

Chapitre 6

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Exercice 6.2.1 Appliquer la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 au problème

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases}$$

Vérifier que les conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes apparaissent dans le second membre du système linéaire qui en découle.

Correction. La formulation variationnelle, issue de l'utilisation des éléments finis \mathbb{P}_1 , consiste à déterminer

$$u_h \in V_h := \{v_h \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) : v_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, n\}\}$$

où $x_i = i/(n+1)$ tel que

$$\int_0^1 u_h' v_h' dx = \int_0^1 f v_h dx \text{ pour toute fonction } v_h \in V_{0h} = V_h \cap H_0^1(0, 1),$$

et

$$u_h(0) = \alpha, \quad u_h(1) = \beta.$$

On note $(\phi_i)_{i=0, \dots, n+1}$ la base de V_h définie par $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. En utilisant ϕ_j comme fonction test, on obtient, à l'aide de la formulation variationnelle, que pour tout $0 < j < n+1$,

$$\sum_{i=0}^{n+1} (u_h)_i \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx = \int_0^1 f \phi_j dx,$$

où $(u_h)_i$ sont les coordonnées de u_h dans la base (ϕ_i) . Les conditions aux limites impliquent que $(u_h)_0 = \alpha$ et $(u_h)_{n+1} = \beta$, ainsi

$$\sum_{i=1}^n (u_h)_i \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx = \int_0^1 f \phi_j dx - \int_0^1 (\alpha \phi_0' + \beta \phi_{n+1}') \phi_j' dx.$$

Déterminer $U_h = ((u_h)_i)_{1 \leq i \leq n}$ consiste donc à résoudre le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où la matrice

$$\mathcal{K}_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

est identique à celle obtenue avec des conditions de Dirichlet homogènes, tandis que le second membre est défini par

$$\begin{aligned} (b_h)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \phi_i dx, & \text{pour tout } 1 < i < n, \\ (b_h)_1 &= \alpha/h + \int_0^{x_2} f \phi_1 dx \\ (b_h)_n &= \beta/h + \int_{x_{n-1}}^1 f \phi_n dx. \end{aligned}$$

Exercice 6.2.2 On reprend le problème de Neumann

$$\begin{cases} -u'' + au = f \text{ dans }]0, 1[\\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta. \end{cases} \quad (6.2)$$

en supposant que la fonction $a(x) = 0$ dans $]0, 1[$. Montrer que la matrice du système linéaire issu de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est singulière. Montrer qu'on peut néanmoins résoudre le système linéaire si les données vérifient la condition de compatibilité

$$\int_0^1 f(x) dx = \alpha - \beta,$$

et que cette condition est préservée si l'on utilise des formules de quadrature. Comparer ce résultat avec le Théorème 5.2.18.

Correction. Le système linéaire obtenu en considérant $a = 0$ est

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h, \quad (6.3)$$

où

$$\mathcal{K}_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et b_h est défini comme dans le cas $a \neq 0$ par

$$\begin{aligned}(b_h)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx && \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \\(b_h)_0 &= \int_0^1 f(x)\phi_0(x) dx - \alpha, \\(b_h)_n &= \int_0^1 f(x)\phi_{n+1}(x) dx - \beta.\end{aligned}$$

La matrice \mathcal{K}_h est auto-adjointe et positive. En effet, pour tout $(v_i) \in \mathbb{R}^{n+2}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_h v \cdot v &= h^{-1} \left((v_0 - v_1)v_0 + (v_{n+1} - v_n)v_{n+1} + \sum_{i=1}^n (-v_{i+1} + 2v_i - v_{i-1})v_i \right) \\&= h^{-1} \left((v_0 - v_1)v_0 + (v_{n+1} - v_n)v_{n+1} + \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i+1})v_i + (v_i - v_{i-1})v_i \right) \\&= h^{-1} \left((v_0 - v_1)v_0 + (v_{n+1} - v_n)v_{n+1} + \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i+1})v_i + \sum_{i=0}^{n-1} (v_{i+1} - v_i)v_{i+1} \right) \\&= h^{-1} \left((v_0 - v_1)^2 + (v_{n+1} - v_n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (v_i - v_{i+1})^2 \right) \\&= h^{-1} \sum_{i=0}^n (v_i - v_{i+1})^2.\end{aligned}$$

Par contre \mathcal{K}_h n'est pas définie. De l'expression précédente, on déduit que $\mathcal{K}_h v \cdot v = 0$ si et seulement si $v_i = v_{i+1}$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Ainsi, le noyau de l'application \mathcal{K}_h est l'espace vectoriel de dimension un engendré par $(1, \dots, 1)$ et l'image de \mathcal{K}_h est exactement l'orthogonal de $(1, \dots, 1)$. Le système linéaire (6.3) admet une solution si et seulement si $b_h \in (1, \dots, 1)^\perp$, c'est à dire

$$\sum_{i=0}^{n+1} (b_h)_i = 0.$$

D'après l'expression de b_h , cette condition équivaut à

$$\int_0^1 f(x) dx + \beta - \alpha = \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx + \beta - \alpha = \sum_{i=0}^{n+1} (b_h)_i = 0.$$

Exercice 6.2.3 Appliquer la méthode des différences finies (voir le Chapitre 2) au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Vérifier qu'avec un schéma centré d'ordre deux, on obtient un système linéaire à résoudre avec la même matrice \mathcal{K}_h (à un coefficient multiplicatif près) que celle issue de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 mais avec un second membre b_h différent. Même question pour le problème de Neumann (6.2).

Correction. Conditions aux limites de Dirichlet

La méthode des différences finies, basée sur un schéma centré d'ordre 2, nous conduit à résoudre, dans le cas du Laplacien avec conditions de Dirichlet, le système

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \text{ pour tout } 0 < i < n + 1, \\ u_0 = 0, \\ u_{n+1} = 0. \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

où $U_h = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$, \mathcal{K}_h est la matrice d'ordre n

$$\mathcal{K}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathcal{K}_h diffère de la matrice obtenue par la méthode des éléments finies à un facteur multiplicatif $1/h$ près. La méthode des éléments finis conduit à une expression différente du second membre

$$b_h^{EF} = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x - x_i}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1} - x_i}{h} dx \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

En pratique, on utilise une formule de quadrature pour évaluer les intégrales définissant b_h^{EF} . Si on utilise la formule des trapèzes, on obtient

$$b_h^{EF} = h(f(x_i))_{1 \leq i \leq n}.$$

Avec un tel choix, les deux méthodes conduisent au même système linéaire.

Conditions aux limites de Neumann

Pour le problème de Neumann, le système obtenu, suite à la discrétisation par différences finies, consiste à déterminer $(u_i)_{-1 \leq i \leq n+2}$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + a(x_i)u_i = f(x_i) \text{ pour tout } 0 < i < n + 1, \\ \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha \\ \frac{u_{n+2} - u_n}{2h} = \beta. \end{cases}$$

Où les noeuds fictifs x_{-1} et x_{n+2} ont été introduit afin que les conditions aux limites soient discrétisées à l'ordre 2. Si on élimine du système linéaire final les degrés de

liberté artificiellement introduits, on obtient les expressions suivantes

$$\mathcal{K}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(x_0)/2 & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & a(x_1) & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & a(x_n) & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & a(x_{n+1}/2) \end{pmatrix}$$

et $b_h = (-\frac{\alpha}{h} + f(x_0)/2, f(x_1), \dots, f(x_n), \frac{\beta}{h} + f(x_{n+1})/2)^T$. Le système obtenu par la méthode des éléments finis, dès lors qu'on utilise la formule des trapèzes pour évaluer les intégrales, est équivalent. Plus précisément, on a alors

$$\mathcal{K}_h^{EF} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a(x_0)/2 & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & a(x_1) & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & a(x_n) & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & a(x_{n+1})/2 \end{pmatrix}$$

et $b_h^{EF} = h(-\frac{\alpha}{h} + \frac{f(x_0)}{2}, f(x_1), \dots, f(x_n), \frac{\beta}{h} + \frac{f(x_{n+1})}{2})^T$.

Exercice 6.2.4 On considère $(n+2)$ masses ponctuelles (alignées) situées aux points $x_j = j/(n+1)$ pour $0 \leq j \leq n+1$ et reliées entre voisines par des ressorts de même raideur $k > 0$. On applique à chaque masse ponctuelle une force longitudinale f_j . Dans l'hypothèse de petits déplacements (longitudinaux) écrire l'énergie totale du système qu'il faut minimiser (on discutera le cas des extrémités libres ou fixées). Interpréter la recherche de la position d'équilibre du système en termes d'éléments finis.

Correction. On note u_j le déplacement de la masse j . L'allongement du ressort situé entre les masses j et $j+1$ est

$$\delta L_j = u_{j+1} - u_j .$$

Sous l'hypothèse de petits déplacements, l'énergie élastique du ressort est une fonction quadratique de l'allongement égale à $\frac{k}{2}(u_{j+1} - u_j)^2$. L'énergie totale du système est égale à la somme de l'énergie élastique de chaque ressort et de l'énergie potentielle due aux forces appliquées aux masses, soit

$$J(u) = \sum_{j=0}^n \frac{k}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 - \sum_{j=0}^{n+1} u_j f_j .$$

Si les deux extrémités sont fixées, l'énergie est à minimiser sur l'ensemble des vecteurs u tel que $u_0 = u_{n+1} = 0$. Si uniquement l'une des extrémités (par exemple si l'extrémité x_0 est fixée), l'espace de minimisation est l'ensemble des u tels que $u_0 = 0$. Si aucune extrémité n'est fixée, l'espace de minimisation n'a pas à être contraint. Par contre, dans ce dernier cas, l'existence d'un minimiseur n'est assurée que si la condition de compatibilité

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j = 0$$

est vérifiée.

Il y a une forte similitude entre le problème obtenu et la résolution de l'équation

$$-k\Delta u = f$$

par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , qui consiste à minimiser l'énergie

$$I(u) = \frac{k}{2} \|\nabla u\|_{L^2(0,1)}^2 - \int_0^1 f(x)u(x) dx$$

sur l'espace de discrétisation V_h . Soit u_h un élément de V_h et $U_h = (U_h^0, \dots, U_h^{n+1})$ les coordonnées de u_h dans la base classique de V_h . On a alors

$$I(u_h) = \sum_{j=0}^n \frac{k}{2} \frac{(U_h^{j+1} - U_h^j)^2}{\Delta x} - \sum_{j=0}^{n+1} \left(\int_0^1 f(x)\phi_j(x) dx \right) U_h^j.$$

Si on utilise la formule des trapèzes afin d'évaluer l'intégrale apparaissant dans la définition de I , on obtient

$$I(u_h) = \sum_{j=0}^n \frac{k}{2} \frac{(U_h^{j+1} - U_h^j)^2}{\Delta x} - \sum_{j=0}^{n+1} f(x_j)\phi_j U_h^j \Delta x.$$

En posant $f_j = (\Delta x)^2 f(x_j)$, on retrouve l'expression J à un coefficient Δx près.

Exercice 6.2.5 Démontrer l'équivalent du Théorème 6.2.6 de convergence de la méthode des éléments finis en dimension 1 appliquée au problème de diffusion (6.2) avec conditions aux limites de type Neumann.

Correction. La démonstration est identique mot pour mot à celle effectuée dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet.

Plus précisément, la formulation éléments finis consiste à déterminer

$$u_h \in V_h := \{v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n\},$$

où $x_j = j/(n+1)$ tel que pour tout $v_h \in V_h$, on ait

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \tag{6.5}$$

où

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + \alpha uv$$

et

$$L(v) = \int_0^1 fv dx - \alpha v(0) + \beta v(1).$$

La forme bilinéaire a est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(0, 1)$. La forme linéaire L est continue sur $H^1(0, 1)$ (les fonctions $H^1(0, 1)$ s'injectant de manière

continue dans $C([0, 1])$). D'après de Lemme **6.1.1**, l'approximation de Galerkin ci-dessus admet une solution unique et d'après le Lemme de C ea **6.1.2**, il existe $C > 0$ indépendant de h tel que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)}.$$

En choisissant $v_h = r_h u$, on r_h est l'opérateur d'interpolation de $H^1(0, 1)$ dans V_h de la définition **6.2.4**, il vient

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - r_h u\|_{H^1(0,1)}.$$

D'après le Lemme **6.2.5**, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - r_h u\|_{H^1(0,1)} = 0$$

et si $u \in H^2(0, 1)$, alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - r_h u\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Il s'en suit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0$$

et que si $u \in H^2(0, 1)$, il existe C indépendant de h tel que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Exercice 6.2.6 En g eneralisant les arguments précédents, démontrer le Théorème **6.2.14** de convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 à la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Correction. D'après le Lemme de C ea **6.1.2**, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)}, \quad (6.6)$$

où V_{0h} est l'espace des éléments finis \mathbb{P}_2 nuls aux bords. Afin de majorer le terme de droite, on introduit l'opérateur d'interpolation de H_0^1 sur V_{0h} qui à v associe

$$r_h v = \sum_{j=1}^n v(x_j) \psi_j + \sum_{j=0}^n v(x_{j+1/2}) \psi_{j+1/2},$$

où ψ_j et $\psi_{j+1/2}$ sont les fonctions de bases de l'espace des éléments finis \mathbb{P}_2 (voir cours, **p. 157**). L'introduction de cette opérateur d'interpolation nous permet de majorer le terme de droite de (6.6) par la norme H^1 de $(u - r_h u)$. Il ne nous reste donc plus qu'à estimer ce dernier terme.

Dans le cas $h = 1$, il existe une constante C_1 telle que pour tout $v \in H^3(0, 1)$,

$$\|(r_1 v - v)'\|_{L^2(0,1)} \leq C_1 \|v'''\|_{L^2(0,1)}. \quad (6.7)$$

Afin d'établir cette inégalité, on peut effectuer un raisonnement par l'absurde dans l'esprit de la démonstration de l'inégalité de Poincaré. Supposons que l'inégalité (6.7) soit violée pour toute constante C_1 . Il existe une suite v_n d'éléments de $H^3(0, 1)$ telle que pour tout n ,

$$\|(r_1 v_n - v_n)'\|_{L^2(0,1)} > \|v_n'''\|_{L^2(0,1)}.$$

Quitte à modifier v^n par l'ajout d'un polynôme de degré 2, on peut supposer que

$$\int_0^1 v_n dx = \int_0^1 v_n' dx = \int_0^1 v_n'' dx = 0.$$

De plus, quitte à multiplier v_n par une constante, on peut également supposer que

$$1 = \|(r_1 v_n - v_n)'\|_{L^2(0,1)}. \quad (6.8)$$

Par application successive du théorème de Poincaré Wirtinger, on en déduit que v'' , v' et v sont bornés dans $L^2(0, 1)$ et donc que v_n est borné dans $H^3(0, 1)$. D'après le Théorème de Rellich et quitte à extraire une sous-suite de v_n , on peut donc supposer que la suite v_n est convergente dans $H^2(0, 1)$. De plus, comme v_n''' converge vers zéro dans $L^2(0, 1)$, la suite v_n est convergente dans $H^3(0, 1)$. Soit v la limite de v_n . Tout d'abord, on a

$$\|v'''\|_{L^2(0,1)} = \lim \|v_n'''\|_{L^2(0,1)} = 0,$$

d'autres part, l'opérateur r_1 étant continu de $H^1(0, 1)$ à valeurs dans \mathbb{P}_2 (les fonctions H^1 en dimension 1 s'injectant dans l'espace des fonctions continues), on peut passer à la limite dans (6.8), d'où

$$1 = \|(r_1 v - v)'\|_{L^2(0,1)}.$$

La dérivée troisième de v étant nulle, c'est un polynôme de degré inférieur ou égale à 2. Ainsi,

$$r_1 v = v,$$

ce qui est contradictoire avec l'inégalité précédente et établit (6.7).

Nous allons généraliser l'inégalité (6.7) pour tout $h = 1/(n + 1)$, en prenant soin d'exprimer la dépendance de la constante de majoration en fonction de n . On décompose la norme L^2 de $r_h v - v$ en une somme de termes portant sur chacune des mailles.

$$\|(r_h v - v)'\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |(r_h v - v)'(x)|^2 dx = \sum_{j=0}^n \int_{jh}^{(j+1)h} |(r_h v - v)'(x)|^2 dx.$$

On pose $v_j(x) = v(h(j + x))$. Par changement de variable, on a

$$\|(r_h v - v)'\|_{L^2(0,1)}^2 = h^{-1} \sum_{j=0}^n \int_0^1 |(r_1 v_j - v_j)'(x)|^2 dx \leq C_1^2 h^{-1} \sum_{j=0}^n \|v_j'''\|_{L^2(0,1)}^2.$$

En effectuant de nouveau un changement de variable, on établit que

$$\|v_j'''\|_{L^2(0,1)}^2 = h^5 \int_{hj}^{(j+1)h} |v'''(x)|^2 dx.$$

Ainsi,

$$\|(r_h v - v)'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_1^2 h^4 \|v'''\|_{L^2(0,1)}^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, la norme L^2 du gradient est une norme équivalente à la norme H^1 sur H_0^1 . Il existe donc C_0 tel que pour tout $v \in H^3(0,1) \cap H_0^1(0,1)$,

$$\|r_h v - v\|_{H^1(0,1)} \leq C_0 h^2 \|v'''\|_{L^2(0,1)}.$$

La convergence de la méthode des éléments finie \mathbb{P}_2 dans le cas régulier découle alors de la majoration (6.6) par $\|u - r_h u\|_{H^1(0,1)}$.

Il reste à établir la convergence dans le cas où on effectue aucune hypothèse de régularité sur la solution du problème. A cet effet, on établit dans un premier temps la continuité uniforme r_h par rapport à h . Notons que la continuité de l'opérateur r_h est évidente, les fonctions $H^1(0,1)$ s'injectant de manière continue dans $C([0,1])$. Il nous faut donc seulement étudier la dépendance de la constante de continuité en fonction de h . On a

$$\|(r_h v)'\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{j=0}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(r_h v)'|^2 dx,$$

et . Par changement de variable, dans l'expression précédente, il vient

$$\|(r_h v)'\|_{L^2(0,1)}^2 = h^{-1} \sum_{j=0}^n \int_0^1 |(r_1 v_j)'|^2 dx.$$

L'opérateur r_1 étant continu, il existe une constante C_3 telle que

$$\|(r_h v)'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq h^{-1} C_3 \sum_{j=0}^n \int_0^1 |v_j'|^2 dx.$$

En effectuant le changement de variable inverse de celui réalisé précédemment, on obtient

$$\|(r_h v)'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_3 \|v'\|_{L^2(0,1)}^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, la norme L^2 du gradient est équivalente à la norme H^1 sur H_0^1 . Il existe donc une constante C indépendante de h telle que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$,

$$\|r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq C \|v\|_{H^1(0,1)}.$$

Afin d'établir la convergence de la méthode des éléments finis, il suffit de prouver que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (6.9)$$

Comme dans le cas régulier, la convergence de la méthode s'obtient en majorant (6.6) par $\|u - r_h u\|_{H^1(0,1)}$. Soit $v \in H_0^1(0,1)$. Comme l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans $H_0^1(0,1)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que

$$\|v - \varphi\|_{H^1}^2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, on a

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq \|v - \varphi\|_{H^1(0,1)} + \|\varphi - r_h \varphi\|_{H^1(0,1)} + \|r_h(\varphi - v)\|_{H^1(0,1)}.$$

L'opérateur r_h étant uniformément continu par rapport à h , il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq C\|v - \varphi\|_{H^1(0,1)} + \|\varphi - r_h \varphi\|_{H^1(0,1)}.$$

D'après l'analyse précédente, $\|\varphi - r_h \varphi\|_{H^1(0,1)} \rightarrow 0$ lorsque h tend vers zéro. Ainsi, pour h assez petit, on a

$$\|\varphi - r_h \varphi\|_{H^1(0,1)} \leq (1 + C)\|v - \varphi\|_{H^1(0,1)} = (1 + C)\varepsilon.$$

On en déduit (6.9) et donc la convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 .

Exercice 6.2.7 Calculer explicitement la matrice de rigidité \mathcal{K}_h associée au problème consistant à trouver

$$u_h \in V_{0h} := \{v \in C^1([0,1]) \text{ tel que } v_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_3 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n\} \cap H_0^2(\Omega)$$

tel que

$$\int_0^1 u_h''(x) v_h''(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0h}. \quad (6.10)$$

Correction. Tout d'abord, rappelons que l'espace V_{0h} , de dimension $2n + 2$ est engendré par les fonctions de base

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) \text{ pour } 1 \leq j \leq n, \quad \psi_j(x) = \psi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) \text{ pour } 0 \leq j \leq n + 1,$$

où ϕ et ψ sont les fonctions mères

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)^2(1-2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)^2(1+2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} x(1+x)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ x(1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

On note E la base de V_{0h} définie par

$$E = (e_i)_{0 \leq i \leq 2n+2} = (\psi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \psi_n, \psi_{n+1}).$$

du bord. L'ouvert Ω étant simplement connexe, ce chemin sépare Ω en deux ouverts simplement connexes Ω_1 et Ω_2 . On note x_1 et x_2 les vecteurs composés du nombre de triangles, d'arêtes, de sommets et de sommets intérieurs de chacun des maillages. On note \tilde{n}_c et \tilde{n}_s les nombres de cotés et de sommet du chemin. On vérifie que

$$x = x_1 + x_2 + (0, -\tilde{n}_c, -\tilde{n}_s, \tilde{n}_s - 2).$$

De plus, $\tilde{n}_s = \tilde{n}_c + 1$. Si $L \cdot x_1 + \alpha = 0$ et $L \cdot x_2 + \alpha = 0$, on a $L \cdot x + \alpha = 0$ si et seulement si

$$\tilde{n}_c L \cdot (0, -1, -1, 1) + L \cdot (0, 0, -1, -1) - \alpha = 0.$$

Le nombre de noeuds \tilde{n}_c de cotés du chemin pouvant prendre des valeurs quelconques, on en déduit que

$$(L \cdot x_1 = \alpha \text{ et } L \cdot x_2 = \alpha) \Rightarrow L \cdot x = 0, \quad (6.12)$$

pour tout maillage de Ω si et seulement si

$$L \cdot (0, 0, 1, 1) = -\alpha \text{ et } L \cdot (0, -1, -1, 1) = 0. \quad (6.13)$$

On a montré que (6.11) et (6.13) étaient des conditions nécessaires pour que la relation $L \cdot x = \alpha$ soit vérifiée par tout maillage. Par récurrence sur le nombre de triangles du maillage, on obtient de plus que ces conditions sont suffisantes, l'équation (6.11) nous permettant d'initialiser la récurrence et l'équation (6.13) nous permettant de prouver que si la relation $L \cdot x = \alpha$ est vérifiée pour tout maillage comportant moins de n triangles, elle l'est également pour les maillages de taille n ($n > 1$). On peut reformuler les conditions (6.11) et (6.13) sous la forme $L \in \text{Vect}((-2, 1, 0, 1); (-1, 0, 1, 1))$ et $\alpha = -L \cdot (0, 0, 1, 1)$. Ainsi, on a uniquement deux relations d'Euler indépendantes :

$$-2n_t + n_c + n_{s0} = 1 \text{ et } -n_t + n_s + n_{s0} = 2.$$

On vérifie enfin que ces relations sont équivalentes à celles proposées par l'énoncé.

Exercice 6.3.2 Soit K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. Montrer que tout polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x),$$

où les $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ sont les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$.

Correction. Soit p un polynôme de degré un et K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. Comme $x = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) a_j$, et que l'application qui à x associe $p(x) - p(0)$ est linéaire, on a

$$p(x) - p(0) = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) (p(a_j) - p(0)).$$

Comme $\sum_j \lambda_j = 1$, on en déduit que

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) p(a_j).$$

Exercice 6.3.3 Soit K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$.

Soit $(a_{jj'})_{1 \leq j < j' \leq N+1}$ les points milieux des arêtes de K définis par leurs coordonnées barycentriques

$$\lambda_j(a_{jj'}) = \lambda_{j'}(a_{jj'}) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_l(a_{jj'}) = 0 \text{ pour } l \neq j, j'.$$

Vérifier que Σ_2 est précisément constitué des sommets et des points milieux des arêtes et que tout polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x) (2\lambda_j(x) - 1) + \sum_{1 \leq j < j' \leq N+1} 4p(a_{jj'}) \lambda_j(x) \lambda_{j'}(x), \quad (6.14)$$

où les $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ sont les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$.

Correction. Rappelons tout d'abord que le treillis Σ_2 est défini par

$$\Sigma_2 = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}$$

Il contient naturellement les sommets du simplexe (pour lesquels les coordonnées barycentriques sont $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$) et les points milieux des arêtes (pour lesquels les coordonnées barycentriques sont $\lambda_i(a_{jj'}) = (\delta_{ij} + \delta_{ij'})/2$). Réciproquement, tout élément du treillis Σ_2 est soit un sommet, soit un point milieu d'une arête. En effet, la somme des coordonnées barycentriques d'un point étant égale à un, les coordonnées barycentriques $\lambda_i(x)$ d'un point du treillis sont soit égale à un pour l'un des sommets, nul pour les autres (dans ce cas x un sommet du simplexe), soit égale à $1/2$ pour deux sommets et nul pour les autres (dans ce cas, x est un point milieu d'une arête). Le treillis Σ_2 est donc précisément constitué de l'ensemble des points milieux des arêtes et des sommets du simplexe.

Comme les coordonnées barycentriques sont des fonctions affines, les fonctions q_j et $q_{jj'}$ définies par

$$\begin{aligned} q_j(x) &= \lambda_j(x) (2\lambda_j(x) - 1) \\ q_{jj'}(x) &= 4\lambda_j(x) \lambda_{j'}(x) \end{aligned}$$

sont des polynômes de degré deux. De plus ils sont indépendants les uns des autres, car

$$q_j(a_i) = \delta_{ij}, \quad q_j(a_{ii'}) = 0, \quad q_{jj'}(a_i) = 0, \quad q_{jj'}(a_{ii'}) = \delta_{ij} \delta_{i'j'}.$$

Il suffit donc de vérifier que la famille constituée par les polynômes q_j et $q_{jj'}$ contient autant d'éléments que l'espace \mathbb{P}_2 pour en déduire qu'elle en est génératrice et

conclure. L'espace des polynômes \mathbb{P}_2 , engendré par N monômes de type x_i^2 , $N(N-1)/2$ du type $x_i x_j$ (avec $i < j$), N monômes de type x_i et la constante unité, est de dimension $N + N(N-1)/2 + N + 1 = N(N+1)/2 + N + 1$. La famille constituée des q_j et $q_{jj'}$ compte précisément $N + 1 + (N+1)N/2$ éléments. Elle engendre donc l'espace des polynômes de degré 2 et tout polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ se décompose sur cette base selon (6.14).

Exercice 6.3.4 Soit \mathcal{T}_h un maillage de $\bar{\Omega}$ pour Ω ouvert simplement connexe polygonal de \mathbb{R}^2 . On note n_t le nombre de triangles de \mathcal{T}_h , n_c le nombre de faces ou cotés des triangles (un coté commun à deux triangles n'est compté qu'une seule fois), n_s le nombre de sommets du maillage, et n_{0s} le nombre de sommets intérieurs du maillage. Montrer que les dimensions de l'espace V_h d'éléments finis de Lagrange d'ordre k et de son sous-espace V_{0h} des fonctions s'annulant sur le bord du domaine sont

$$\dim V_h = \frac{k(k-1)}{2} n_t + k n_s - k + 1, \quad \dim V_{0h} = \frac{k(k+1)}{2} n_t - k n_s + k + 1.$$

Correction. Pour un treillis d'ordre k , on compte $(k+1)(k+2)/2$ éléments ou noeuds, dont $3k$ sur le bord du triangle. En particulier, un treillis d'ordre k compte $(k+1)(k+2)/2 - 3k = (k-1)(k-2)/2$ points "internes", $3(k-1)$ points situés à l'intérieur des arêtes et 3 aux sommets.

La dimension de V_h est égale au nombre total de degrés de liberté. A l'intérieur de chaque triangle, on compte $(k-1)(k-2)/2$ degrés de liberté soit $n_t(k-1)(k-2)/2$, auxquels il faut ajouter les degrés de liberté situés à l'intérieur des arêtes, soit $(k-1)n_c$ degrés de liberté et les n_s sommets du maillage. Au total,

$$\dim(V_h) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} n_t + (k-1)n_c + n_s$$

D'après la première formule d'Euler (voir Exercice 6.3.1), $n_c = n_t + n_s - 1$. Ainsi,

$$\dim(V_h) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} n_t + (k-1)n_t + k n_s + (1-k) = \frac{(k-1)k}{2} n_t + k n_s + 1 - k.$$

Le nombre de degrés de liberté de V_{0h} est égal à celui de V_h , auquel il faut soustraire les degrés de liberté situés sur le bord $\partial\Omega$ du domaine qui en compte $k(n_s - n_{0s})$. On a donc

$$\dim(V_{0h}) = \frac{(k-1)k}{2} n_t + k n_s + 1 - k - k(n_s - n_{0s}) = \frac{(k-1)k}{2} n_t + k n_{0s} + 1 - k.$$

D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} n_{0s} &= 3n_t + n_s - 2n_c \\ &= 3n_t + n_s - 2(n_t + n_s - 1) \\ &= n_t - n_s + 2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\dim(V_{0h}) = \frac{(k-1)k}{2} n_t + k n_t - k n_s + 1 + k = \frac{(k+1)k}{2} n_t - k n_s + 1 + k.$$

Exercice 6.3.5 Démontrer la formule (6.43) en dimension $N = 2$, c'est à dire

$$\int_K \lambda_1(x)^{\alpha_1} \lambda_2(x)^{\alpha_2} \lambda_3(x)^{\alpha_3} dx = 2\text{Aire}(K) \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!}, \quad (6.15)$$

où K est un simplexe de \mathbb{R}^2 , $\lambda_i(x)$ sont les coordonnées barycentriques de x et α_i des entiers naturels.

Correction. On pose

$$I = \int_K \lambda_1^{\alpha_1}(x) \lambda_2^{\alpha_2}(x) \lambda_3^{\alpha_3}(x) dx.$$

Soit a_i les sommets de K , et F l'application de

$$S = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\}$$

à valeurs dans K définie par

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) a_3.$$

L'application F est un difféomorphisme de S dans K . En effectuant le changement de variables $x = F(\lambda_1, \lambda_2)$ dans l'expression de I , on obtient

$$I = \int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} |\det(DF)| d\lambda_1 d\lambda_2,$$

avec $\lambda_3 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)$. Or

$$|\det(DF)| = \left| \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \wedge \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \right| = |(a_1 - a_3) \wedge (a_2 - a_3)| = 2\text{Aire}(K).$$

Ainsi,

$$I = 2\text{Aire}(K) \int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (6.16)$$

Il reste à calculer l'intégrale figurant dans le terme de droite.

$$\int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2 = \int_0^1 \lambda_1^{\alpha_1} \left(\int_0^{1-\lambda_1} \lambda_2^{\alpha_2} (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_3} d\lambda_2 \right) d\lambda_1.$$

On effectue le changement de variable $\lambda_2 = (1 - \lambda_1)t$ dans l'intégrale selon λ_2 .

$$\int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2 = \int_0^1 \lambda_1^{\alpha_1} (1 - \lambda_1)^{\alpha_2 + \alpha_3 + 1} d\lambda_1 \int_0^1 t^{\alpha_2} (1 - t)^{\alpha_3} dt$$

Par intégration par partie successives, on montre que

$$\int_0^1 t^n (1 - t)^m dt = \frac{n! m!}{(n + m + 1)!}.$$

Ainsi,

$$\int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2 = \frac{\alpha_1! (\alpha_2 + \alpha_3 + 1)!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!} \frac{\alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_2 + \alpha_3 + 1)!} = \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!}.$$

qui combinée avec (6.16) nous donne (6.15).

Exercice 6.3.6 Montrer que les formules de quadrature

$$\int_K \psi(x) dx \approx \text{Volume}(K)\psi(a_0), \quad (6.17)$$

avec $a_0 = (N + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{N+1} a_i$, le barycentre de K , et

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{Volume}(K)}{N + 1} \sum_{i=1}^{N+1} \psi(a_i). \quad (6.18)$$

sont exactes pour $\psi \in \mathbb{P}_1$.

Correction. Soit p un polynôme de degré 1, il existe q polynôme de degré 1 en λ tel que $q(\lambda(x)) = p(x)$. Or $\int_K 1 dx = \text{Volume}(K)$ et $\int_K \lambda_k dx = \frac{\text{Volume}(K)}{N+1} \sum_i \lambda_k(a_i)$. On en déduit donc que

$$\int_K q(\lambda(x)) dx = \frac{\text{Volume}(K)}{N + 1} \sum_i q(\lambda(a_i)),$$

et que la formule (6.18) est exacte pour les polynômes de degré 1. De plus, comme p est affine, $p(a_0) = 1/(N + 1) \sum_i p(a_i)$, ce qui établit l'exactitude de la formule (6.17)

Exercice 6.3.7 Soit K un triangle de \mathbb{R}^2 de sommets $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$ et de barycentre a_0 . Soit $(a_{ij})_{1 \leq i < j \leq 3}$ les points milieux des segments d'extrémités a_i, a_j . Montrer que la formule de quadrature

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{Aire}(K)}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \psi(a_{ij})$$

est exacte pour $\psi \in \mathbb{P}_2$, tandis que la formule

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{Aire}(K)}{60} \left(3 \sum_{i=1}^3 \psi(a_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \psi(a_{ij}) + 27\psi(a_0) \right)$$

est exacte pour $\psi \in \mathbb{P}_3$.

Correction. On procède comme pour l'Exercice 6.3.6 en vérifiant l'exactitude des formules de quadrature pour les polynômes de la forme

$$p(x) = q(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)),$$

où (λ_i) sont les coordonnées barycentriques de x et q est un polynôme de trois variables de degré 2 ou 3. En d'autres termes, il s'agit de vérifier que pour tout polynôme q de trois variables et de degré deux

$$\int_K q(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)) dx = T_2(q), \quad (6.19)$$

où T_2 est défini par

$$T_2(q) = \frac{\text{Aire}(K)}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} q((e_i + e_j)/2),$$

(e_1, e_2, e_3) désignant la base canonique de \mathbb{R}^3 et que pour tout polynôme q de trois variables et de degré trois,

$$\int_K q(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)) dx = T_3(q), \quad (6.20)$$

où

$$T_3(q) = \frac{\text{Aire}(K)}{60} \left(3 \sum_{i=1}^3 q(e_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} q((e_i + e_j)/2) + 27q((e_1 + e_2 + e_3)/3) \right).$$

On note

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_K \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} dx = 2\text{Aire}(K) \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!}.$$

Les équations (6.19) et (6.20) sont linéaires par rapport au polynôme q . Il suffit donc de les établir pour une base de l'ensemble des polynômes de trois variables de degré deux et trois respectivement. On peut par exemple vérifier que, pour tout $\alpha_i \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq 2$,

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T_2(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3})$$

et pour tout $\alpha_i \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq 3$,

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T_3(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}).$$

Pour toute permutation σ de $\{1, 2, 3\}$ et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$, on a

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = S(\alpha_{\sigma_1}, \alpha_{\sigma_2}, \alpha_{\sigma_3})$$

et

$$T_\beta(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}) = T_\beta(X_1^{\alpha_{\sigma_1}} X_2^{\alpha_{\sigma_2}} X_3^{\alpha_{\sigma_3}}) \text{ pour } \beta = 1, 2.$$

Ces considérations d'invariance, nous permettent de limiter le nombre de vérifications à effectuer. Seuls les 4 cas et les 7 cas suivants sont à considérer pour vérifier respectivement la première et deuxième formule de quadrature.

$$\begin{aligned} S(0, 0, 0) &= \text{Aire}(K) &= T_2(1) &= T_3(1), \\ S(1, 0, 0) &= \text{Aire}(K)/3 &= T_2(X_1) &= T_3(X_1), \\ S(1, 1, 0) &= \text{Aire}(K)/12 &= T_2(X_1 X_2) &= T_3(X_1 X_2), \\ S(2, 0, 0) &= \text{Aire}(K)/6 &= T_2(X_1^2) &= T_3(X_1^2), \\ S(1, 1, 1) &= \text{Aire}(K)/60 &= T_3(X_1 X_2 X_3), \\ S(2, 1, 0) &= \text{Aire}(K)/30 &= T_3(X_1^2 X_2), \\ S(3, 0, 0) &= \text{Aire}(K)/60 &= T_3(X_1^3). \end{aligned}$$

Exercice 6.3.8 Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq I}$ des points d'un N -simplexe K et $(\omega_i)_{1 \leq i \leq I}$ des poids réels. Soit une formule de quadrature

$$\int_K \psi(x) dx \approx \text{Volume}(K) \sum_{i=1}^I \omega_i \psi(b_i)$$

qui soit exacte pour $\psi \in \mathbb{P}_k$. Montrer que, pour une fonction régulière ψ , on a

$$\frac{1}{\text{Volume}(K)} \int_K \psi(x) dx = \sum_{i=1}^I \omega_i \psi(b_i) + \mathcal{O}(h^{k+1}),$$

où h est le diamètre de K .

Correction. Soit ψ une fonction de classe C^{k+1} . En effectuant un développement de Taylor, il existe une constante C telle que pour tout élément a du domaine (borné) considéré, il existe un polynôme T_a dépendant de ψ , de degré au plus k tel que

$$|\psi(a+u) - T_a(u)| \leq C|u|^{k+1}.$$

Considérons un simplexe K de centre de gravité a_0 , par intégration de la formule précédente sur les éléments u tels que $a_0+u \in K$ (en particulier, $|u| < h$), on obtient que

$$\left| \int_K \psi dx - \int_K T_{a_0}(x - a_0) dx \right| \leq C \text{Vol}(K) h^{k+1}.$$

La formule de quadrature étant exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à k , on a donc

$$\left| \int_K \psi dx - \text{Vol}(K) \sum_i \omega_i T_{a_0}(b_i - a_0) \right| \leq C \text{Vol}(K) h^{k+1}.$$

En utilisant à nouveau le développement de Taylor de ψ en a_0 , on en déduit que

$$\left| \int_K \psi dx - \text{Vol}(K) \sum_i \omega_i \psi(b_i) \right| \leq C' \text{Vol}(K) h^{k+1}$$

où C' est une constante indépendante de h , ce qui achève la démonstration.

Exercice 6.3.9 On considère le carré $\Omega =]-1, +1[^2$ maillé suivant la Figure 6.1. Calculer la matrice de rigidité \mathcal{K}_h des éléments finis \mathbb{P}_1 appliqués au Laplacien avec condition aux limites de Neumann (on utilisera les symétries du maillage).

Correction. On note V_h l'espace des éléments finis \mathbb{P}_1 associé au maillage de la Figure 6.1. L'espace V_h est de dimension 9. Pour tout $i \in \{1, \dots, 9\}$, on note ϕ_i la fonction de base associée au i ème nœud (on utilise la numérotation des nœuds indiquée sur la figure). En d'autres termes, ϕ_i est l'unique élément de V_h tel que

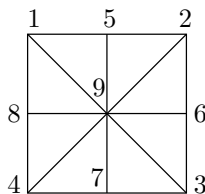


FIGURE 6.1 – Exemple de maillage et de numérotation des nœuds.

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tout indice $j \in \{1, \dots, 9\}$. La matrice de rigidité associée à la résolution du Laplacien est définie pour tout couple d'indices i et j par

$$(\mathcal{K}_h)_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx.$$

On a donc 81 coefficients à déterminer ! Cependant, dès que ϕ_i et ϕ_j sont à support disjoint, $(\mathcal{K}_h)_{i,j} = 0$. Enfin, en utilisant les symétries du maillage, on constate qu'il suffit de calculer six coefficients de la matrice de rigidité, les autres s'en déduisant aisément. En l'occurrence, on doit calculer $(\mathcal{K}_h)_{1,1}$, $(\mathcal{K}_h)_{1,5}$, $(\mathcal{K}_h)_{1,9}$, $(\mathcal{K}_h)_{5,5}$, $(\mathcal{K}_h)_{5,9}$ et $(\mathcal{K}_h)_{9,9}$. Le gradient des fonctions de base ϕ_i est constant sur chaque maille, qui sont toutes de même aire $1/2$. Le calcul de nos 9 coefficients est donc aisé et

$$(\mathcal{K}_h)_{1,1} = 1, (\mathcal{K}_h)_{1,5} = -1/2, (\mathcal{K}_h)_{1,9} = 0, (\mathcal{K}_h)_{5,5} = 2, (\mathcal{K}_h)_{5,9} = -1, (\mathcal{K}_h)_{9,9} = 4.$$

En rassemblant ces résultats, on obtient

$$\mathcal{K}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.3.10 Appliquer la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.21)$$

dans le carré $\Omega =]0, 1[^2$ avec le maillage triangulaire uniforme de la Figure 6.2. Montrer que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h est la même matrice que celle que l'on obtiendrait par application de la méthode des différences finies (à un facteur multiplicatif h^2 près), mais que le second membre b_h est différent.

Correction. On note $n + 2$ le nombre de mailles situées sur l'un des bords du domaine. Soit $h = 1/(n+1)$, la taille d'une maille. On note $x_{i,j} = (x_i, x_j)$ les sommets

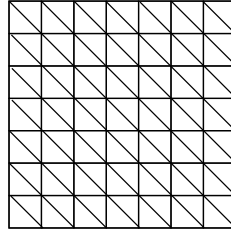


FIGURE 6.2 – Maillage triangulaire uniforme d'un carré

du maillage où $x_i = ih$ (on a $1 \leq i, j \leq n$). On numérote les nœuds du maillage ligne par ligne. En d'autres termes, on pose $a_{i+jn} = x_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Enfin, on note ϕ_k la fonction de base \mathbb{P}_1 associée au nœud a_k . La Figure 6.3 représente les valeurs du gradient d'une fonction de base ϕ_k sur son support (constant par maille).

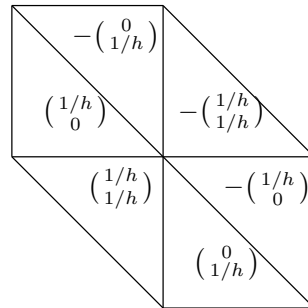


FIGURE 6.3 – Valeurs du gradient d'une fonction de base

On cherche à calculer $\mathcal{A}_{h_k,l} = \int_{\Omega} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l dx$. Si $k = l$,

$$\mathcal{A}_{h_k,k} = \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx.$$

Le gradient $\nabla \phi_k$ est nul sur tout Ω à l'exclusion des 6 triangles contenant a_k . Sur chacun d'entre eux, $|\nabla \phi_k|^2$ est constant, égale à $1/h^2$ sur quatre d'entre eux, $2/h^2$ sur les deux autres. Enfin, l'aire des triangles du maillage étant égale à $h^2/2$,

$$\mathcal{A}_{h_k,k} = 4.$$

Si a_k et a_l sont des nœuds voisins, c'est à dire si $k = l + 1$, $k = l - 1$, $k = l + n - 1$, $k = l + n$, $k = l - n$ ou $k = l - n + 1$, les supports de ϕ_k et ϕ_l ne sont pas disjoints. Cependant, le terme $\mathcal{A}_{h_k,l}$ est nul dans les cas $k = l - n + 1$ et $k = l + n - 1$ (les gradients des fonctions ϕ_k et ϕ_l sont orthogonaux). Dans les autres cas, on a

$$\mathcal{A}_{h_k,l} = -1.$$

En d'autres termes, on a

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} D & E & & & 0 \\ E & D & E & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & E & D & E \\ & & & E & D \end{pmatrix}$$

où E et D sont les matrices $n \times n$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc en effet la matrice issue de la méthode des différences finies (voir cours, section **2.2.6**) multipliée par h^2 . Cependant, le second membre du système linéaire obtenu diffère, car, en général,

$$(b_h)_k = \int_{\Omega} f \phi_k dx \neq h^2 f(a_k).$$

Exercice 6.3.11 On reprend les notations de l'Exercice **6.3.10**. On note n le nombre de points du maillage sur un côté du carré (supposé être le même pour chaque côté). On numérote "ligne par ligne" les nœuds du maillage (ou les degrés de liberté). Montrer que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h des éléments finis \mathbb{P}_1 est de taille de l'ordre de n^2 et de largeur de bande de l'ordre de $2n$ (pour n grand).

Montrer que la même méthode et le même type de maillage pour le cube $\Omega =]0, 1[^3$ conduisent à une matrice de taille de l'ordre de n^3 et de largeur de bande de l'ordre de $2n^2$ (où n est le nombre de nœuds le long d'une arête du cube Ω).

Correction. La taille de la matrice \mathcal{K}_h est exactement n^2 , tandis que sa demi-largeur de bande est n , en effet, dès que $|k - l| > n$, $\mathcal{K}_{hk,l} = 0$. Dans le cas du cube, on note $a_{i+jn+kn^2} = (x_i, x_j, x_k)$ les nœuds du maillage, où $x_i = i/(n+1)$. Le nombre de degré de liberté est donc égal à n^3 . Enfin, si $|k - l| > n^2 + n$, le support des fonctions test ϕ_k et ϕ_l sont disjoints. Ainsi, la matrice du système obtenu à une demi-largeur de bande de l'ordre de n^2 pour n grand.

Exercice 6.3.12 On dit qu'une matrice carrée réelle $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une M-matrice si, pour tout i ,

$$b_{ii} > 0, \quad \sum_{k=1}^n b_{ik} > 0, \quad b_{ij} \leq 0 \quad \forall j \neq i.$$

Montrer que toute M-matrice est inversible et que tous les coefficients de son inverse sont positifs ou nuls.

Correction. Soit B une M-matrice et $X \in \mathbb{R}^N$ tels que $BX = Y \geq 0$ (c'est à dire tels que toutes les coordonnées Y_i de $Y = BX$ soient positives). Introduisons l'indice i_0 tel que

$$X_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq N} X_i.$$

On a alors

$$b_{i_0 i_0} X_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} b_{i_0 j} X_j = Y_{i_0} \geq 0,$$

d'où

$$\left(\sum_{j=1}^N b_{i_0 j} \right) X_{i_0} \geq \sum_{j \neq i_0} b_{i_0 j} (X_{i_0} - X_j) \geq 0,$$

d'après la définition de i_0 . Comme $\sum_{j=1}^N b_{i_0 j} > 0$, on en déduit que $X_{i_0} \geq 0$ et donc que $X \geq 0$. On en déduit que B est inversible car injective. En effet, si $BX = 0$, $BX \geq 0$ et $B(-X) \geq 0$, d'où $X \geq 0$ et $-X \geq 0$, c'est à dire $X = 0$. Comme $BX \geq 0$ implique $X \geq 0$, les coefficients de la matrice B^{-1} sont positifs.

Exercice 6.3.13 On se place en dimension $N = 2$. Soit u_h la solution approchée du problème de Dirichlet (6.21) obtenue par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . On suppose que tous les angles des triangles $K_i \in \mathcal{T}_h$ sont inférieurs ou égaux à $\pi/2$. Montrer que $u_h(x) \geq 0$ dans Ω si $f(x) \geq 0$ dans Ω . Indication : on montrera que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_h + \epsilon \text{Id}$ est une M-matrice, où \mathcal{K}_h est la matrice de rigidité.

Correction. Soit \mathcal{K}_h la matrice du système issu de la méthode des éléments finis, avec conditions de Dirichlet. Il suffit de prouver que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_h + \epsilon \text{Id}$ est une M-matrice. En effet, dans ce cas et d'après l'exercice précédent, tous les coefficients de la matrice $(\mathcal{K}_h + \epsilon \text{Id})^{-1}$ sont positifs. L'application qui à une matrice associe son inverse étant continue sur l'ensemble des matrices inversibles, on en déduit en faisant tendre ϵ vers 0 que les coefficients de la matrice \mathcal{K}_h^{-1} sont positifs.

Tout d'abord, il est clair que

$$(\mathcal{K}_h)_{ii} > 0 \tag{6.22}$$

pour tout i . Considérons ensuite deux sommets distincts a_i et a_j communs à un triangle T_k du maillage.

Le gradient de ϕ_i est orthogonal au coté du triangle T_k opposé à a_i , car la restriction de ϕ_i à cette arête est la constante 0. Il en est de même pour $\nabla \phi_j$. On en déduit que l'angle formés par les vecteurs $\nabla \phi_i$ et $\nabla \phi_j$ est l'opposé (modulo π) de l'angle du triangle T_k au sommet de T_k distinct de a_i et a_j . Or on a supposé que tous les angles des triangles du maillages étaient inférieurs à $\pi/2$. Il s'en suit que l'angle formé par ces deux vecteurs $\nabla \phi_i$ et $\nabla \phi_j$ est aigue et que

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \leq 0$$

sur T_k . Le raisonnement étant valable sur tous les triangles du maillage, on en déduit que

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \leq 0 \text{ pour tout } i \neq j. \tag{6.23}$$

Soit n_0 le nombre de nœuds du maillage situés à l'intérieur du domaine Ω et n le nombre de nœuds total, on numérote les nœuds a_i du maillage de sorte que $a_i \in \partial\Omega$ pour $i > n_0$. Comme

$$1 = \sum_{j=1}^n \phi_j,$$

pour tout i , $0 < i \leq n_0$,

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla 1 \, dx = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx.$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{n_0} \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = - \sum_{j=n_0+1}^n \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx. \quad (6.24)$$

Or on a prouvé précédemment que le second membre de (6.24) est positif. On a donc montré que

$$\sum_{i=1}^{n_0} (\mathcal{K}_h)_{ij} \geq 0. \quad (6.25)$$

De (6.22), (6.23), (6.25), on déduit que $\mathcal{K}_h + \varepsilon I$ est une M-matrice pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 6.3.14 Appliquer la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k au système de l'élasticité (5.15). Montrer en particulier que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h est dans ce cas d'ordre Nn_{dl} où N est la dimension d'espace et n_{dl} est le nombre de nœuds de degrés de liberté.

Correction. La formulation faible de l'élasticité linéarisée consiste à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)^N$ tel que

$$\int_{\Omega} (2\mu e(u) \cdot e(v) + \lambda(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Soit \mathcal{T}_h un maillage régulier de Ω , on introduit les espaces discrets

$$V_h = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R})^N : u_i|_K \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}$$

et

$$V_{0h} = \{u \in V_h : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Soit $(\phi_i)_{i=1, n_{dl}}$ les fonctions de base associées aux degrés de liberté du treillis d'ordre k du maillage \mathcal{T}_h . L'approximation variationnelle du problème (5.56) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k consiste à déterminer $u \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega} (2\mu e(u) \cdot e(v) + \lambda(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \text{ pour tout } v \in V_{0h},$$

c'est à dire à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

où

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} (2\mu e(\phi_i) \cdot e(\phi_j) + \lambda(\operatorname{div}\phi_i)(\operatorname{div}\phi_j)) \, dx$$

et

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f \cdot \phi_i \, dx.$$

L'existence d'une solution à ce problème est évidente par application du théorème de Lax-Milgram. Enfin, chaque élément de l'espace V_{0h} est défini de manière unique par ses valeurs (dans \mathbb{R}^N) aux nœuds de degrés de liberté du treillis d'ordre k . Ainsi, la dimension de l'espace V_{0h} est égale à Nn_{dl} où n_{dl} est le nombre de nœuds de degrés de liberté.

Exercice 6.3.15 Expliciter la matrice de rigidité \mathcal{K}_h obtenue par application de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k au problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.26)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, et $a \in L^\infty(\Omega)$ tel que $a(x) \geq a_0 > 0$ p.p. dans Ω .

Correction. L'espace d'approximation issu de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k , associé au problème de Neumann (6.26) est basée sur l'espace discret

$$V_h = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R}) : u|_K \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Soit $(\phi_i)_{i=1, n_{dl}}$ les fonctions de base associées au degré de liberté du treillis d'ordre k du maillage \mathcal{T}_h . L'approximation variationnelle consiste à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j + a\phi_i\phi_j) \, dx$$

et

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f\phi_i \, dx + \int_{\partial\Omega} g\phi_i \, ds.$$

Exercice 6.3.16 Montrer que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h obtenue par application de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k au problème de convection-diffusion de l'Exercice 5.2.2 est inversible mais pas symétrique.

Correction. L'espace d'approximation variationnelle du problème de convection diffusion de l'Exercice 5.2.2 est

$$V_{0h} = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R})^N : u_i|_K \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Soit $(\phi_i)_{i=1, n_{dl}}$ les fonctions de base associées aux degrés de liberté du treillis d'ordre k du maillage \mathcal{T}_h . L'approximation variationnelle consiste à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j + (V \cdot \nabla\phi_i)\phi_j) dx$$

et

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f\phi_i dx.$$

On rappelle que la divergence de V est supposée nulle. Ainsi, pour tout u_h et v_h appartenant à V_{0h} ,

$$\int_{\Omega} (V \cdot \nabla u_h) v_h dx = - \int_{\Omega} ((\operatorname{div} V) v_h u_h + (V \cdot \nabla v_h) u_h) dx = - \int_{\Omega} (V \cdot \nabla v_h) u_h dx.$$

En particulier, la matrice \mathcal{K}_h est en général non symétrique, sauf si tous les termes $\int_{\Omega} (V \cdot \nabla\phi_i)\phi_j dx$ sont nuls, ce qui n'est pas le cas en général. Enfin, la matrice \mathcal{K}_h est inversible car injective, en effet,

$$\langle \mathcal{K}_h U_h, U_h \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla u_h + (V \cdot \nabla u_h) u_h dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla u_h dx$$

et $\langle \mathcal{K}_h U_h, U_h \rangle > 0$ si $U_h \neq 0$.

Exercice 6.3.17 On se propose de résoudre numériquement l'équation des plaques (5.23) par une méthode d'éléments finis (de type Hermite) en dimension $N = 2$. Pour un maillage triangulaire \mathcal{T}_h on introduit l'espace discret

$$V_h = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_5 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Montrer que tout polynôme $p \in \mathbb{P}_5$ est caractérisé de manière unique sur un triangle K par les 21 valeurs réelles suivantes

$$p(a_j), \nabla p(a_j), \nabla \nabla p(a_j), \frac{\partial p(b_j)}{\partial n} \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.27)$$

où (a_1, a_2, a_3) sont les sommets de K , (b_1, b_2, b_3) les milieux des cotés de K , tandis que $\partial p(b_j)/\partial n$ désigne la dérivée normale au coté de b_j . Montrer que V_h est un sous-espace de $H^2(\Omega)$ dont les éléments v sont caractérisés de manière unique par les valeurs (6.27) pour chaque sommet et milieu d'arête du maillage. En déduire une méthode d'éléments finis (dite d'Argyris) pour résoudre (5.23).

Correction.

1. Unisolvanace (équivalent du Lemme 6.3.3)

On considère l'application qui à un élément de \mathbb{P}_5 associe les 21 valeurs (6.27). Comme \mathbb{P}_5 est un espace de dimension 21, il suffit de montrer que cette application est injective afin de prouver qu'elle est bijective. Enfin, quitte à effectuer un changement de variables par une application affine, on peut se contenter de considérer le cas d'un triangle équilatéral tel que $a_1 = (-1, 0)$, $a_2 = (1, 0)$ (voir remarque 6.3.10 du cours). Soit $p \in \mathbb{P}_5$ annulant toutes les valeurs (6.27). Montrons que p est le

polynôme nul. On pose $q_1(x_1) = p(x_1, 0)$ et $q_2(x_1) = \partial p / \partial x_2(x_1, 0)$. Par hypothèse, on a

$$q_1(\pm 1) = q_1'(\pm 1) = q_1''(\pm 1) = 0.$$

Comme q_1 est un polynôme de degré au plus 5, on en déduit que $q_1 = 0$. Ainsi, p est divisible par x_2 : il existe un polynôme $q(x_1, x_2)$ tel que

$$p(x_1, x_2) = x_2 q(x_1, x_2).$$

De même, comme $\partial p / \partial x_2 = \partial p / \partial n$ sur le segment $[a_1, a_2]$, on a par hypothèse que

$$q_2(\pm 1) = q_2'(\pm 1) = q_2(0) = 0.$$

Comme q_2 est un polynôme de degré au plus 4, on a donc $q_2 = 0$. Or $q_2(x_1) = q(x_1, 0)$, ainsi q est divisible par x_2 . On a donc prouvé que p est divisible par x_2^2 . Pour des raisons d'invariance, par changement de coté, on en déduit que p est également divisible par $(1 + x_1 - x_2/\sqrt{3})^2$ et $(1 - x_1 - x_2/\sqrt{3})^2$. Ainsi, p est un polynôme de degré au plus 5 divisible par un polynôme de degré 6 et $p = 0$.

2. Raccordement au niveau des mailles

Afin de résoudre le problème, il nous faut prouver le Lemme suivant (équivalent du Lemme 6.3.4 du cours) :

Lemme. Soit K et K' deux triangles ayant une arête commune $\Gamma = (a_1, a_2)$. Soit p_K et $p_{K'}$ deux éléments de \mathbb{P}_5 , alors la fonction v définie sur $K \cup K'$ par

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est de classe C^1 si et seulement si pour $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} p_K(a_i) &= p_{K'}(a_i), & \nabla p_K(a_i) &= \nabla p_{K'}(a_i), \\ \nabla \nabla p_K(a_i) &= \nabla \nabla p_{K'}(a_i), & \partial p_K / \partial n(b) &= \partial p_{K'} / \partial n(b), \end{aligned} \quad (6.28)$$

où n désigne la normale extérieur à K et b le milieu du segment $[a_1, a_2]$.

Démonstration. L'application v est de classe C^1 si et seulement si les restrictions de p_K et $p_{K'}$ coïncident sur l'arête commune Γ aux deux triangles et s'il en est de même pour les polynômes $\partial p_K / \partial n$ et $\partial p_{K'} / \partial n$. Or les polynômes p_K et $p_{K'}$, de degré au plus cinq, coïncident sur Γ si et seulement si pour $i = 1, 2$ les 6 conditions suivantes sont satisfaites

$$p_K(a_i) = p_{K'}(a_i), \quad \frac{\partial p_K}{\partial \tau}(a_i) = \frac{\partial p_{K'}}{\partial \tau}(a_i) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 p_K}{\partial \tau^2}(a_i) = \frac{\partial^2 p_{K'}}{\partial \tau^2}(a_i)$$

(τ désigne le vecteur unitaire tangent à l'arête). D'autre part, les restrictions de $\partial p_K / \partial n$ et de $\partial p_{K'} / \partial n$ à Γ sont des polynômes de degré 4 égaux si et seulement si pour $i = 1, 2$ les 5 conditions suivantes sont vérifiées

$$\frac{\partial p_K}{\partial n}(a_i) = \frac{\partial p_{K'}}{\partial n}(a_i), \quad \frac{\partial^2 p_K}{\partial n^2}(a_i) = \frac{\partial^2 p_{K'}}{\partial n^2}(a_i)$$

et si

$$\frac{\partial p_K}{\partial n}(b) = \frac{\partial p_{K'}}{\partial n}(b).$$

On a donc prouvé que si les conditions (6.28) étaient vérifiées, alors v était C^1 . Réciproquement, si v est de classe C^1 , les restrictions de $\partial p_K/\partial n$ et $\partial p_{K'}/\partial n$ à l'arête commune Γ coïncident et pour $i = 1, 2$ on a $\partial^2 p_{K'}/\partial n \partial \tau(a_i) = \partial^2 p_K/\partial n \partial \tau(a_i)$. Enfin, on a d'ores et déjà prouvé que les autres conditions de (6.28) étaient satisfaites, ce qui achève la preuve du Lemme.

3. Méthode d'Argyris

— Tout d'abord, l'espace

$$V_h = \{v \in C^1(\Omega) : v|_{K_i} \in \mathbb{P}^5 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}$$

est inclus dans $H^2(\Omega)$ (la dérivée d'un élément de V_h est continue, dérivable par morceaux et appartient à $H^1(\Omega)$ d'après le Lemme 4.3.19). D'après le point précédent, un élément v de V_h est entièrement déterminé par les valeurs de v , ∇v et $\nabla \nabla v$ aux nœuds du maillage ainsi que par les flux $\partial v/\partial n(b_k)$, b_k parcourant les milieux des arêtes k du maillage (on oriente de manière arbitraire chacune des arêtes). On peut donc construire une base de V_h formée des éléments $(\varphi_{i,\alpha})_{(i,\alpha)}$ et (ψ_k) où $i \in \{1, \dots, n_s\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ et $k \in \{1, \dots, n_c\}$ définis par

$$\begin{aligned} \partial^\beta \varphi_{i,\alpha}(a_j) &= \delta_j^i \delta_\alpha^\beta, & \frac{\partial \varphi_{i,\alpha}}{\partial n}(b_l) &= 0, \\ \partial^\beta \psi_k(a_j) &= 0, & \frac{\partial \psi_k}{\partial n}(b_l) &= \delta_l^k. \end{aligned}$$

pour tout $j \in \{1, \dots, n_s\}$, $l \in \{1, \dots, n_c\}$ et $\beta \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\beta| \leq 2$ (β est un multi-indice, si $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\partial^\beta \varphi$ désigne la dérivée partielle $\partial^{\beta_1+\beta_2} \varphi / \partial^{\beta_1} x_1 \partial^{\beta_2} x_2$).

Afin de résoudre l'équation des plaques (5.23), on introduit le sous espace de V_h

$$V_{0h} = V_h \cap H_0^2(\Omega).$$

L'espace V_{0h} est l'ensemble des fonctions de V_h qui s'annulent ainsi que leurs dérivées partielles sur $\partial\Omega$. Il est engendré par les éléments $(\varphi_{i,\alpha})$ et (ψ_k) où $i \in \{1, \dots, n_{s0}\}$ et $k \in \{1, \dots, n_{c0}\}$ parcourent respectivement sommets et arêtes n'appartenant pas au bord de Ω . L'approximation variationnelle consiste à trouver $u_h \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega} \Delta u_h \Delta v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \text{ pour tout } v_h \in V_{0h}.$$

D'après le Théorème de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique. Enfin, il équivaut à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h, \tag{6.29}$$

où la matrice de rigidité (de taille $6n_{s0} + n_{c0}$) est définie par

$$\mathcal{K}_h = \begin{pmatrix} D_h & F_h \\ F_h^t & H_h \end{pmatrix},$$

où D_h et F_h sont des matrices définies par blocs. La matrice D_h est constituée de 6×6 blocs de taille $n_{s0} \times n_{s0}$. La matrice F_h est un vecteur colonne constitué de 6 sous-matrices de taille $n_{s0} \times n_{c0}$. On pose

$$D_h = (E_h^{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, 6\}^2}$$

$$F_h = (G_h^i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}.$$

Les sous-matrices E_h^{ij} et G_h^i sont définies par

$$(E_h^{ij})_{kl} = \int_{\Omega} \Delta \varphi_{k,s_i} \Delta \varphi_{l,s_j} dx, \quad \text{où } (k,l) \in \{1, \dots, n_{s0}\}^2$$

$$(G_h^i)_{kl} = \int_{\Omega} \Delta \varphi_{k,s_i} \Delta \psi_l dx, \quad \text{où } (k,l) \in \{1, \dots, n_{s0}\} \times \{1, \dots, n_{c0}\}$$

où s_i parcourt les multi-indices \mathbb{N}^2 de degré inférieur ou égal à 2 (ensemble qui contient 6 éléments). La matrice H_h , de taille $n_{c0} \times n_{c0}$, est définie par

$$(H_h)_{kl} = \int_{\Omega} \Delta \psi_k \Delta \psi_l dx$$

où $(k,l) \in \{1, \dots, n_{c0}\}^2$. Enfin, le vecteur b_h compte $6n_{s0} + n_{c0}$ composantes et est défini par

$$b_h = (c_h^1, \dots, c_h^6, d_h)$$

où $c_h^i \in \mathbb{R}^{n_{s0}}$ et $d_h \in \mathbb{R}^{n_{c0}}$ sont les vecteurs

$$(c_h^i)_k = \int_{\Omega} f_h \varphi_{k,s_i} \quad k \in \{1, \dots, n_{s0}\} \text{ et } i \in \{1, \dots, 6\}$$

$$(d_h)_k = \int_{\Omega} f_h \psi_k \quad k \in \{1, \dots, n_{c0}\}.$$

La solution u_h de l'approximation variationnelle est telle que

$$u_h = \sum_{i=0}^5 \sum_{k=1}^{n_{s0}} U_h^{in_{s0}+k} \varphi_{k,s_{i+1}} + \sum_{k=1}^{n_{c0}} U_h^{6n_{s0}+k} \psi_k,$$

où U_h est solution du système (6.29).

Exercice 6.3.18 Montrer que pour une suite de maillages réguliers, et pour des éléments finis \mathbb{P}_1 , l'opérateur d'interpolation r_h vérifie en dimension $N = 2$ ou 3

$$\|v - r_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Correction. Par construction de $r_h u$, la restriction de $r_h u$ à un N-simplexe K_i est simplement $r_{K_i} u$ (l'opérateur r_{K_i} est défini dans le cours (6.56)). Par conséquent,

$$\|v - r_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \|v - r_{K_i} v\|_{L^2(K_i)}^2.$$

On rappelle que K est l'image par une application affine d'un simplexe de référence K_0 . On utilise la même notation que dans le cours en introduisant la matrice B , composante linéaire de cette application (voir cours (6.62)). On applique la majoration (Lemme 6.3.20 avec $k = 1$)

$$\|v - r_K v\|_{L^2(K)} \leq C \|B\|^2 |v|_{H^2(K)}$$

à chacun des N -simplexe K_i (on rappelle que $|v|_{H^2(K)} = (\int_K |D^2 v| dx)^{1/2}$). Ainsi,

$$\|v - r_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \|B_i\|^4 |v|_{H^2(K_i)}^2.$$

Il suffit de combiner cette estimation avec l'inégalité (voir cours)

$$\|B_i\| \leq \text{diam}(K_i) / \rho(K_0) \leq Ch$$

pour conclure.

Exercice 6.3.19 Soit $K = [0, 1]^2$ le cube unité en dimension $N = 2$ de sommets $a^1 = (0, 0)$, $a^2 = (1, 0)$, $a^3 = (1, 1)$, $a^4 = (0, 1)$. On définit $x_3 = 1 - x_1$, $x_4 = 1 - x_2$, et \bar{i} comme la valeur de i modulo 4. Grâce à ses notations, chaque sommet a^i est défini par $x_{\bar{i}} = x_{\bar{i}+1} = 0$. Vérifier que les fonctions de base de \mathbb{Q}_1 sont

$$p_i(x) = x_{\bar{i}+2} x_{\bar{i}+3} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 4,$$

et que celles de \mathbb{Q}_2 sont

$$\begin{aligned} P_i(x) &= x_{\bar{i}+2}(2x_{\bar{i}+2} - 1)x_{\bar{i}+3}(2x_{\bar{i}+3} - 1) & \text{pour } 1 \leq i \leq 4 \\ P_i(x) &= -4x_{\bar{i}+2}(x_{\bar{i}+2} - 1)x_{\bar{i}+3}(2x_{\bar{i}+3} - 1) & \text{pour } 5 \leq i \leq 8 \\ P_9(x) &= 16x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Correction.

Les éléments de \mathbb{Q}_k définis sur K sont les polynômes de degré au plus k par rapport à chacune des variables x_1 et x_2 . D'après le Lemme 6.3.22, il suffit de vérifier que les fonctions proposées s'annulent sur tous les points du treillis correspondant excepté un point, différent pour chacune d'entre elles, où elles prennent la valeur un.

1. Fonctions de base \mathbb{Q}_1 .

Les points du treillis sont a^i , $i = 1, \dots, 4$. Pour des raisons de périodicité des formules, il suffit de vérifier la forme de la fonction de base p_1 . Or

$$p_1(x) = x_3 x_4 = (1 - x_1)(1 - x_2),$$

qui vaut en effet 1 pour $x = a_1$ et zéro sur les autres sommets du carré.

2. Fonctions de base \mathbb{Q}_2 .

Les points du treillis Σ_2 sont les sommets, les milieux des arêtes et le centre du carré K . Pour des raisons de symétrie, seules trois fonctions de bases sont à étudier. On a

$$P_1(x) = x_3(2x_3 - 1)x_4(2x_4 - 1) = (1 - x_1)(1 - 2x_1)(1 - x_2)(1 - 2x_2)$$

qui vaut 1 pour $x = a_1$ et zéro sur les autres nœuds du treillis. Puis

$$P_5(x) = -4x_3(x_3 - 1)x_4(2x_4 - 1) = 4(1 - x_1)x_1(1 - x_2)(1 - 2x_2)$$

qui vaut 1 pour $x = (a_1 + a_2)/2$ et zéro sur les autres nœuds du treillis. Enfin,

$$P_9(x) = 16x_1x_2x_3x_4 = 16x_1x_2(1 - x_1)(1 - x_2),$$

qui vaut 1 en $x = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$ et zéro sur les autres nœuds du treillis.

Exercice 6.3.20 Montrer que pour la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 /bulle pour la vitesse et \mathbb{P}_1 pour la pression on a $\dim(\text{Ker}B_h^*) = 1$.

Correction. Soit $r_h \in \mathcal{Q}_h$ et $w_h \in V_{0h}$ (\mathcal{Q}_h et V_{0h} étant les espaces issus respectivement de la discrétisation \mathbb{P}_1 de la pression et \mathbb{P}_1 /bulle de la vitesse). Soit R_h et W_h les coordonnées respectives de r_h et w_h dans les bases de \mathcal{Q}_h et V_{0h} . On note B_h la matrice associée à la forme bilinéaire définie b sur $\mathcal{Q}_h \times V_{0h}$ par $b(r_h, w_h) = \int_{\Omega} w_h \cdot \nabla r_h \, dx$. Ainsi,

$$W_h \cdot B_h^* R_h = B_h W_h \cdot R_h = - \int_{\Omega} \text{div}(w_h) r_h \, dx = \int_{\Omega} w_h \cdot \nabla r_h \, dx.$$

Si R_h appartient au noyau de B_h^* , on a

$$\int_{\Omega} w_h \cdot \nabla r_h \, dx = 0$$

pour tout élément $w_h \in V_{0h}$. En particulier, si on applique l'égalité précédente à la fonction bulle $\lambda_1(x) \cdots \lambda_{N+1}(x) e_k$ de la maille K_i (les λ_i sont les coordonnées barycentriques de x dans la maille K_i et $k \in \{1, \dots, N\}$), on obtient

$$\nabla r_h(K_i) \cdot e_k \left(\int_{K_i} \lambda_1(x) \cdots \lambda_{N+1}(x) \, dx \right) = 0.$$

Or

$$\left(\int_{K_i} \lambda_1(x) \cdots \lambda_{N+1}(x) \, dx \right) > 0,$$

d'où on en déduit que $\nabla r_h(K_i) = 0$. Ainsi, r_h est une fonction constante, R_h est proportionnel au vecteur $(1, \dots, 1)$ et

$$\dim(B_h^*) = 1.$$

Exercice 6.3.21 On considère les équations de Stokes

$$\begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \text{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.30)$$

où $\mu > 0$ est la viscosité du fluide en dimension $N = 1$ (ce modèle n'a aucun intérêt puisque sa solution explicite est $u = 0$ et p une primitive de f , mais il permet de bien

Ainsi,

$$\text{Ker } K_h \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} U^0 \\ P_h^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_h^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_h^4 \end{pmatrix} \right)$$

avec $P_h^0 = \frac{4\mu}{h}(0, 0, 1, 0, 2, 0, \dots, p)$, $P_h^3 = (0, 1, \dots, 0, 1, 0)$ et $P_h^4 = (1, 0, \dots, 1, 0, 1)$. On vérifie sans mal que cette inclusion est une égalité.

Ainsi, le système obtenu par discrétisation centrée des équations de Stokes en un dimension 1 est mal posé. Il n'admet pas nécessairement de solution même si $\sum_j f(x_j) = 0$. De plus, si une solution existe, elle n'est pas unique. Si n est pair, la pression P_h est définie à l'addition d'un multiple de $(1, 0, 1, 0, \dots)$ près. De ce fait, les solutions (U_h, P_h) ne sont pas des approximations des solution (u, p) des équations de Stokes (6.30) pour lesquels p est défini à l'addition d'une constante près. Si n est impair, la situation est encore plus critique, la vitesse discrétisée U_h n'étant pas non plus définie de manière unique (alors que c'est le cas pour le système de Stokes initial).