$ n'est a priori pas correctement définie. Cependant, comme ∇u est un élément de $H(\mathrm{div})$, il admet une trace normale sur $\partial\Omega$. Ainsi, le calcul précédent reste valable en toute généralité quitte à remplacer l'intégrale de bord par le crochet de dualité $\left\langle\frac{\partial u}{\partial n}+u, v\right\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}$. Enfin, comme on prouve finalement que $\partial u/\partial n$ appartient à $L^2(\partial\Omega)$, l'utilisation de l'intégrale $\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+u\right)v\,ds$ est justifiée a posteriori.*

Exercice 5.2.7 On suppose que Ω est un ouvert borné connexe. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec des conditions aux limites mêlées

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D\end{cases} \tag{5.7}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et $(\partial\Omega_N, \partial\Omega_D)$ est une partition de $\partial\Omega$ telle que les mesures superficielles de $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$ sont non nulles (voir la Figure **4.1**). (Utiliser la Remarque **4.3.18**.)

Correction.

La formulation variationnelle s'établit naturellement : il s'agit de trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V$$

où

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

L'application trace étant continue, l'espace vectoriel V, image réciproque d'un fermé par une application continue, est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Ainsi, V est un espace de Hilbert. Les formes bilinéaire et linéaire a et L étant continues, il ne reste plus qu'à établir la coercivité de la forme bilinéaire a pour pouvoir appliquer le Théorème de Lax-Milgram et en déduire l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel. Il s'agit donc d'établir l'inégalité de type Poincaré suivante : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in V$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cette inégalité s'établit par contradiction (voir la deuxième démonstration de l'inégalité de Poincaré **4.3.10**). Supposons que cette inégalité soit fausse pour toute constante C. Dans ce cas, pour tout entier n, il existe $u_n \in V$ tel que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à diviser u_n par sa norme L^2, on peut supposer que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ainsi, u_n est borné dans $H^1(\Omega)$ et d'après le Théorème de Rellich, il existe une sous-suite $u_{n'}$ de u_n et un élément u de $L^2(\Omega)$ tels que $u_{n'}$ converge vers u en norme L^2. Or ∇u_n converge vers zéro. On en déduit que u_n est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. En particulier, u appartient à $H^1(\Omega)$ et le gradient de u est égal à la limite des gradients de $u_{n'}$, c'est à dire $\nabla u = 0$. D'après la Proposition **4.2.5**, on en déduit que u est une constante. Comme u appartient à V, la restriction de u à $\partial\Omega_D$ est nulle. La mesure superficielle de $\partial\Omega_D$ étant non nulle, on en déduit que $u = 0$, ce qui contredit le fait que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n'} \|u_{n'}\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Enfin, si u est une solution du problème variationnel, on en déduit que ∇u appartient à $H(\mathrm{div})$ et que $-\Delta u = f$ en tant qu'éléments de $L^2(\Omega)$. Enfin, pour tout élément v de V, on a

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} = \int_\Omega \Delta u v + \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Quitte à supposer Ω et $\partial\Omega_N$ assez réguliers, la trace des fonctions de V sur le bord est égal à l'ensemble des fonctions de $H^{1/2}(\Omega)$ de support inclus dans $\partial\Omega_N$. Ainsi, la restriction de $\partial u/\partial n$ à $\partial\Omega_N$ est nulle. Enfin, $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega_D$ car $u \in V$. Ainsi, la solution u du problème variationnel est bien solution du problème aux limites initial.

Exercice 5.2.8 Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger : si Ω est borné, régulier et connexe, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v - m(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ avec } m(v) = \frac{\int_\Omega v\,dx}{\int_\Omega dx}. \tag{5.8}$$

Correction. On peut démontrer cette inégalité par contradiction. On suppose que l'inégalité de Poincaré Wirtinger est fausse. Dans ce cas, pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un élément u_n de $H^1(\Omega)$ tel que

$$\|u_n - m(u_n)\|_{L^2(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)},$$

où m est la moyenne définie par

$$m(u_n) = \int_\Omega u_n\,dx \bigg/ \int_\Omega dx.$$

On pose $v_n = (u_n - m(u_n))/||u_n - m(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$. La suite v_n vérifie l'inégalité

$$1 = \|v_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.9}$$

Ainsi, la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$. Comme Ω est borné régulier, d'après le Théorème de Rellich, on peut extraire de v_n une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un élément v de $L^2(\Omega)$. Par commodité, on note de nouveau v_n cette suite. Comme v_n est convergente dans $L^2(\Omega)$, c'est une suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$. De plus, d'après l'équation (5.9), ∇v_n converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, v_n est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est complet : toute suite de Cauchy est convergente et v_n converge dans $H^1(\Omega)$ vers un élément v. De plus, on a

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_n \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_n (1/n) = 0,$$
$$m(v) = \lim_n m(v_n) = 0,$$
$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_n \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Comme $\nabla v = 0$, $m(v) = 0$ et Ω est connexe, v est une constante de moyenne nulle d'après la Proposition **4.2.5**. Ainsi, $v = 0$ et $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, ce qui est absurde et achève la démonstration de l'inégalité (5.8).

Exercice 5.2.9 On suppose que Ω est un ouvert borné connexe régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \left(\int_\Omega u\,dx\right)\left(\int_\Omega v\,dx\right) = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle. Quel problème aux limites a-t-on ainsi résolu ? En particulier, si on suppose que $\int_\Omega f\,dx = 0$, quel problème déjà étudié retrouve-t-on ?

Correction.
1. Existence
Soit
$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx+\left(\int_\Omega u\,dx\right)\left(\int_\Omega v\,dx\right) \tag{5.10}$$
et
$$L(v)=\int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$
Le problème variationnel posé consiste à déterminer $u\in H^1(\Omega)$ tel que
$$a(u,v)=L(v)\qquad \forall v\in H^1(\Omega).$$
Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier porte sur la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. En raisonnant par l'absurde (comme lors de la deuxième démonstration de l'inégalité de Poincaré **4.3.10** ou dans l'exercice 5.2.8), on établit qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $u\in H^1(\Omega)$,
$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\leq Ca(u,u)$$
(On utilise ici le fait que Ω est borné connexe). Le Théorème de Lax-Milgram nous assure alors l'existence et l'unicité de la solution de (5.10).
2. Détermination du problème aux limites
Soit $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$,
$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi(x)\,dx=-\left(\int_\Omega u(x)\,dx\right)\left(\int_\Omega \varphi(x)\,dx\right)+\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi(x)\,dx\right|\leq\left(|\Omega|^{1/2}\left|\int_\Omega u\,dx\right|+\|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$
Ainsi, $\nabla u\in H(\mathrm{div})$ et
$$-\mathrm{div}(\nabla u)=f-\int_\Omega u\,dx \text{ dans } \Omega.$$
De plus, en appliquant la formulation variationnelle à $v=1$, on obtient que
$$\int_\Omega u\,dx=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,dx.$$
Enfin, comme $\nabla u\in H(\mathrm{div})$, la trace de $\partial u/\partial n$ sur la frontière de Ω est correctement définie et on établit aisément que $\partial u/\partial n=0$. Le problème aux limites résolu consiste donc à trouver $u\in H^1(\Omega)$ tel que
$$\left\{\begin{aligned} -\Delta u=f-|\Omega|^{-1}\int_\Omega f\,dx &\quad \text{dans } \Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 &\quad \text{sur } \partial\Omega,\\ \int_\Omega u\,dx=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,dx. & \end{aligned}\right.$$
Dans le cas particulier $\int_\Omega f\,dx=0$, u est solution du problème de Neumann (**5.25**).

Exercice 5.2.10 Soit Ω un ouvert borné et K un compact connexe de $\mathbb{R}^N$ inclus dans Ω (on suppose que $\Omega \setminus K$ est régulier). Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère un problème de conduction dans Ω où K est une inclusion parfaitement conductrice, c'est-à-dire que l'inconnue u (la température ou le potentiel électrique, par exemple) est constante dans K (cette constante est aussi inconnue). On suppose qu'il n'y a pas de terme source dans K. Ce problème se modélise par

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u = C & \text{sur } \partial K \\ \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 & \text{sur } \partial K \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où C est une constante inconnue à déterminer. Trouver une formulation variationnelle de ce problème aux limites et démontrer l'existence et l'unicité d'une solution (u, C).

Correction. On introduit l'espace vectoriel

$$X = \{u \in H^1(\Omega \setminus K) : \ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \ ; \ v = \text{constante sur } \partial K\}.$$

muni de la norme de $H^1(\Omega \setminus K)$. Notons que X est un espace de Hilbert. En effet, c'est un sous espace fermé de $H^1(\Omega \setminus K)$.

1ere Étape. Détermination de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u sur $\Omega \setminus K$ par un élément v de X. Par intégration par partie, on en déduit que

$$\int_{\Omega\setminus K} \nabla u \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds = \int_{\Omega\setminus K} f(x) v(x)\, dx \qquad (5.11)$$

Comme $v(x)$ est constante sur ∂K, on a

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds = \left(\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds\right) v(\partial K).$$

Enfin, d'après l'équation vérifiée par $\partial u/\partial n$ sur ∂K,

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds = 0.$$

L'équation (5.11) vérifiée par u se simplifie en

$$\int_{\Omega\setminus K} \nabla u \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega\setminus K} f(x) v(x)\, dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème aux limites consiste à trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \qquad (5.12)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire définie sur X par

$$a(u, v) = \int_{\Omega\setminus K} \nabla u \cdot \nabla v(x)\, dx$$

et $L(.)$ la forme linéaire

$$L(v) = \int_{\Omega \setminus K} f(x)v(x)\,dx.$$

2eme Étape. Existence de solution.

L'application du Théorème de Lax-Milgram est triviale grâce à l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de X et nous assure l'existence et l'unicité au problème variationnel (5.12).

3eme Étape. Équivalence avec le problème aux limites.

On applique dans un premier temps la formulation variationnelle à une fonction $v \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)$. On en déduit que $\nabla u \in H(\mathrm{div})$ et que

$$-\Delta u = f \text{ pour presque tout } x \in \Omega \setminus K.$$

Comme $\nabla u \in H(\mathrm{div})$, $\partial u/\partial n$ admet une trace (au moins au sens faible sur ∂K). En appliquant la formulation variationnelle à un élément quelconque v de X et en intégrant par partie, on en déduit que

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\,dx = 0 \text{ sur } \partial K.$$

Enfin, les conditions de type Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et u =constante sur ∂K ont été incluses dans la définition de l'espace X auquel appartient u.

Exercice 5.2.11 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et A une application de Ω dans l'ensemble des matrices symétriques $N \times N$. On suppose que l'application A est uniformément bornée, c'est à dire telle qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que, presque partout dans Ω,

$$|A(x)\xi \cdot \xi| \leq \beta|\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N$$

et qu'elle est uniformément elliptique, c'est à dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe une unique solution faible au problème aux limites

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.13}$$

Correction. Dans un premier temps, établissons la formulation variationnelle associée. Pour toute fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, en multipliant l'équation vérifiée par u dans Ω, on obtient, suite à une intégration par partie que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

On note $a(u,v)$ la frome bilinéaire défini par le membre de gauche de cette équation et $L(v)$ la forme linéaire définie par le membre de droite. Si u est une solution classique du problème aux limites (5.13), alors u est une solution de problème variationnel consistant à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = L(v). \tag{5.14}$$

Maintenant que nous avons établi la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram afin d'établir l'existence de solutions. Exceptés la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire a, elles sont trivialement vérifiées. Pour tous u et v dans $H_0^1(\Omega)$, d'après l'hyptothèse de borne uniforme effectuée sur A, on a

$$a(u,v) \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \beta \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \, dx \leq \beta \|u\|_{H^1_\Omega} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

La forme bilinéaire A est donc continue. De plus, d'après l'hypothèse d'uniforme ellipiticité,

$$a(u,u) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

L'inégalité de Poincaré nous permet de conclure que a est coercive. Le problème variationnel (5.14) admet donc une solution unique. Reste à prouver que cette solution est également solution du problème aux limites initial. Comme

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

La fonction $A\nabla u$ admet une divergence faible L^2 et $\operatorname{div}(A\nabla u) = f$. De plus, comme u est un élément de $H_0^1(\Omega)$, on a $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 5.2.12 Montrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On rappelle que $\partial u / \partial n_A = (A\nabla u) \cdot n$.

Correction. La formulation variationnelle consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

ou

$$a(u,v) = \int_\Omega \big(A\nabla u \cdot \nabla v + uv\big) \, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gvds.$$

L'existence d'une solution à ce problème découle d'une application aisée du théorème de Lax-Milgram. Enfin, le Lemme **5.2.13** reste valable pour un opérateur elliptique du deuxième ordre à coefficients variables, pourvu que A et Ω soient suffisamment réguliers. En particulier, si pour tout i et j, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, alors $u \in H^2(\Omega)$. Ainsi, on obtient que

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ en tant qu'éléments de } L^2(\Omega),$$

que la trace $\frac{\partial u}{\partial n_A}$ est bien définie sur $\partial\Omega$ et que

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} = g \text{ dans } L^2(\partial\Omega).$$

Exercice 5.2.13 Montrer que l'application (non-linéaire) $v \to v^+$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, ainsi que de $H^1(\Omega)$ dans lui-même (utiliser le fait que $\nabla u = 0$ presque partout sur l'ensemble $u^{-1}(0)$).

Correction.

La continuité de l'application $v \to v^+$ de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est évidente, car Lipschitzienne. En effet, pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\|v^+ - u^+\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

La continuité de cette application de $H^1(\Omega)$ dans lui même est un peu plus délicate. Considérons une suite v_n convergeant vers v dans $H^1(\Omega)$. On veut montrer que v_n^+ converge vers v^+ dans $H^1(\Omega)$. A cet effet, on va plus précisément prouver que de toute suite extraite de v_n^+, on peut extraire une sous-suite convergente vers v^+, ce qui nous permettra de conclure à la convergence de toute la suite v_n^+. Soit $v_{n'}$ une sous-suite extraite quelconque de v_n. De cette sous suite, on peut extraite une nouvelle sous-suite $v_{n''}$ convergeant presque partout. D'après le Lemme (**5.2.24**),

$$\begin{aligned}\|\nabla v_{n''}^+ - \nabla v^+\|_{L^2(\Omega)} =& \|1_{v_{n''}>0}\nabla v_{n''} - 1_{v>0}\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq& \|1_{v_{n''}>0}(\nabla v_{n''} - \nabla v)\|_{L^2(\Omega)} + \|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq& \|\nabla v_{n''} - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Il est clair que le premier terme du second membre converge vers zéro. Enfin,

$$\|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega\setminus v^{-1}(0)} (1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})^2|\nabla v|^2\,dx.$$

car $\nabla v = 0$ presque partout sur $v^{-1}(0)$. Comme l'application $x \to 1_{x>0}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$1_{v_{n''}>0}(x) \to 1_{v>0}(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega \setminus v^{-1}(0).$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n'' \to 0$$

et

$$\nabla v_{n''}^+ \to \nabla v^+ \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On en déduit que toute la suite ∇v_n^+ converge vers ∇v^+. En effet, dans le cas contraire, il existerait un réel $\varepsilon > 0$, et une sous-suite $v_{n'}$ de v_n tels que

$$\|\nabla v_{n'}^+ - \nabla v^+\|_{L^2(\Omega)} > \varepsilon \ ,$$

ce qui contredit le fait qu'on puisse construire une sous-suite $v_{n''}$ de $v_{n'}$ telle que $\nabla v_{n''}^+ \to \nabla v^+$ dans $L^2(\Omega)$. En conclusion, on a montré que si $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, alors $v_n^+ \to v^+$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla v_n^+ \to \nabla v^+$ dans $L^2(\Omega)$. L'application qui à v associe v^+ est continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 5.3.1 Montrer que l'application de $L^2(\Omega)^N$ dans $H_0^1(\Omega)^N$ qui à f fait correspondre u, unique solution faible de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(2\mu e(u) + \lambda\,\mathrm{tr}(e(u))\,\mathrm{Id}) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}, \tag{5.15}$$

est linéaire continue.

Correction.
La linéarité de cette application est évidente. La continuité est une conséquence du Théorème de Lax-Milgram (qu'on a appliqué pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (5.15)). On peut retrouver la continuité directement, en appliquant la formulation variationnelle à la fonction test $v = u$. On obtient

$$\int_\Omega \left(2\mu|e(u)|^2 + \lambda(\mathrm{div} u)^2\right) dx = \int_\Omega f \cdot u \, dx.$$

En combinant cette égalité à l'inégalité de Korn pour $u \in H_0^1(\Omega)^N$

$$C \int_\Omega \left(|e(u)|^2 + (\mathrm{div} u)^2\right) dx \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^2(\Omega)^N$, on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 5.3.2 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$. Soit l'ensemble $\mathcal{R}$ des "mouvements rigides" de Ω défini par

$$\mathcal{R} = \left\{ v(x) = b + Mx \text{ avec } b \in \mathbb{R}^N, M = -M^t \text{ matrice antisymétrique } \right\}. \tag{5.16}$$

Montrer que $v \in H^1(\Omega)^N$ vérifie $e(v) = 0$ dans Ω si et seulement si $v \in \mathcal{R}$.

Correction. Tout d'abord, si v appartient à $\mathcal{R}$, on a évidemment $e(v) = 0$. Réciproquement, soit $v \in H^1(\Omega)^N$ telle que $e(v) = 0$. On pose $w = \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^t)$, partie antisymétrique de ∇v,

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

La fonction w_{ij} est un élément de $L^2(\Omega)$. De plus, en effectuant diverses intégrations par partie, on peut établir que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega w_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx = \int_\Omega e_{ik}(v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - e_{jk}(v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx.$$

Comme $e(v) = 0$, on en déduit que pour tout k,

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = 0.$$

Ainsi, chaque w_{ij} admet une dérivée faible $L^2(\Omega)$ nulle et d'après la Proposition **4.2.5**, il existe une matrice constante M telle que $w_{ij}(x) = M$ presque partout. De plus, w étant antisymétrique, M l'est également. Puisque $e(v) = 0$, on en déduit que

$$\nabla v = M.$$

Enfin,

$$\nabla(v - Mx) = 0.$$

De nouveau par application de la Proposition **4.2.5**, on en déduit qu'il existe un vecteur constant b tel que

$$v(x) = b + Mx \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Exercice 5.3.3 Montrer que $u \in V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^N \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}$ est l'unique solution de la formulation variationnelle,

$$\int_\Omega 2\mu e(u) \cdot e(v) \, dx + \int_\Omega \lambda \, \mathrm{div} u \, \mathrm{div} v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v \, ds \; \forall \, v \in V, \quad (5.17)$$

si et seulement si u réalise le minimum sur V de l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(2\mu |e(v)|^2 + \lambda |\mathrm{div} v|^2 \right) \, dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx - \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v \, ds. \quad (5.18)$$

(Indication : on pourra s'inspirer de la Proposition **3.3.4**).

Correction. Il suffit d'appliquer la Proposition **3.3.4** à la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \big(2\mu e(u) \cdot e(v) + \lambda (\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v) \big) \, dx$$

et à la forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v ds,$$

sur l'espace de Hilbert V. Plus précisément, on a dans ce cas

$$J(u - v) = J(u) - a(u, v) + L(v) + a(v, v)/2.$$

Ainsi, u est un minimiseur de J sur V, si et seulement si pour tout $v \in V$,

$$a(u, v) - L(v) \le a(v, v)/2. \tag{5.19}$$

Le premier terme étant homogène d'ordre 1 par rapport à v et le deuxième terme d'ordre 2, cette inégalité est vérifiée si et seulement si $a(u, v) - L(v) = 0$ pour tout $v \in V$. En effet, pour tout réel α, en appliquant l'inégalité précédente à αv plutôt qu'à v, il vient

$$\alpha(a(u, v) - L(v)) - \alpha^2 a(v, v)/2 \le 0.$$

La fonction dépendant de α définie dans le membre de gauche atteint sont maximum en $\alpha = 0$. Sa dérivée en $\alpha = 0$ (qui est précisément $a(u, v) - L(v)$) est donc nulle. Réciproquement, si $a(u, v) - L(v) = 0$ pour tout $v \in V$, l'inégalité (5.19) est éviemment vérifiée. On a donc établit que u est un minimiseur de J sur V si et seulement si u est solution de la formulation variationnelle (5.17).

Exercice 5.3.4 Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$. On considère le système de l'élasticité avec la condition de Neumann (**5.59**) sur tout le bord $\partial\Omega$. Montrer que la condition d'équilibre (vectorielle)

$$\int_\Omega f \cdot (Mx + b)\, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot (Mx + b)\, ds = 0 \qquad \forall b \in \mathbb{R}^N, \forall M = -M^t \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

est une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité d'une solution dans $H^1(\Omega)^N$ (l'unicité étant obtenue "à un mouvement de corps rigide" près, c'est-à-dire à l'addition de $Mx + b$ près avec $b \in \mathbb{R}^N$ et M une matrice antisymétrique constante).

Correction.

Supposons que u soit solution du système de l'élasticité avec conditions aux bords de Neumann. En multipliant l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test $v \in H^1(\Omega)^N$, on obtient suite à une intégration par partie que

$$\int_\Omega \big(2\mu e(u) \cdot e(v) + \lambda(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v)\big)\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v\, dx.$$

En appliquant cette équation à un élément v de la forme $v = Mx + b$, où $b \in \mathbb{R}^N$ et M est une matrice antisymétrique, on en déduit que

$$\int_\Omega f \cdot (Mx + b)\, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot (Mx + b)\, ds = 0,$$

qui est donc une condition nécessaire d'existence de solution. Sous cette condition, on va montrer que le problème aux limites avec condition de Neumann admet une unique solution dans l'espace V, quotient de $H^1(\Omega)^N$ par l'espace des mouvements rigides $\mathcal{R}$. La formulation variationnelle est aisée à établir et consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \big(2\mu e(u) \cdot e(v) + \lambda(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v)\big)\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v\,dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v\,ds.$$

Notons que $a(u,v)$ et $L(v)$ sont toutes deux correctement définies. Leurs valeurs sont indépendantes des représentant u et v choisis dans $H^1(\Omega)^N$. En effet, soit u_1 et u_2 (resp. v_1 et v_2) deux élements de $H^1(\Omega)^N$, représentants de u (resp. v) dans V. Il existe M et N matrices antisymétriques $N \times N$, b et c vecteurs de $\mathbb{R}^N$ tels que $u_1 = u_2 + Mx + b$ et $v_1 = v_2 + Nx.c$. On a alors $e(u_1) = e(u_2)$ et $e(v_1) = e(v_2)$. Ainsi $a(u_1, v_1) = a(u_2, v_2)$. De plus, d'après la condition de compatiblité, $L(v_1) = L(v_2)$. Afin d'appliquer le théorème de Lax-Migram, seule la coercivité de la forme bilinéaire n'est pas tout à fait évidente à établir. Il s'agit de prouver qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_V^2 \leq Ca(u,u) \text{ pour tout } u \in V. \tag{5.20}$$

où

$$\|u\|_V = \inf_{M,b} \|u + Mx + b\|_{H^1(\Omega)}, \text{ avec } M \text{ matrice antisymétrique et } b \in \mathbb{R}^N.$$

Supposons que la relation (5.20) soit fausse pour tout C. Dans ce cas, il existe une suite u_n d'éléments de V telle que

$$1 = \|u_n\|_V^2 \geq na(u_n, u_n).$$

Rappelons qu'il existe ν tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)^N$,

$$a(u,u) \geq \nu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$1 = \|u_n\|_V^2 \geq \nu n \|e(u_n)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Par abus de langage on note également u_n l'élément de $H^1(\Omega)^N$ tel que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = \|u_n\|_V$ (on confond un élément de V avec un représentant particulier). D'après le théorème de Rellich, la suite u_n étant bornée dans $H^1(\Omega)^N$, il existe une sous-suite $u_{n'}$ convergente dans $L^2(\Omega)^N$. On rappelle que d'après l'inégalité de Korn, $v \mapsto \|v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|e(v)\|_{L^2(\Omega)^{N\times N}}$ est une norme équivalente à la norme de $H^1(\Omega)^N$. Comme $e(u_{n'})$ tend vers zéro dans $L^2(\Omega)^N$, $e(u_{n'})$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)^{N\times N}$. De plus $u_{n'}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)^N$. Ainsi, la suite $u_{n'}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)^N$. En conséquence, $u_{n'}$ converge dans $H^1(\Omega)^N$ vers un élément u tel que $e(u) = 0$. D'après l'exercice précédent, il existe M matrice antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^N$ tels que $u(x) = Mx + b$. En d'autres termes, $u = 0$ dans V. D'autre part, la convergence dans $H^1(\Omega)^N$ implique la convergence dans V. Comme $\|u_{n'}\|_V = 1$ on a donc $\|u\|_V = 1$, ce qui est contradictoire avec le fait que $u = 0$. La forme bilinéaire a est donc coercive sur V et la formulation variationnelle admet donc une solution unique. Afin de prouver que la solution du problème variationnel est solution du problème aux limites, on procède comme pour le Laplacien. En particulier, afin de donner un sens à $\sigma \cdot n$, il serait nécessaire de montrer que u est en fait un élément de $H^2(\Omega)^N$ (ce qu'on a admit pour le Laplacien). A défaut, on peut toujours utiliser le fait que chaque ligne de σ est un élément de $H(\mathrm{div})$ et utiliser la définition faible de la trace de la composante normale de σ sur le bord comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$(voir Théorème **4.4.7**)

Exercice 5.3.5 On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et que $f \in L^2(\Omega)^N$. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans $H_0^1(\Omega)^N$ au système de Lamé

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\mathrm{div} u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.21}$$

sans utiliser l'inégalité de Korn. Vérifier qu'on peut affaiblir les hypothèses de positivité sur les coefficients de Lamé en supposant seulement que $\mu > 0$ et $2\mu + \lambda > 0$.

Correction. La formulation variationnelle consiste à trouver $u \in H_0^1(\Omega)^N$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N,$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \big(\mu\nabla u \cdot \nabla v + (\lambda+\mu)(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v)\big)\, dx$$

et

$$L(v) = \int f \cdot v\, dx.$$

Afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. Or

$$\int_\Omega (\mathrm{div} u)^2\, dx = \int_\Omega \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, dx.$$

Par intégration par partie, il vient

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mathrm{div} u)^2\, dx &= \int_\Omega \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla u)^t\, dx \\ &\le \int_\Omega |\nabla u||(\nabla u)^t|\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a(u, u) \ge \int_\Omega (\mu + \min(0, \lambda+\mu))|\nabla u|^2\, dx$$

ou encore

$$a(u, u) \ge \int_\Omega \min(\mu, \lambda+2\mu)|\nabla u|^2\, dx.$$

La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est donc coercive dès que $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$, ce qui établit l'existence d'une solution unique au problème variationnel. On montre que u est solution du problème aux limites en procédant comme pour le Laplacien.

Exercice 5.3.6 Vérifier l'équivalence de (5.21) et (5.15) si λ et μ sont constants. Montrer que (5.21) et (5.15) ne sont plus équivalents si λ et μ sont des fonctions (régulières), même si on remplace l'équation vectorielle de (5.21) par

$$-\mathrm{div}(\mu\nabla u) - \nabla((\mu+\lambda)\mathrm{div}u) = f \text{ dans } \Omega.$$

Correction. Soit u la solution du problème variationnel associé à (5.15) pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)^N$,

$$\int_\Omega \mu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega \lambda(\mathrm{div}u)(\mathrm{div}v)\,dx = \int_\Omega f\cdot v\,dx.$$

Or par intégration par partie,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx &= -\int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx \\
&= -\int_\Omega \mu u_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i}\,dx - \int_\Omega u_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial(\mu u_j)}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega u_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx \\
&= \int_\Omega \mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega u_j\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega \lambda(\mathrm{div}u)(\mathrm{div}v)\,dx = \\
&\qquad \int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla v + (\lambda+\mu)(\mathrm{div}u)(\mathrm{div}v)\,dx + \int_\Omega u\cdot((\mathrm{div}v)\nabla\mu - (\nabla v)^t\nabla\mu)dx.
\end{aligned}$$

Si μ est constant, u est donc également l'unique solution du problème variationnel consistant à trouver u dans $H_0^1(\Omega)^N$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$,

$$\int_\Omega \big(\mu\nabla u\cdot\nabla v + (\lambda+\mu)(\mathrm{div}u)(\mathrm{div}v)\big)\,dx = \int_\Omega f\cdot v\,dx,$$

qui est équivalent au problème aux limites consistant à trouver u tel que

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - \nabla((\mu+\lambda)\mathrm{div}u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si de plus λ est constant, on retrouve le problème aux limites (5.21). Enfin, si l'un des coefficient μ ou λ n'est pas constant, (5.15) et (5.21) ne sont en général par équivalents.

Exercice 5.3.7 Le but de cet exercice est de trouver une solution particulière du système de l'élasticité linéarisée dans le cas d'une force de cisaillement anti-plan. On considère un domaine cylindrique homogène Ω de longueur $L > 0$ et de section ω, où ω est un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^{N-1}$ (les coefficients de Lamé λ et μ sont constants). Autrement dit, $\Omega = \omega \times (0, L)$, et pour $x \in \Omega$, on note $x = (x', x_N)$ avec $0 < x_N < L$ et $x' \in \omega$. On considère le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}\,(\sigma) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma n = g & \text{sur } \partial\omega \times (0, L) \\ u' = 0 & \text{sur } \omega \times \{0, L\} \\ (\sigma n) \cdot n = 0 & \text{sur } \omega \times \{0, L\} \end{array} \right. , \tag{5.22}$$

avec

$$\sigma = 2\mu e(u) + \lambda \, \mathrm{tr}(e(u)) \, \mathrm{Id},$$

où on a utilisé la notation, pour un vecteur $v = (v_1, ..., v_N)$, $v = (v', v_N)$ avec $v' \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $v_N \in \mathbb{R}$. On suppose que la force surfacique g est du type "cisaillement anti-plan", c'est-à-dire que $g' = (g_1, ..., g_{N-1}) = 0$. Montrer que la solution unique de (5.22) est donnée par $u = (0, ..., 0, u_N)$ où $u_N(x')$ est la solution du Laplacien suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta' u_N = 0 & \text{dans } \omega \\ \mu \frac{\partial u_N}{\partial n} = g_N & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right.$$

où Δ' est le Laplacien dans la variable $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Correction. Soit u_N la solution du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta' u_N = 0 & \text{sur } \omega \\ \mu \frac{\partial u_N}{\partial n} = g_N & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right.$$

On pose $u = (0, \cdots, 0, u_N)$. Pour tout i et j tels que $i, j < N$,

$$e_{ij}(u) = 0$$
$$e_{iN}(u) = e_{Ni}(u) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_N}{\partial x_i}$$
$$e_{NN}(u) = 0.$$

En particulier, $\mathrm{tr}(e(u)) = 0$. On en déduit que,

$$-\mathrm{div}(2\mu e(u) + \lambda \, \mathrm{tr}(e(u)) \, \mathrm{Id}) = -\mu(0, \cdots, 0, \Delta' u_N) = 0.$$

De plus,

$$\sigma(u) e_N = 2\mu e(u) e_N = \mu(\nabla' u_N, 0).$$

Ainsi, pour presque tout $x \in \omega \times \{0, L\}$, $(\sigma n) \cdot n = 0$. Enfin, pour presque tout $x \in \partial\omega \times (0, L)$, $n = (n', 0)$ et

$$\sigma n = 2\mu \left(\sum_{k=1}^{N-1} e_{jk} n_k \right) = 2\mu(0, \cdots, 0, 1/2 \nabla' u_N \cdot n') = (0, \cdots, 0, g_N).$$

Ainsi, u est bien l'unique solution du problème aux limites (5.22).

Exercice 5.3.8 Généraliser l'Exercice **5.3.7** au cas d'une condition aux limites latérale du type

$$u' = 0 \text{ et } (\sigma n) \cdot e_N = g_N \text{ sur } \partial\omega \times (0, L).$$

Correction. La solution construite dans l'exercice précédent vérifie également ces conditions aux limites.

Exercice 5.3.9 A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des plaques

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.23}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On pourra remarquer que, si $u \in H_0^2(\Omega)$, alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |\Delta u|^2\, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx.$$

On admettra le résultat de régularité suivant : si $w \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ vérifient pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega w \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx,$$

alors $(\theta w) \in H^2(\Omega)$ quelle que soit la fonction $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$.

Correction.

La formulation variationnelle associée à l'équation des plaques (5.23) consiste à déterminer $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H_0^2(\Omega) \tag{5.24}$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v\, dx \text{ et } L(v) = \int_\Omega f v\, dx$$

(voir Exercice **3.2.4**). Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non trivialement vérifiée est la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$. Or pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$, on établit suite à deux intégrations par partie successives que

$$a(u, u) = \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx = \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant deux fois l'inégalité de Poincaré, on obtient qu'il existe des constantes C et C' positives telles que pour tout élément u de $H_0^2(\Omega)$,

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C' \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(\Omega)} = C' a(u, u).$$

Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq Ca(u,u).$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est donc établie et il existe une unique solution au problème variationnel (5.24).

Reste à établir que la solution du problème variationnel est solution du problème aux limites. Soit ω un ouvert inclus dans un compact de Ω. Il existe $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur ω. Pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω,

$$\int_\Omega \theta(x)\Delta u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

D'après le résultat de régularité admit, $\theta\Delta u$ est un élément de $H^2(\Omega)$. Il est donc licite d'effectuer deux intégrations par partie successives sur le membre de gauche de l'équation précédente. On en déduit que

$$\int_\Omega \Delta(\theta(x)\Delta u(x))v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Cette équation étant vérifiée pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω, on en déduit que pour presque tout $x \in \omega$,

$$\Delta(\Delta u)(x) = f(x).$$

Cette relation reste valable pour presque tout $x \in \Omega$: il suffit de considérer une suite ω_n de compacts tels que $\cup_n \omega_n = \Omega$. Enfin, comme $u \in H_0^2(\Omega)$, la solution du problème variationnel vérifie automatiquement les conditions au bord $u = \partial u/\partial n = 0$.

Exercice 5.3.10 Soit V l'espace des champs de vitesse à divergence nulle. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mu|\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega f\cdot v\,dx. \tag{5.25}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f\cdot v\,dx \;\forall\, v \in V. \tag{5.26}$$

Montrer que u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que $J(u) = \min_{v\in V} J(v)$. Réciproquement, montrer que, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (5.26).

Correction. Il suffit d'appliquer la Proposition **3.3.4** à la formulation variationnelle (5.26) pour conclure. A défaut, on peut prouver l'équivalence entre le problème de minimisation de l'énergie et la formulation variationnelle à la main. On rappelle que l'espace V des champs de vitesse H^1 à divergence nulle est défini par

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^N \;:\; \mathrm{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \right\}.$$

Notons que pour tout élements u et v de V,

$$J(u-v) = J(u) - a(u,v) + L(v) + a(v,v)/2,$$

où $a(\cdot,\cdot)$ est la forme bilinéaire continue, définie sur $V \times V$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

et L est la forme linéaire continue sur V définie par

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx.$$

Ainsi, u est un minimiseur de J sur V si et seulement si

$$a(u,v) - L(v) \leq a(v,v)$$

pour tout $v \in V$. Comme le terme de gauche est homogène de degré 1 tandis que le terme de droite est homogène d'ordre 2, cette inégalité est vraie si et seulement si

$$a(u,v) = L(v)$$

pour tout $v \in V$, c'est à dire si u est solution de la formulation variationnelle (5.26).

Exercice 5.3.11 Le but de cet exercice est de trouver une solution particulière des équations de Stokes dans un canal rectiligne de section uniforme, appelée profil de Poiseuille. Soit $\Omega = \omega \times (0, L)$ où $L > 0$ est la longueur du canal et ω sa section, un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^{N-1}$. Pour $x \in \Omega$, on note $x = (x', x_N)$ avec $0 < x_N < L$ et $x' \in \omega$. On considère le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla p - \mu \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, L) \\ pn - \mu \frac{\partial u}{\partial n} = p_0 n & \text{sur } \omega \times \{0\} \\ pn - \mu \frac{\partial u}{\partial n} = p_L n & \text{sur } \omega \times \{L\} \end{array} \right. \tag{5.27}$$

où p_0 et p_L sont deux pressions constantes. Montrer que la solution unique de (5.27) est donnée par

$$p(x) = p_0 + \frac{x_N}{L}(p_L - p_0),$$

et $u = (0, ..., 0, u_N)$ où $u_N(x')$ est la solution du Laplacien suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta' u_N = -\frac{(p_L - p_0)}{L} & \text{dans } \omega \\ u_N = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right.$$

où Δ' est le Laplacien dans la variable $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Correction. On pose

$$p(x) = p_0 + x_N(p_L - p_0)/L,$$

et $u = (0, \cdots, 0, u_N)$ où u_N est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\mu\Delta' u_N = -\frac{(p_L - p_0)}{L} & \text{dans } \omega \\ u_N = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

On va montrer que (u, p) est solution du problème aux limites (5.27). On a

$$\nabla p = (0, \cdots, 0, (p_L - p_0)/L),$$

$$\Delta u = (0, \cdots, 0, \Delta' u_N),$$

d'où

$$\nabla p - \mu\Delta u = (0, \cdots, 0, (p_L - p_0)/L - \mu\Delta' u_N) = 0.$$

De plus,

$$\mathrm{div}(u) = \frac{\partial u_N}{\partial x_N} = 0.$$

Enfin, comme $\partial u/\partial n = 0$ sur $\omega \times \{0, 1\}$ et

$$\begin{cases} p = p_0 & \text{sur } \omega \times \{0\}, \\ p = p_1 & \text{sur } \omega \times \{L\}, \end{cases}$$

les conditions aux limites imposées aux extrémités du profil sont également vérifiées.

Exercice 5.3.12 Généraliser l'Exercice **5.3.11** au cas des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \mu\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.28}$$

Correction. Avec les mêmes notations que l'exercice précédent, on vérifie que

$$(u \cdot \nabla)u = 0,$$

ainsi, u est également solution des équations de Navier-Stokes.