

Chapitre 7

PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES

Exercice 7.1.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}^N$. Montrer que $u(x) = \exp(ik \cdot x)$ est une solution de

$$-\Delta u = \lambda u \quad (7.1)$$

si $|k|^2 = \lambda$. Une telle solution est appelée onde plane.

Correction. Soit $u(x) = \exp(ik \cdot x)$ avec $k \in \mathbb{R}^N$, on a $\nabla u(x) = i \exp(ik \cdot x)k$ et

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = -|k|^2 \exp(ik \cdot x).$$

Ainsi, u est solution de l'équation (7.1) dès que $|k|^2 = \lambda$. Sur cet exemple, on voit que le Laplacien dans un domaine non borné peut admettre une infinité non dénombrable de valeurs propres ("généralisées", car la "fonction propre" $\exp(ik \cdot x)$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^N)$).

Exercice 7.1.2 Soit un potentiel régulier $V(x)$. Montrer que, si $\mathbf{u}(x, t) = e^{-i\omega t}u(x)$ est solution de

$$i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Delta \mathbf{u} - V \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+, \quad (7.2)$$

alors $u(x)$ est solution de

$$-\Delta u + Vu = \omega u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (7.3)$$

Correction. Il suffit d'effectuer le calcul. En effet,

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) &= e^{-i\omega t} \omega u(x) \\ \Delta \mathbf{u}(x, t) &= e^{-i\omega t} \Delta u(x). \end{aligned}$$

Comme \mathbf{u} est solution de l'équation de Schrödinger (7.2), on en déduit que

$$-\Delta u + Vu = \omega u.$$

Exercice 7.1.3 Soit $V(x) = Ax \cdot x$ avec A matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que $u(x) = \exp(-A^{1/2}x \cdot x/2)$ est une solution de (7.3) si $\omega = \text{tr}(A^{1/2})$. Une telle solution est appelée état fondamental.

Correction.

Rappelons tout d'abord que la matrice $A^{1/2}$ est définie comme la matrice dont les vecteurs propres sont identiques à ceux de la matrice A et dont les valeurs propres sont les racines carrées des valeurs propres de A . Plus précisément, la matrice A étant symétrique définie positive, elle admet une base orthonormale de vecteurs propres. Il existe donc une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que $A = UDU^*$. Les coefficients de D sont les valeurs propres (positives) de la matrice A . On a alors $A^{1/2} = UEU^*$, où $E = D^{1/2}$ est la matrice diagonale définie par $E_{ii} = D_{ii}^{1/2}$. La matrice $A^{1/2}$ est évidemment indépendante de la base de vecteur propre choisie, c'est à dire du choix de U .

Soit $u(x) = \exp(-A^{1/2}x \cdot x/2)$. On a

$$\nabla u = -\exp(-A^{1/2}x \cdot x/2)A^{1/2}x = -uA^{1/2}x$$

et

$$\Delta u = \text{div}(\nabla u) = -\text{div}(uA^{1/2}x).$$

On rappelle que pour toute fonction f à valeurs réelles et σ à valeurs vectorielles, $\text{div}(f\sigma) = \nabla f \cdot \sigma + f(\text{div}\sigma)$. Ainsi,

$$\Delta u = -(A^{1/2}x) \cdot \nabla u - (\text{div}(A^{1/2}x))u = (Ax \cdot x)u - \text{tr}(A^{1/2})u,$$

et u est bien solution de l'équation

$$-\Delta u + Vu = \text{tr}(A^{1/2})u.$$

Exercice 7.2.1 Montrer que l'application identité Id dans un espace de Hilbert V de dimension infinie n'est jamais compacte (utiliser le Lemme 7.2.6).

Correction.

L'image de la boule unité par l'application Id est évidemment la boule unité. Si l'application Id était compacte, la boule unité serait relativement compacte et donc compacte (la boule unité est fermée), ce qui est impossible d'après le Lemme 7.2.6 qui stipule que la boule unité d'un espace de Hilbert de dimension infinie n'est jamais compacte.

Exercice 7.2.2 Soit l'espace de Hilbert ℓ_2 des suites réelles $x = (x_i)_{i \geq 1}$ telles que $\sum_{i \geq 1} |x_i|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i \geq 1} x_i y_i$. Soit $(a_i)_{i \geq 1}$ une suite de réels bornés, $|a_i| \leq C < +\infty$ pour tout $i \geq 1$. On définit l'application linéaire A par $Ax = (a_i x_i)_{i \geq 1}$. Vérifier que A est continue. Montrer que A est compacte si et seulement si $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = 0$.

Correction.

Soit x un élément de ℓ^2 ,

$$\|Ax\|_{\ell^2}^2 = \sum_i |a_i x_i|^2 \leq \sup_i |a_i|^2 \sum_i |x_i|^2 = \sup_i |a_i|^2 \|x\|_{\ell^2}^2.$$

Ainsi, A est une application continue de ℓ^2 dans ℓ^2 .

Supposons que $\lim a_i = 0$. Soit x^n une suite d'éléments de la boule unité de ℓ^2 . On pose $y^n = Ax^n$. Afin de prouver que l'opérateur A est compact, on va construire une sous-suite de y^n convergente. On commence par construire une suite de sous-suite par récurrence : on pose $y^{n,0} = y^n$. Pour tout k , $y^{n,k}$ est une suite extraite de $y^{n,k-1}$ telle que $y_k^{n,k}$ soit convergente (c'est toujours possible puisque pour tout $k \geq 1$, $y_k^{n,k}$ est borné dans \mathbb{R}). Enfin, on procède à l'extraction d'une sous-suite diagonale en définissant la suite $z^n = y^{n,n}$. Reste à prouver que la suite z^n est de Cauchy dans ℓ^2 . Pour tout entier $k \geq 0$, on note $x^{n,k}$ la sous-suite extraite de x^n telle que $y^{n,k} = Ax^{n,k}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme a_i converge vers 0, il existe l tel que pour tout $i > l$, $|a_i| < \varepsilon$. On en déduit que pour tout indice n ,

$$\sum_{i>l} |z_i^n|^2 = \sum_{i>l} |y_i^{n,n}|^2 = \sum_{i>l} |a_i|^2 |x_i^{n,n}|^2 \leq \varepsilon^2 \|x^{n,n}\|_{\ell^2}^2 \leq \varepsilon^2.$$

Notons que pour tout k , la suite z_k^n est simplement convergente. Ainsi, pour n et p assez grand, on a

$$\sum_{i \leq l} |z_i^n - z_i^p|^2 \leq \varepsilon^2.$$

En combinant ces deux résultats, on en déduit que pour n et p assez grand,

$$\sum_i |z_i^n - z_i^p|^2 \leq \sum_{i \leq l} |z_i^n - z_i^p|^2 + 2 \sum_{i>l} (|z_i^n|^2 + |z_i^p|^2) \leq 5\varepsilon^2,$$

et que $\|z^n - z^p\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ lorsque n et p convergent vers l'infini. Ainsi, A est compacte.

Reste à établir la réciproque. Supposons que la suite a_i ne converge pas vers zéro. Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout entier n positif, il existe $i > n$ tel que $|a_i| > M$. On peut donc définir une suite x^n de ℓ^2 et une suite i_n d'entiers naturels croissants telles que, pour tout indice k ,

$$x_k^n = \delta_k^{i_n}, \text{ et } |a_{i_n}| > M$$

et i_n strictement croissante. Autrement dit, toutes les composantes du vecteur x^n sont nulles, sauf la i_n -ième qui est égale à 1. On pose $y^n = Ax^n$. La suite x^n est bornée dans ℓ^2 , tandis que la suite y^n d'éléments de ℓ^2 n'admet pas de sous-suite convergente. En effet, pour tout n et p tels que $n \neq p$, on a

$$\|y^n - y^p\|_{\ell^2}^2 = |a_{i_n}|^2 + |a_{i_p}|^2 > 2M^2.$$

Ainsi, A n'est pas compacte.

Exercice 7.2.3 Soit U , V et W trois espaces de Hilbert de dimension infinie, A une application linéaire continue de V dans W , et B une application linéaire continue de U dans V . Montrer que l'application AB est compacte dès que A ou B est compacte. En déduire qu'une application linéaire continue compacte n'est jamais inversible d'inverse continu en dimension infinie.

Correction.

Considérons le cas A compacte et B continue. Comme B est continue, il existe un réel M tel que l'image de la boule unité de U par B soit incluse dans la boule de V , centrée à l'origine et de rayon M . Comme A est compacte, l'image de la boule de rayon M par A est relativement compacte. Or tout sous-ensemble d'un ensemble relativement compact est relativement compact. L'image de la boule unité de U par l'application AB est donc relativement compacte : l'application AB est compacte.

Considérons le cas A continue et B compacte. L'image de la boule unité de U par B est relativement compacte dans V . Or l'image par une application continue d'un ensemble relativement compact est relativement compact. L'image de la boule unité de U par l'application AB est relativement compacte.

Enfin, considérons une application linéaire compacte inversible A . L'application inverse A^{-1} (qui est linéaire) ne peut être continue. En effet, dans ce cas l'application identité AA^{-1} serait compacte, ce qui n'est jamais le cas en dimension infinie (voir l'Exercice 7.2.1).

Exercice 7.2.4 Soit V un espace de Hilbert réel de dimension infinie et A une application linéaire continue, définie positive, auto adjointe, compacte de V dans V . On note u_k et λ_k les valeurs et vecteurs propres de A . Montrer que, pour $v \in V$, l'équation $Au = v$ admet une unique solution $u \in V$ si et seulement si v vérifie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle v, u_k \rangle|^2}{\lambda_k^2} < +\infty. \quad (7.4)$$

Correction. Supposons qu'il existe u tel que $Au = v$. Pour tout k , $\langle Au, u_k \rangle = \langle v, u_k \rangle$ et donc

$$\langle u, u_k \rangle = \frac{\langle u, Au_k \rangle}{\lambda_k} = \frac{\langle Au, u_k \rangle}{\lambda_k} = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda_k}.$$

La famille (u_k) formant une base orthonormale,

$$\sum_k \frac{\langle v, u_k \rangle^2}{\lambda_k^2} = \sum_k \langle u, u_k \rangle^2 = \|u\|^2 < +\infty.$$

Réciproquement, si v vérifie la relation (7.4),

$$u = \sum_k \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda_k} u_k$$

appartient à V (la série est convergente) et $Au = v$. Enfin, le système $Au = v$ ne peut admettre plus d'une solution. En effet, l'application A étant définie positive, elle est injective.

Exercice 7.2.5 Soit $V = L^2(0, 1)$ et A l'application linéaire de V dans V définie par $(Af)(x) = (x^2 + 1)f(x)$. Vérifier que A est continue, définie positive, auto-adjointe mais pas compacte. Montrer que A n'a pas de valeurs propres. On pourra vérifier aussi que $(A - \lambda \text{Id})$ est inversible d'inverse continu si et seulement si $\lambda \notin [1, 2]$.

Correction. Continuité

$$\|Af\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 |f(x)|^2 dx \leq \left(\max_{x \in (0,1)} (x^2 + 1)^2 \right) \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Ainsi, $\|Af\|_{L^2(0,1)} \leq 2\|f\|_{L^2(0,1)}$ et A est continue.

Positivité et symétrie

Soit f et g éléments de $L^2(0, 1)$,

$$(Af, g)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (Af)g dx = \int_0^1 (x^2 + 1)fg dx = (f, Ag)_{L^2(0,1)}.$$

Ainsi, A est auto-adjointe. De plus, A est positive car

$$(Af, f)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (x^2 + 1)|f(x)|^2 dx \geq 0.$$

Enfin, A est définie. En effet, si $(Af, f) = 0$, la fonction $(x^2 + 1)|f(x)|^2$ est nulle presque partout, donc $f = 0$ (en tant qu'élément de $L^2(0, 1)$).

Valeurs propres

Supposons que f soit un vecteur propre de A de valeur propre λ . Dans ce cas, pour toute fonction $g \in L^2(0, 1)$,

$$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x)g(x) dx = (Af, g)_{L^2(0,1)} = \lambda(f, g)_{L^2(0,1)} = \lambda \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

On en déduit que

$$((x^2 + 1)f - \lambda f, g(x))_{L^2(0,1)} = 0.$$

En choisissant $g = (x^2 + 1 - \lambda)f$, on en déduit que

$$\|(x^2 + 1 - \lambda)f\|_{L^2(0,1)} = 0$$

et que $(x^2 + 1 - \lambda)f(x) = 0$ presque partout et donc $f(x) = 0$ presque partout. L'application A n'admet pas de vecteur propre non nul.

Inversibilité de $(A - \lambda \text{Id})$

Soit $g \in L^2(0, 1)$, on cherche f tel que $(A - \lambda \text{Id})f = g$, c'est à dire tel que

$$(x^2 + 1 - \lambda)f(x) = g(x)$$

presque partout. Si $(A - \lambda \text{Id})$ est inversible, $f = (A - \lambda \text{Id})^{-1}g$ est défini par

$$f(x) = (x^2 + 1 - \lambda)^{-1}g(x)$$

pour presque tout $x \in]0, 1[$. L'inverse de $(x^2 + 1 - \lambda)$ étant défini, sauf en au plus deux points, $f(x)$ est correctement défini presque partout.

Si λ n'appartient pas à l'intervalle $[1, 2]$, il existe $C(\lambda)$ tel que $|x^2 + 1 - \lambda| > C(\lambda) > 0$. On en déduit que l'opérateur $(A - \lambda \text{Id})$ est bien inversible de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$, d'inverse continue. En effet,

$$\|(A - \lambda \text{Id})^{-1}g\|_{L^2(0,1)} \leq C(\lambda)^{-1}\|g\|_{L^2(0,1)}.$$

Si $\lambda \in [1, 2]$, on constate que si $(A - \lambda \text{Id})$ était inversible, $(x^2 + 1 - \lambda)^{-1}$ serait un élément de $L^2(0, 1)$ (prendre $g = 1$). Ceci n'est pas le cas. En effet le polynôme $(x^2 + 1 - \lambda)$ admet une racine dans l'intervalle $[1, 2]$. Ainsi, $(x^2 + 1 - \lambda)^{-1}$ présente une singularité (du type $1/x$ ou $1/x^2$) dont le carré n'est pas d'intégrale finie :

$$\int_0^1 (x^2 + 1 - \lambda)^{-2} dx = +\infty.$$

Exercice 7.3.1 Démontrer une variante du Théorème 7.3.2 où l'on remplace l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ par l'hypothèse plus faible qu'il existe deux constantes positives $\eta > 0$ et $\nu > 0$ telles que

$$a(v, v) + \eta\|v\|_H^2 \geq \nu\|v\|_V^2 \text{ pour tout } v \in V.$$

(Dans ce cas les valeurs propres $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ ne sont pas forcément positives, mais vérifient seulement $\lambda_k + \eta > 0$.)

Correction. Un réel λ est valeur propre de (7.12) de vecteur propre u , si et seulement si

$$a(u, v) + \eta\langle u, v \rangle_H = (\lambda + \eta)\langle u, v \rangle_H \text{ pour tout } v \in V,$$

c'est à dire si u est un vecteur propre associé à la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) + \eta\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ de valeur propre $\lambda + \eta$. Comme la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) + \eta\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ vérifie les hypothèses du Théorème 7.3.2, il existe une base hilbertienne de H de vecteurs propres u_k de (7.12) de valeurs propres $\lambda_k - \eta$ où λ_k est une suite non bornée, croissante de réels positifs.

Exercice 7.3.2 En dimension $N = 1$, on considère $\Omega =]0, 1[$. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{p.p. dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.5)$$

A l'aide de la décomposition spectrale de ce problème (voir la Remarque 7.2.9), montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

converge dans $L^2(0, 1)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$, et dans $H^1(0, 1)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k^2 < +\infty$.

Correction. On cherche à déterminer les fonctions $u \in H_0^1(0, 1)$ telles que

$$u'' + \lambda u = 0. \quad (7.6)$$

Tout d'abord, comme $u \in H_0^1(0, 1)$, u est continue, et d'après l'équation (7.6), u est de classe C^2 . Par récurrence, il s'en suit que u est en fait de classe C^∞ . Ainsi, l'équation (7.6) est une équation différentielle classique. De plus, si elle admet une solution non nulle (avec $u(0) = u(1) = 0$, on a nécessairement $\lambda > 0$. En effet,

$$\int_0^1 |u'|^2 dx = - \int_0^1 u'' u dx = \lambda \int_0^1 |u|^2 dx$$

et $\lambda = \int_0^1 |u'|^2 dx / \int_0^1 |u|^2 dx > 0$. Il est bien connu que les solutions de l'équation (7.6) sont de la forme

$$u = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Les conditions aux limites de Dirichlet impliquent que $B = 0$ (car $u(0) = 0$) et $\sqrt{\lambda} = k\pi$ où k est un entier naturel non nul (car $u(1) = 0$). Les vecteurs propres du Laplacien unidimensionnel avec conditions aux limites de Dirichlet sont donc les fonctions

$$u_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$$

de valeurs propres $\lambda_k = k^2\pi^2$. Comme l'injection de $H_0^1(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ est compacte et que $a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$ est une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur $H_0^1(]0, 1[)$, on peut appliquer le Théorème 7.3.2. Ainsi, $(u_k/k\pi)_{k \geq 1}$ est une base de hilbertienne $H^1(]0, 1[)$ et $(u_k)_{k \geq 1}$ une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$. On en déduit que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$$

converge dans $L^2(]0, 1[)$ si et seulement si $\sum_k a_k^2 < \infty$ et dans $H_0^1(]0, 1[)$ si et seulement si $\sum_k k^2 a_k^2 < \infty$.

Exercice 7.3.3 On considère un parallélépipède

$$\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[\times \cdots \times]0, L_N[,$$

où les $(L_i > 0)_{1 \leq i \leq N}$ sont des constantes positives. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.5).

Correction.

Soit $u_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ les fonctions propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur $]0, 1[$. Pour tout indice $1 \leq p \leq N$, et tout $k \in \mathbb{N}_*$, on introduit la fonction $u_{p,k}$ de $]0, L_p[$ à valeurs dans \mathbb{R} définie par

$$u_{p,k}(x_p) = u_k(x_p/L_p).$$

Enfin, pour tout $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}_*^N$ et tout $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$v_k(x) = \prod_{p=1}^N u_{p,k_p}(x_p).$$

On vérifie sans peine que pour k , v_k est une fonction propre du Laplacien sur Ω avec conditions aux bords de Dirichlet de valeur propre

$$\lambda_k = \left(\prod_{p=1}^N k_p \pi / L_p \right)^2.$$

Pour conclure, il reste à prouver que la famille v_k forme une base de $L^2(\Omega)$, c'est à dire que si $w \in L^2(\Omega)$ vérifie

$$\langle v_k, w \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}_*^p, \quad (7.7)$$

alors $w = 0$. Procédons par récurrence sur la dimension N . Ce résultat est vrai pour $N = 1$. Supposons que le résultat soit établi pour Ω de dimension $N - 1$. On introduit la fonction $\tilde{w} \in L^2(]0, L_N[)$ définie par

$$\tilde{w}(x_N) = \int_{\tilde{\Omega}} w(x) \prod_{p=1}^{N-1} u_{p,k_p}(x_p) d\tilde{x},$$

où $\tilde{\Omega} =]0, L_1[\times \dots \times]0, L_{N-1}[$ et $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{N-1})$. D'après (7.7), pour tout $k \in \mathbb{N}_*$, on a

$$\int_0^{L_N} \tilde{w}(x_N) u_{N,k}(x_N) dx_N = 0.$$

Comme la famille $u_{N,k}$ forme une base de $L^2(]0, L_N[)$, on en déduit que $\tilde{w}(x_N) = 0$ pour presque tout x_N . Ainsi, pour presque tout $x_N \in]0, L_N[$, la fonction $w_{x_N}(\tilde{x}) = w(\tilde{x}, x_N) \in L^2(\tilde{\Omega})$ est telle que

$$\int_{\tilde{\Omega}} w_{x_N}(\tilde{x}) \prod_{p=1}^{N-1} u_{k_p}(x_p) d\tilde{x} = 0,$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $w_{x_N} = 0$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 7.3.4 On considère à nouveau un ouvert Ω parallélépipédique comme dans l'Exercice 7.3.3. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann sur tout le bord $\partial\Omega$.

Correction.

Les fonctions propres du Laplacien 1D avec conditions aux limites de Neumann sur $]0, 1[$ sont, pour $k \geq 0$, les fonctions

$$u_k(x) = \cos(k\pi x)$$

de valeurs propres $k^2\pi^2$ (Attention : ici, la collection des valeurs propres démarre à $k = 0$). En suivant le même raisonnement que lors de l'Exercice 7.3.3, on montre que les fonctions propres du Laplacien avec conditions de Neumann sur $\Omega =]0, L_1[\times \cdots \times]0, L_p[$ sont de la forme

$$u_k(x) = \prod_{p=1}^N \cos(k_p \pi x_p / L_p)$$

où $k \in \mathbb{N}^N$. La valeur propre associée à u_k étant

$$\lambda_k = \left(\prod_{p=1}^N k_p \pi / L_p \right)^2.$$

Exercice 7.3.5 On reprend les notations et les hypothèses du Théorème 7.3.5. Montrer que la meilleure (i.e. la plus petite) constante C dans l'inégalité de Poincaré (voir la Proposition 4.3.10) est précisément la première valeur propre λ_1 de (7.5).

Correction.

Soit $(u_k)_{k \geq 1}$, base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.5) et λ_k les valeurs propres associées (ordonnées par ordre croissant). Soit u un élément de $H_0^1(\Omega)$.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k \geq 1} |\langle u, u_k \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \lambda_1^{-1} \sum_k \lambda_k |\langle u, u_k \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 = \lambda_1^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi, l'inégalité de Poincaré

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \quad (7.8)$$

est vérifiée pour $C = \lambda_1^{-1}$. Cette valeur est optimale car $\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_1^{-1} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Exercice 7.3.6 Soit Ω un ouvert borné régulier et connexe. Montrer que la première valeur propre du Laplacien dans Ω avec condition aux limites de Neumann est nulle et qu'elle est simple.

Correction.

Tout d'abord, zéro est valeur propre du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann pour la fonction propre constante, car

$$\begin{cases} \Delta 1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial 1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si λ est une valeur propre du Laplacien de fonction propre u , on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi, les valeurs propres du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann sont strictement positives sauf si $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ auquel cas $\lambda = 0$. Comme Ω est connexe, si $\lambda = 0$ la seule fonction propre associée possible est $u(x) = \text{Cte}$ dans Ω . Ainsi, la première valeur propre du Laplacien avec condition aux limites de Neumann est 0 et elle est simple.

Exercice 7.3.7 Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de classe C^1 de \mathbb{R}^N . Montrer qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini, et une base hilbertienne $(u_k)_{k \geq 1}$ de

$$H := \left\{ v \in L^2(\Omega)^N \text{ tel que pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} v \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \right\}$$

telle que chaque u_k appartient à $H_0^1(\Omega)^N$, et il existe une famille de pressions $p_k \in L^2(\Omega)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \nabla p_k - \mu \Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{p.p. dans } \Omega \\ \operatorname{div} u_k = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On admettra que l'espace

$$V := \{v \in H_0^1(\Omega)^N : \operatorname{div}(v) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

est dense dans H .

Correction. Notons tout d'abord que H est un espace de Hilbert, en tant que sous-espace fermé de $L^2(\Omega)^N$. On munit V du produit scalaire

$$a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

D'après le théorème de Rellich, l'injection de V dans H est compacte. De plus comme l'espace V est dense dans H on peut appliquer le théorème (7.3.2) d'où on déduit l'existence d'une famille positive et croissante de valeurs propres λ_k et $u_k \in V$ une base de $L^2(\Omega)^N$ tels que

$$a(u_k, v) = \lambda_k \int_{\Omega} u_k \cdot v \, dx \text{ pour tout } v \in V.$$

Pour tout k , on définit la forme linéaire continue L_k sur $H_0^1(\Omega)^N$ par

$$L_k(v) = \lambda_k \int_{\Omega} u_k \cdot v \, dx - a(u_k, v).$$

La forme linéaire L_k s'annule sur V et d'après le Théorème de de Rahm 5.3.9, il existe $p_k \in L^2(\Omega)$ tel que

$$L_k(v) = \int_{\Omega} p_k \operatorname{div} v \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

On en déduit en procédant comme lors de la résolution du problème de Stokes que

$$-\mu \Delta u + \nabla p_k = \lambda_k u_k \text{ dans } \Omega$$

(Attention, dans cette expression, la somme $-\mu \Delta u + \nabla p_k$ appartient à $L^2(\Omega)$, ce qui n'est pas forcément le cas de chacun des termes sans hypothèses supplémentaires sur la régularité de Ω). Par définition, comme les éléments u_k appartiennent à V ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_k) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \text{et } u_k &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Exercice 7.3.8 On considère le problème aux valeurs propres pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel quadratique $V(x) = Ax \cdot x$ où A est une matrice symétrique définie positive (modèle de l'oscillateur harmonique)

$$-\Delta u + Vu = \lambda u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (7.9)$$

On définit les espaces $H = L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$V = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } |x|v(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Montrer que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 u(x)v(x) dx,$$

et que l'injection de V dans H est compacte. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini et une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^N)$ $(u_k)_{k \geq 1}$ qui sont les valeurs propres et les fonctions propres de (7.9). Calculer explicitement ses valeurs et fonctions propres (on cherchera u_k sous la forme $p_k(x) \exp(-Ax \cdot x/2)$ où p_k est un polynôme de degré $k - 1$). Interpréter physiquement les résultats.

Correction.

1. V est un Hilbert

Tout d'abord, il est évident que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ définit bien un produit scalaire sur V . Reste à montrer que V muni de la norme associée est complet pour prouver que V est un espace de Hilbert. Soit B_1 la boule unité de \mathbb{R}^N et B_2 la boule de rayon 2. Par un raisonnement par l'absurde, on montre aisément qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\int_{B_2} |u|^2 dx \leq C \left(\int_{B_2} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_2 \setminus B_1} |u|^2 dx \right).$$

On en déduit que pour $u \in V$,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_V.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \int_{B_1} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |x|^2 |u|^2 dx \\ &\leq C \left(\int_{B_2} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_2 \setminus B_1} |u|^2 dx \right) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |x|^2 |u|^2 dx \\ &\leq (C + 1) \|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si u_n est une suite de Cauchy de V , elle est également une suite de Cauchy de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Il existe donc $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telle que u_n converge vers u dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

La suite $|x|u_n$ étant elle-même de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, elle converge dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers une limite v de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Enfin, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|u_n(x)\phi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|u(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} v(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

On en déduit que $v = |x|u$ et que u_n converge vers u dans V .

2. Compacité

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de V , $\|u_n\|_V^2 < M$. Nous allons construire une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les restrictions à tout borné sont convergentes en norme L^2 par un procédé d'extraction diagonal.

Dans un premier temps, on construit, par récurrence, une suite $((u_n^k)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ de sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}_*$, la suite $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente sur la boule B_k de rayon k , centrée en l'origine.

On pose $(u_n^0)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit k un entier naturel. Supposons $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ soit déjà construite. On note v_n^k la restriction de u_n^k à la boule B_{k+1} . Par hypothèse, $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de V . On en déduit que v_n^k est borné dans $H^1(B_{k+1})$. D'après le Théorème de Rellich, il existe une sous-suite $(v_{n_p}^k)_{p \in \mathbb{N}}$ de v_n^k convergente dans $L^2(B_{k+1})$. On définit alors $(u_p^{k+1})_{p \in \mathbb{N}}$ comme la suite extraite de $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_p^{k+1} = u_{n_p}^k$.

La suite $(u_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $L^2(B_k)$ pour tout entier naturel k . Dans la suite, on note u_n cette suite. Comme u_n est convergente sur toute boule bornée, elle est convergente presque partout. On note u sa limite. Notons que la restriction de u à toute boule B_k appartient à $L^2(B_k)$ et que la restriction de u_n à B_k converge vers la restriction de u à cette même boule dans $L^2(B_k)$.

Soit ε un réel positif. On pose $\alpha = (5M/\varepsilon)^{1/2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u - u_n|^2 dx &\leq \int_{|x| < \alpha} |u - u_n|^2 dx + 1/\alpha^2 \int_{|x| > \alpha} |x|^2 |u - u_n|^2 dx \\ &\leq \int_{|x| < \alpha} |u - u_n|^2 dx + 4M/\alpha^2. \end{aligned}$$

Pour n assez grand, $\|u - u_n\|_{L^2(B_\alpha)}^2 \leq M/\alpha^2$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u - u_n|^2 dx \leq 5M/\alpha^2 = \varepsilon.$$

On en déduit que u_n converge vers u dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ fort. Ainsi, l'injection de V dans H est compacte.

3. Fonctions propres

La forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + (Ax \cdot x)u(x)v(x)) dx$$

est symétrique, continue et coercive sur V . L'injection de V dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ est compacte et V est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ (V contient les fonctions C^∞ à support compact). On déduit donc du Théorème 7.3.2 qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^N)$ formée de vecteurs propres u_k de (7.9) et dont les valeurs propres associées λ_k sont positives et convergent vers l'infini.

Afin de déterminer l'ensemble des fonctions propres de (7.9), on considère dans un premier temps le cas unidimensionnel ($N = 1$) et $V(x) = x^2$. Le cas général s'en déduira aisément. On s'intéresse donc au problème aux valeurs propres

$$-u'' + |x|^2 u = \lambda u. \quad (7.10)$$

Comme proposé par l'énoncé, on cherche les fonctions propres de la forme $u_k(x) = p_k(x)e^{x^2/2}$, où p_k est un polynôme de degré k . Notons que s'il existe une telle fonction propre pour tout k , toutes les fonctions propres auront été exhibées, la famille ainsi obtenue étant dense dans V . On note λ_k la valeur propre associée à u_k . D'après (7.10), si u_k est de la forme suggérée, on vérifie après un simple calcul de dérivation de fonctions produits que le polynôme p_k est solution de l'équation différentielle

$$-p_k'' + (1 + X)p_k' + p_k = \lambda_k p_k. \quad (7.11)$$

On en déduit d'ores et déjà une condition nécessaire sur λ_k . Si on suppose que le terme de plus haut degré de p_k est X^k (ce qui est toujours possible, p_k étant défini à une constante multiplicative près), le terme de plus haut degré du membre de gauche de l'équation (7.11) est $(k + 1)X^k$ tandis que celui de gauche est $\lambda_k X^k$. On a donc

$$\lambda_k = k + 1.$$

On cherche donc p_k de la forme

$$-p_k'' + (1 + X)p_k' - kp_k = 0. \quad (7.12)$$

En posant $q_k(X) = p_k(X - 1)$, déterminer p_k équivaut à rechercher un polynôme q_k de degré k tel que

$$q_k'' - Xq_k' + kq_k = 0.$$

Il est aisé de vérifier à la main que cette équation différentielle admet un unique solution polynômiale de degré k (toujours à une constante multiplicative près). En effet, si on décompose q_k sous la forme

$$q_k(X) = \sum_i a_i X^i,$$

on obtient une relation de récurrence très simple entre les coefficients a_i à savoir pour tout entier i ,

$$(i - k)a_i = a_{i+2}(i + 2)(i + 1),$$

qui permet de déterminer a_i en fonction de a_{i+2} , sauf (et heureusement, sinon tous les termes seraient nuls) pour $i = k$ où on peut fixer a_k de manière arbitraire (on

choisit $a_k = 1$). Notons enfin que cette relation définit bien un polynôme car elle implique toujours $a_{-1} = 0$ et $a_{-2} = 0$ (et de ce fait $a_i = 0$ pour $i < 0$). On a donc établi que l'équation (7.12) admet une unique solution polynomiale de degré k . Les polynômes q_k sont connus sous le nom de polynôme d'Hermite et peuvent être alternativement définis par la relation de récurrence

$$q_k = Xq_{k-1} - (k-1)q_{k-2},$$

$q_0 = 1$ et $q_1 = X$. Les fonctions propres de (7.10) sont donc de la forme $q_k(x+1)e^{-x^2/2}$ et de valeurs propres $\lambda_k = k+1$. Cherchons à étendre ce résultat au cas général. Tout d'abord, toujours dans le cas unidimensionnel les fonctions propres de

$$-u''_\alpha + \alpha|x|^2u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha. \quad (7.13)$$

se déduisent aisément du cas $\alpha = 1$. En effet, on vérifie (par un simple changement de variable) que si u est fonction propre de (7.10) de valeur propre λ , alors $u_\alpha(x) = u(\alpha^{1/4}x)$ est fonction propre de (7.13) de valeur propre $\lambda_\alpha = \sqrt{\alpha}\lambda$. Ainsi, les fonctions propres de (7.13) sont les fonctions $u_{\alpha,k} = q_k(\alpha^{1/4}x + 1)e^{-\alpha^{1/2}x^2/2}$ de valeurs propres $\lambda_{\alpha,k} = \sqrt{\alpha}(k+1)$.

Le cas $N > 1$ se déduit du cas unidimensionnel par diagonalisation de la matrice A . En effet, la matrice A étant symétrique, définie positive, elle admet une base de vecteurs propres. En se plaçant dans une telle base, l'équation (7.9) se réécrit sous la forme

$$\sum_{j=1}^N -\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \alpha_j x_j^2 u = \lambda u, \quad (7.14)$$

où les α_j sont les valeurs propres de la matrice A . Si on recherche $u(x)$ sous la forme $u(x) = v_1(x_1)v_2(x_2)\cdots v_N(x_N)$, on obtient que u vérifie (7.14) si et seulement si chacun des v_j est un vecteur propre de (7.13) avec $\alpha = \alpha_j$. De plus, la valeur propre λ est égale à la somme des valeurs propres associées aux vecteurs propres v_j . A tout multi-indice $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathbb{N}^N$, on peut donc associer un vecteur propre u_σ solution de (7.14) de la forme

$$u_\sigma(x) = \prod_{j=1}^N u_{\alpha_j, \sigma_j}(x_j) = \left(\prod_{j=1}^N q_{\sigma_j}(\alpha_j^{1/4}x + 1) \right) e^{-A^{1/2}x \cdot x/2}$$

de valeur propre

$$\lambda_\sigma = \sum_{j=1}^N \lambda_{\alpha_j, \sigma_j} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\alpha_j}(\sigma_j + 1).$$

Enfin, on a bien obtenu toutes les fonctions propres de V , l'espace engendré par les u_σ étant dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

Exercice 7.3.9 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . On considère le problème de vibrations pour l'équation des plaques avec condition aux limites d'encastrement

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de valeurs propres positives qui tend vers l'infini et une base hilbertienne dans $L^2(\Omega)$ de fonctions propres $(u_k)_{k \geq 1}$ qui appartiennent à $H_0^2(\Omega)$.

Correction.

On introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx$$

qui est symétrique, continue et coercive sur $H_0^2(\Omega)$ (voir Exercice 5.3.9). Comme l'injection de $H_0^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte et que $H_0^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, la conclusion découle de l'application du Théorème 7.3.2.

Exercice 7.4.1 On considère le problème aux valeurs propres en dimension $N = 1$

$$\begin{cases} -u_k'' = \lambda_k u_k & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u_k(0) = u_k(1) = 0. \end{cases}$$

On se propose de calculer la matrice de masse pour la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . On reprend les notations de la Section 6.2. Montrer que la matrice de masse \mathcal{M}_h est donnée par

$$\mathcal{M}_h = h \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix},$$

et que ses valeurs propres sont

$$\lambda_k(\mathcal{M}_h) = \frac{h}{3} (2 + \cos(k\pi h)) \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Montrer que, si on utilise la formule de quadrature (6.18), alors on trouve que $\mathcal{M}_h = h \text{Id}$. Dans ce dernier cas, calculer les valeurs propres du problème spectral discret.

Correction. La matrice de masse \mathcal{M}_h est définie par

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx,$$

où ϕ_i sont les fonctions de base des éléments finis \mathbb{P}_1 . Pour tout i et j tels que $|i - j| > 1$, les supports de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints et

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = 0.$$

Si $j = i + 1$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_h)_{ij} &= \int_{ih}^{(i+1)h} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx = \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{((i+1)h - x)}{h} \frac{(x - ih)}{h} dx \\ &= h^{-2} \int_0^h (h - x)x dx = h/6. \end{aligned}$$

Enfin, si $i = j$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_h)_{ij} &= \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} |\phi_i(x)|^2 dx = 2 \int_{ih}^{(i+1)h} \left| \frac{(i+1)h - x}{h} \right|^2 dx \\ &= 2h^{-2} \int_0^h |h - x|^2 dx = 2h/3. \end{aligned}$$

On a donc montré que la matrice de masse obtenue par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est bien du type annoncé.

Soit $(U, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ($n = h^{-1} - 1$) tels que

$$\mathcal{M}_h U = \lambda U \quad (7.15)$$

et $U \neq 0$. Afin de calculer les valeurs propres de la matrice de masse \mathcal{M}_h , on effectue une analyse de type Fourier. On introduit la fonction u_h périodique de période 2, impaire, définie sur $[0, 1]$ par

$$u_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, h/2[\\ U_j & \text{si } x \in [jh - h/2, jh + h/2[, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si } x \in [1 - h/2, 1[\end{cases} \quad (7.16)$$

D'après (7.15), pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h \frac{u_h(x-h) + 4u_h(x) + u_h(x+h)}{6} = \lambda u_h(x). \quad (7.17)$$

Remarque 7.4.1 On a choisit u_h impaire de période 2 afin que l'équation (7.17) soit vérifiée pour tout x et en particulier pour tout $x \in [0, h/2] \cup [1 - h/2, 1]$.

Comme u_h est périodique de période 2, il existe \hat{u}_k tel que

$$u_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k e^{ik\pi x}.$$

En appliquant la transformée de Fourier à (7.17), on obtient

$$h \frac{e^{-ihk\pi} \hat{u}_k + 4\hat{u}_k + e^{ihk\pi} \hat{u}_k}{6} = \lambda \hat{u}_k,$$

c'est à dire

$$(\cos(k\pi h) + 2 - 3\lambda/h) \hat{u}_k = 0.$$

Comme $U \neq 0$, il existe au moins un k tel que

$$\cos(k\pi h) + 2 - 3\lambda/h = 0$$

ou encore tel que

$$\lambda = \frac{h}{3}(2 + \cos(kh\pi)).$$

Ainsi, toute valeur propre de \mathcal{M}_h est de la forme

$$\lambda_k = \frac{h}{3}(2 + \cos(kh\pi)), \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}. \quad (7.18)$$

Enfin, en remarquant que

$$\{\lambda_k \text{ tel que } k \in \{0, \dots, n+1\}\} = \{\lambda_k \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\},$$

on peut limiter notre analyse aux cas $k \in \{0, \dots, n+1\}$.

Réciproquement, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, les fonctions $u_h(x)$ vérifiant l'équation (7.17) avec $\lambda = \lambda_k$ sont de la forme de la forme

$$u_h(x) = \sum_j \hat{u}_{k+2(n+1)j} e^{i(k+2(n+1)j)\pi x} + \hat{u}_{-(k+2(n+1)j)} e^{i(k+2(n+1)j)\pi x}.$$

Afin que u_h soit définie à partir d'un vecteur $U \in \mathbb{R}^n$ par (7.16), il est nécessaire que u_h soit impaire, à valeur réelles. On en déduit qu'on a alors

$$\hat{u}_{k+2(n+1)j} = -\hat{u}_{-(k+2(n+1)j)},$$

et que les coefficients de Fourier \hat{u}_m sont imaginaires purs. On en déduit qu'il existe une suite a_j de réels telle que

$$u_h(x) = \sum_j a_j \sin((k+2(n+1)j)\pi x).$$

Ainsi, si $\mathcal{M}_h U = \lambda_k U$, on a

$$U_p = u_h(x = hp) = \sum_j a_j \sin((k+2j(n+1))\pi ph) = \left(\sum_j a_j \right) \sin(khp\pi).$$

Un calcul similaire appliqué au cas $k=0$ ou $k=n+1$, nous montre que λ_0 et λ_{n+1} ne sont pas des valeurs propres de \mathcal{M}_h . Finalement, comme \mathcal{M}_h est symétrique, définie positive, elle admet une base de vecteurs propres. Les seules valeurs propres possibles sont les n valeurs de λ_k pour $k \in \{1, \dots, n\}$. A chacune de ces valeurs propres, on peut associer au plus un vecteur propre. Ainsi, il ne peut y avoir de valeur propre double. On a donc prouvé que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathcal{M}_h U^k = \lambda_k U^k,$$

où $U^k = (\sin(khp\pi))_p$.

On note $\widetilde{\mathcal{M}}_h$ la matrice de masse obtenue par la formule de quadrature (6.18). Pour tout entier i et j , on obtient

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_h)_{ij} = \sum_{k=1}^n h/2(\phi_i(hk)\phi_j(hk) + \phi_i(h(k+1))\phi_j(h(k+1))) = h \sum_{k=1}^n \delta_i^k \delta_j^k = h\delta_i^j.$$

Donc $\widetilde{\mathcal{M}}_h = h \text{Id}$. En utilisant la matrice de masse ainsi obtenue, les valeurs propres et vecteur propres du problème spectral discret vérifient

$$\mathcal{K}_h U_h = h \lambda_h U_h,$$

où

$$\mathcal{K}_h = h \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On déduit des valeurs propres de \mathcal{M}_h et de la relation

$$\mathcal{K}_h = 6h \text{Id} - 6\mathcal{M}_h$$

que les valeurs propres du problème spectral sont de la forme

$$\lambda_k = h(2 - 2 \cos(kh\pi)),$$

et $k \in \{1, \dots, n\}$.