Chapitre 8

PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

Exercice 8.2.1 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$. On considère la solution u de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{p.p. dans } \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{8.1}$$

1. En supposant que la solution u de (8.1) est assez régulière dans $]0,T[\times\Omega$, montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx\, ds \; &= \frac{1}{2}\int_\Omega u_0(x)^2 dx \\ &+ \int_0^t \int_\Omega f(x,s) u(x,s)\, dx\, ds. \end{aligned} \tag{8.2}$$

2. Démontrer la propriété suivante, appelée "lemme de Gronwall" : si z est une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$z(t) \le a + b\int_0^t z(s)\, ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

où a, b sont deux constantes positives ou nulles, alors

$$z(t) \le a e^{bt} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

3. En appliquant le lemme de Gronwall avec $z(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 dx$, déduire de (8.2) que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx\, ds \; &\le \frac{e^t}{2}\left(\int_\Omega u_0(x)^2 dx \right. \\ &\left. + \int_0^T \int_\Omega f(x,s)^2 dx\, ds\right). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Correction.

1. En intégrant le produit de l'équation d'évolution par u sur Ω, on obtient
$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} u - \Delta u u\right) dx = \int_\Omega f u dx.$$
Par intégration par partie et en échangeant l'opérateur de dérivation en temps et intégrale, il vient
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,dx\right) + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega f u\,dx.$$
Il suffit alors d'effectuer une intégration en temps pour obtenir l'égalité désirée.

2. Soit $v(t) = a + b\int_0^t z(s)ds$. La fonction v est de classe C^1 et
$$v'(t) = bz(t) \leq bv(t).$$
Ainsi,
$$(v(t)\exp(-bt))' = \exp(-bt)(v'(t) - bv(t)) \leq 0$$
et $v(t)\exp(-bt) \leq v(0) = a$. Comme $z(t) \leq v(t)$, on a montré que
$$z(t) \leq a\exp(bt).$$

3. On pose
$$z(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx,$$
$$a = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^T\int_\Omega |f(x,s)|^2 dx ds\right)$$
et $b = 1$. D'après l'égalité d'énergie établie précédemment et en utilisant l'inégalité $fu \leq (|f|^2 + |u|^2)/2$, on a pour tout $0 < t < T$,
$$\begin{aligned} z(t) &\leq z(t) + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx ds \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega |f(x,s)|^2 + |u(x,s)|^2 dx ds\right) \\ &\leq a + \int_0^t z(s)ds. \end{aligned}$$
D'après le lemme de Gronwall, $z(t) \leq ae^t$. En intégrant cette inégalité, on obtient
$$a + \int_0^t z(s)ds \leq ae^t.$$
Cette dernière, combinée à la précédente, implique que
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx ds \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^T\int_\Omega |f(x,s)|^2 dx ds\right) e^t. \end{aligned}$$

Exercice 8.2.2 Au vu de l'estimation

$$\int_\Omega u(x,t)^2dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \le C\left(\int_\Omega u_0(x)^2dx + \int_0^t\int_\Omega f(x,s)^2dxds\right), \tag{8.4}$$

vérifiée par la solution u de (8.1), où la constante C est indépendante de T, on voit que le terme e^t n'est certainement pas optimal dans la majoration (8.3). Cette estimation peut être améliorée en raisonnant de la façon suivante, avec une variante du lemme de Gronwall.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $g \in L^2(]0,T[)$ tel que $g \ge 0$. Montrer que, si $z(t)$ est continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$ et vérifie

$$z(t) \le a + 2\int_0^t g(s)\sqrt{z(s)}ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

alors
$$z(t) \le \left(\sqrt{a} + \int_0^t g(s)ds\right)^2 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

2. Déduire de (8.2) que, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x,t)^2dx + 2\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(x,s)|^2dx\,ds \;&\le \left(\left(\int_\Omega u_0(x)^2dx\right)^{1/2}\right.\\ &\left.+\int_0^t ds\left(\int_\Omega f(x,s)^2dx\right)^{1/2}\right)^2.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Correction.

1. On suppose dans un premier temps que g est une fonction régulière. Soit ε un réel strictement positif. On pose

$$v(t) = \varepsilon + a + 2\int_0^t g(s)\sqrt{z(s)}ds.$$

Comme $g(s)\sqrt{z(s)}$ est une fonction continue, la fonction v est dérivable et $v'(t) = 2g(t)\sqrt{z(t)}$. Comme $z(t)\le v(t)$ et que g est une fonction positive,

$$v'(t) \le 2g(t)\sqrt{v(t)}.$$

Enfin, $v(t)>0$, ainsi d'après l'inégalité précédente, $v'(t)/2\sqrt{v(t)} \le g(t)$ et par intégration, on obtient

$$\sqrt{v(t)} - \sqrt{v(0)} \le \int_0^t g(s)ds.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$z(t) \le v(t) \le \left(\sqrt{a+\varepsilon} + \int_0^t g(s)ds\right)^2.$$

Il suffit de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro pour obtenir l'inégalité désirée.
Si g n'est pas continue, on raisonne par densité. Soit $g \in L^2(]0;T[)$ tel que $g \geq 0$ presque partout. Il existe une suite de fonctions régulières g_n positives, convergeant vers g dans $L^2(]0;T[)$. Pour tout n, on a pour tout $t \in [0;T]$,

$$z(t) \leq a + \|g_n - g\|_{L^2(]0;T[)} \|z\|^{1/2}_{L^1(]0;T[)} + 2\int_0^t g_n(s)\sqrt{z(s)}ds.$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} z(t) \leq & a + \|g_n - g\|_{L^2(]0;T[)} \|z\|^{1/2}_{L^1(]0;T[)} + 2\int_0^t g_n(s)\sqrt{z(s)}ds \\ \leq & \left(\sqrt{a + \|g_n - g\|_{L^2(]0;T[)} \|z\|^{1/2}_{L^1(]0;T[)}} + \int_0^t g_n(s)ds\right)^2. \end{aligned}$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini pour conclure.

2. D'après l'égalité d'énergie (8.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u(x,t)^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \\ \leq & \int_\Omega u_0(x)^2 dx + 2\int_0^t \left(\int_\Omega f(x,s)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u(x,s)^2 dx\right)^{1/2} ds. \end{aligned}$$

On applique la variante du Lemme de Gronwall à

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_\Omega u(x,t)^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \\ g(s) &= \left(\int_\Omega f(x,s)^2 dx\right)^{1/2} \\ a &= \int_\Omega u_0(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u(x,t)^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \\ \leq & \left(\left(\int_\Omega u_0(x)^2 dx\right)^{1/2} + \int_0^t \left(\int_\Omega f(x,s)^2 dx\right)^{1/2} ds\right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 8.2.3 On suppose que les hypothèses du Théorème **8.2.7** sont vérifiées, que $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, et que la solution u de (8.1) est assez régulière dans $]0,T[\times\Omega$. Montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right|^2 dxds &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx \\ &+ \int_0^t \int_\Omega f(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s) dxds. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Correction. En multipliant l'équation (8.1) vérifiée par u par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on obtient, suite à une intégration sur Ω que

$$\int_\Omega -\Delta u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx + \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx = \int_\Omega f(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx.$$

Par intégration par partie, il vient

$$\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\frac{\partial \nabla u}{\partial t}(x,t)dx + \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx = \int_\Omega f(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx,$$

ou encore en échangeant les signes dérivation et intégrale,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) + \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx = \int_\Omega f(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx.$$

Il suffit d'intégrer cette dernière équation suivant t pour obtenir l'égalité recherchée.

Exercice 8.2.4 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$. Montrer que l'équation de la chaleur avec condition aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{8.7}$$

admet une unique solution $u \in L^2(]0,T[;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

Correction. On applique le Théorème **8.2.3** à $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et à la forme bilinéaire symétrique, continue sur V

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx.$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ n'est pas coercive, mais $a(u,v) + \langle u,v\rangle_{L^2}$ étant coercive sur V, les conclusions du théorème restent valables d'après la remarque **8.2.5**. Le problème (8.7) admet donc une unique solution

$$u \in L^2(]0;T[;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Exercice 8.2.5 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $A(x)$ une fonction de Ω dans l'ensemble des matrices symétriques réelles telles qu'il existe deux constantes $\beta \geq \alpha > 0$ vérifiant

$$\beta|\xi|^2 \geq A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x\in\Omega.$$

Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$. Montrer que le problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x\in\Omega, \end{cases} \tag{8.8}$$

admet une unique solution $u \in L^2(]0,T[;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

Correction. On introduit la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ symétrique définie pour tout u et v de $H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Pour presque tout $x \in \Omega$, la matrice $A(x)$ étant symétrique, définie positive, elle admet une base de vecteurs propres. Comme pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$A(x)\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2,$$

la plus grande valeur propre de $A(x)$ est inférieure à β et $\|A\|_2 \leq \beta$. D'après cette majoration et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout u et $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(u,v) \leq \beta \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \leq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

La forme bilinéaire a est donc continue sur $H_0^1(\Omega)$. De plus, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Poincaré,

$$a(u,u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \geq \alpha C \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

La forme bilinéaire a est donc coercive. D'après le Théorème **8.2.3** appliqué à la forme bilinéaire a avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ au problème aux limites (8.8).

Exercice 8.3.1 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T > 0$. On considère une donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et un terme source $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$. On considère la solution u de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{p.p. dans } \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p. dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases} \tag{8.9}$$

1. En supposant que la solution u de (8.9) est assez régulière dans $]0,T[\times\Omega$, montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\, dx = & \int_\Omega u_1(x)^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2\, dx \\ & +2\int_0^t \int_\Omega f(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s) dx ds. \end{aligned}$$

2. En déduire qu'il existe une constante $C(T)$ (indépendante des données autre que T) telle que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\, dx \leq \\ & C(T)\left(\int_\Omega u_1(x)^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2\, dx + \int_0^t \int_\Omega f(x,s)^2 dx ds\right). \end{aligned}$$

3. Montrer qu'il existe une constante C (indépendante de toutes les données y compris T) telle que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\, dx \le C\left(\int_\Omega u_1(x)^2 dx\right.$$
$$\left. + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2\, dx + \left(\int_0^t \left(\int_\Omega f(x,s)^2 dx\right)^{1/2} ds\right)^2\right).$$

Correction.

1. Supposons que u soit une solution suffisamment régulière, de l'équation des ondes. On a
$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\Delta u = f\frac{\partial u}{\partial t}.$$
Par intégration sur le domaine Ω, il vient en échangeant les opérateurs d'intégration en espace et de dérivation en temps (ce qui est licite pour u régulière) que
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega f\frac{\partial u}{\partial t}dx.$$
Par intégration en temps, on obtient l'égalité voulue.
2. En appliquant l'inégalité
$$\int_0^t\int_\Omega f(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)dxds \le \frac{1}{2}\left(\int_0^t\int_\Omega f^2(x,s)dxds + \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right|^2 dxds\right).$$
à celle précédemment obtenue, on obtient que
$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx$$
$$\le \int_\Omega |u_1(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega f^2(x,s)dxds + \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxds.$$
D'après le Lemme de Gronwall (voir Exercice **8.2.1**), on en déduit que pour tout $t \le T$,
$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx$$
$$\le e^t\left(\int_\Omega |u_1(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega f^2(x,s)dxds\right).$$
3. De l'égalité obtenue dans la première partie de l'exercice, on déduit à l'aide de l'inégalité de Schwarz que
$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$
$$\le \int_\Omega \left(|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2\right) dx + 2\int_0^t \left(\int_\Omega f^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

D'après la variante du Lemme de Gronwall (voir Exercice **8.2.2**),

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx$$
$$\leq \left(\left(\int_\Omega |u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t \left(\int_\Omega f^2(x,s)dx \right)^{1/2} ds \right)^2$$

d'où l'on déduit l'estimation recherchée avec $C = 2$ (il suffit d'utiliser l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$).

Exercice 8.3.2 On suppose que les hypothèses du Théorème **8.3.4** sont vérifiées, que le terme source est nul $f = 0$ et que la solution u de (8.9) est régulière dans $[0,T] \times \Omega$. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|^2 + \left|\nabla \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|^2 \right) dx = 0.$$

Correction. Il suffit de remarquer que la fonction $\partial^{m-1}u/\partial^{m-1}t$ est elle-même solution d'une équation d'onde avec conditions de Dirichlet homogènes au bord, sans terme source.

Exercice 8.3.3 Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^N$. Soit $\mu > 0$ et λ les coefficients de Lamé d'un solide élastique tels que $2\mu + N\lambda > 0$. Soit une donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^N$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))^N$. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))^N \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))^N$ de

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left(2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u))\, \mathrm{Id}\right) = f & \text{dans } \Omega \times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(t=0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{8.10}$$

En supposant que la solution u est assez régulière, montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\frac{\rho}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \mu \int_\Omega |e(u)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)^2 dx = \frac{\rho}{2}\int_\Omega |u_1|^2 dx$$
$$+\mu \int_\Omega |e(u_0)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u_0)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega f \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx ds.$$

En déduire une estimation d'énergie.

Correction. On introduit la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie pour tout u et $v \in H_0^1(\Omega)^N$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(2\mu e(u) \cdot e(v) + \lambda (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\right) dx.$$

La formulation variationnelle associée au système d'équations aux dérivées partielles consiste à déterminer $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)^N) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)^N)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 \langle u(t), v\rangle_{L^2}}{dt^2} + a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega f \cdot v \, dx \\ u(t=0) = u_0; \quad \dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1 \end{array} \right.$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$. La forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)^N$. La coercivité de la forme bilinéaire a est établie dans les preuves du Théorèmes **5.3.1** et **5.3.4** et découle du Lemme de Korn **5.3.3** ou de sa version simplifiée **5.3.2**. Les hypothèses du Théorème **8.3.1** sont vérifiées, il existe une unique solution à la formulation variationnelle. En appliquant la fonction test $v = \partial u / \partial t$ à la formulation variationnelle, on en déduit que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \mu \int_\Omega |e(u)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (\mathrm{div} u)^2 dx \right) = \int_\Omega f \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx.$$

L'égalité d'énergie en découle par une simple intégration. En procédant comme pour l'Exercice 8.3.1 on obtient les estimations d'énergie suivantes. Tout d'abord, pour tout T il existe une constante $C(T)$ ne dépendant que du temps final T telle que

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \int_\Omega 2\mu \, |e(u)|^2 + \lambda (\mathrm{div} u)^2 dx \leq \\ C(T) \left(\displaystyle\int_\Omega |u_1|^2 \, dx + \int_\Omega 2\mu \, |e(u_0)|^2 + \lambda(\mathrm{div} u_0)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |f|^2 \, dx ds \right). \end{array}$$

De plus, il existe une constante C (indépendante de toutes les données y compris T) telle que

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \int_\Omega 2\mu \, |e(u)|^2 + \lambda (\mathrm{div} u)^2 dx \leq C \Bigg(\int_\Omega |u_1|^2 \, dx + \\ \displaystyle\int_\Omega 2\mu \, |e(u_0)|^2 + \lambda(\mathrm{div} u_0)^2 dx + \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |f|^2 dx \right)^{1/2} ds \right)^2 \Bigg). \end{array}$$

Exercice 8.4.1 On reprend les hypothèses de la Proposition **8.4.1**. Soit $f(x) \in L^2(\Omega)$ et u la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Soit $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \|u(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Correction.

On pose $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - v(x)$. La fonction $\tilde{u}$ est solution de l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet homogènes et condition initiale $\tilde{u}(x,0) = u_0(x) - v(x)$. Ainsi, d'après la Proposition **8.4.1**,

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Exercice 8.4.2 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times\Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{8.11}$$

Soit λ_1 la plus petite valeur propre du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. On note u_1 la valeur propre assoicée normalisé en norme L^2. Montrer qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, e^{-\lambda_2 t}\ \forall\, t > 1, \quad \text{avec } \alpha_1^0 = \int_\Omega u_0 u_1\, dx, \tag{8.12}$$

où λ_k désigne la k-ème valeur propre du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet.

Correction.

On rappelle que la solution u de l'équation (8.11) est donnée par

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} u_k,$$

où λ_k sont les valeurs propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet et u_k est la famille de vecteurs propres associé, base orhtonormale de $L^2(\Omega)$. Ainsi,

$$u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} u_k.$$

et

$$\|u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1\|_{L^2(\Omega)} = e^{-\lambda_2 t} \left(\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k^0|^2 e^{-2(\lambda_k - \lambda_2)} \right)^{1/2}.$$

Comme $\lambda_k - \lambda_2 \geq 0$, on en déduit que

$$\|u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_2 t} \left(\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k^0|^2 \right)^{1/2} \leq e^{-\lambda_2 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 8.4.3 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On note u_1 la première fonction propre du Laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet, λ_1 la valeur propre associée. On rappelle que l'on peut choisir $u_1 > 0$ dans Ω (voir le Théorème de Krein-Rutman **7.3.10**) et on admettra que l'on a aussi $\partial u_1/\partial n > 0$ sur $\partial\Omega$. Soit $f = 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u l'unique solution (supposée régulière) de (8.1).

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver une constante positive K telle que

$$-Ku_1(x) \leq u(x,\varepsilon) \leq Ku_1(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}, \tag{8.13}$$

et en déduire qu'il existe une constante positive C telle que

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t)| \leq Ce^{-\lambda_1 t} \quad \forall\, t > \varepsilon. \tag{8.14}$$

Correction. Pour tout $\varepsilon > 0$, $u(x,\varepsilon)$ est une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Rappelons que $u_1(x)$ est également une fonction régulière sur $\overline{\Omega}$, qu'elle est strictement positive sur Ω et que $\partial u_1/\partial n > 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit
$$K_1 = 1 + \sup_{x\in\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x,\varepsilon) \Big/ \frac{\partial u_1}{\partial n}(x) \right|.$$
On introduit les fonctions v_+ et v_- définies par

$$\begin{aligned} v_+(x) &= K_1 u_1(x) - u(x,\varepsilon) \\ v_-(x) &= K_1 u_1(x) + u(x,\varepsilon) \end{aligned}$$

On vérifie sans mal que $\partial v_\pm/\partial n > 0$ sur $\partial\Omega$. Il existe donc un voisinage ω de $\partial\Omega$ tel que pour tout $x \in \omega$,
$$v_\pm(x) \geq 0.$$
Il existe un compact $A \subset \Omega$ tel que $A \cup \omega = \Omega$. On pose

$$K_2 = \max_{x\in A} |u(x,\varepsilon)/u_1(x)|$$

et $K = \max(K_1, K_2)$. On vérifie sans peine que

$$-Ku_1(x) \leq u(x,\varepsilon) \leq Ku_1(x).$$

La fonction $\tilde{u}(x,t) = Ke^{-\lambda_1(t-\varepsilon)}u_1$ est une solution de l'équation de la chaleur (8.1) sur $t > \varepsilon$ avec $f = 0$ et $\widetilde{u}(x,\varepsilon) = Ku_1(x)$ comme condition initiale. Enfin, comme

$$-\tilde{u}(x,\varepsilon) \leq u(x,\varepsilon) \leq \tilde{u}(x,\varepsilon),$$

on déduit du principe du maximum de la Proposition **8.4.2** que

$$-\tilde{u}(x,t) \leq u(x,t) \leq \tilde{u}(x,t)$$

pour tout $t \geq \varepsilon$. On a donc montré que, pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \geq \varepsilon$,

$$|u(x,t)| \leq \left(Ke^{\lambda_1\varepsilon} \max_{x\in\Omega} u_1(x) \right) e^{-\lambda_1 t}.$$

Exercice 8.4.4 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_*^+)$, et $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega))$ l'unique solution de (8.1). Montrer que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_*^+)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{D^2}{2N}\|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_*^+)}, \tag{8.15}$$

où $D = \sup_{x,y\in\Omega}|x-y|$ est le diamètre de Ω. On pourra utilement introduire la fonction $\psi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta\psi = 1$ dans Ω.

Correction. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \Omega$,

$$u(x,t) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{D^2}{2N}\|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_*^+)}.$$

En appliquant ce résultat à $-u$ au lieu de u et en combinant les deux estimations obtenues, on prouve l'estimation souhaitée.

Introduisons la fonction u_+ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u_+}{\partial t} - \Delta u_+ = \|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_*^+)} & \text{dans }]0;T[\times\Omega \\ u_+(x,t) = 0 & \text{sur }]0;T[\times\partial\Omega \\ u_+(x,0) = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum, $u \leq u_+$. Il suffit donc de prouver le résultat pour $u = u_+$. Dans un premier temps, on considère le cas $f = 0$. Il s'agit de prouver que pour presque tout $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$, on a $|u(x,t)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. D'après le principe du maximum de la Proposition **8.4.2**, on a déjà $u \geq 0$. Reste à prouver que $u \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. A cet effet, on procède comme lors de la preuve de la Proposition **8.4.2**. On introduit la fonction $\widetilde{u} = \max(u - \|u_0\|_{L^\infty}, 0)$. En vertu du Lemme **5.2.24**, $\widetilde{u} \in L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega))$ et

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\widetilde{u}dx = \int_\Omega |\nabla\widetilde{u}|^2dx.$$

De même, si u est suffisamment régulière (ce que nous admettrons par la suite),

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{u}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\widetilde{u}|^2dx\right).$$

Remarque 8.4.1 *D'après la Proposition **8.4.6**, pour tout $\delta > 0$, la fonction u appartient à $H^1(]\delta,T[;L^2(\Omega))$. Elle est donc assez régulière pour que le Lemme de troncature **5.2.24** s'applique de sorte à justifier l'équation précédente.*

Par conséquent, en multipliant l'équation vérifiée par u par $\widetilde{u}$, on obtient par intégration sur Ω, puis par intégration par partie que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\widetilde{u}|^2dx\right) + \int_\Omega |\nabla\widetilde{u}|^2dx = 0.$$

En intégrant cette équation en temps, il vient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\widetilde{u}|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\widetilde{u}(t=0)|^2dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla\widetilde{u}|^2dxdt = 0.$$

Comme $\widetilde{u}(t=0)=0$, on en déduit que $\widetilde{u}=0$, c'est à dire $u \le \|u_0\|_{L^\infty}$. On se place dorénavant dans le cas général (f non nécessairement nul). Soit ψ la solution du problème aux limites $\psi \in H^1_0(\Omega)$, $-\Delta\psi = 1$. On pose $v = u_+ - \|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+_*)}\psi$. La fonction v est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans }]0;T] \\ v(x,t) = 0 & \text{sur}]0;T[\times\partial\Omega \\ v(x,0) = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} - \|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+_*)}\psi & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Comme $\psi \ge 0$, pour tout $x \in \Omega$ on a $v(x,0) \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ainsi, pour tout t,

$$v(x,t) \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{8.16}$$

On a donc obtenu que $u_+ \le \|u_0\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\psi$. Il reste à majorer ψ afin d'obtenir l'estimation souhaitée. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'origine de $\mathbb{R}^N$ appartient au bord de Ω. Comme

$$-\Delta|x|^2/(2N) = 1 = -\Delta\psi \text{ dans } \Omega$$

et

$$|x|^2/(2N) \ge 0 = \psi(x) \text{ sur } \partial\Omega,$$

le principe du maximum implique que $|x|^2/2N \ge \psi(x)$. Or $|x|$ est majoré sur Ω par de diamètre de Ω, ainsi $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \le D^2/2N$, ce qui achève la preuve.

Exercice 8.4.5 (difficile) Démontrer rigoureusement la Proposition **8.4.5** suivante : Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^N$, et soit un temps final $T > 0$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$, et u l'unique solution dans $C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,T[;H^1_0(\Omega))$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{8.17}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, u est de classe C^∞ en x et t dans $\overline{\Omega} \times [\varepsilon, T]$.

Pour cela on introduira, pour tout entier $m \ge 0$, l'espace

$$W^{2m}(\Omega) = \{v \in H^{2m}(\Omega),\ v = \Delta v = \cdots \Delta^{m-1}v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \tag{8.18}$$

que l'on munit de la norme $\|v\|^2_{W^{2m}(\Omega)} = \int_\Omega |(\Delta)^m v|^2 dx$, dont on montrera qu'elle est équivalente à la norme de $H^{2m}(\Omega)$. On reprendra la démonstration du Théorème **8.2.3** en montrant que la suite (w_k) des sommes partielles est de Cauchy dans $C^\ell([\varepsilon,T],W^{2m}(\Omega))$.

Correction.

La démonstration se fait par récurrence sur m. Pour $m=1$, en posant $f = \Delta v$, le Théorème **5.2.26** de régularité nous dit exactement que, si $f \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1_0(\Omega)$ alors $v \in H^2(\Omega)$, c'est à dire que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \le C\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in H^1_0(\Omega).$$

L'inégalité inverse est évidente, d'où l'équivalence des normes dans le cas $m = 1$. Supposons que $\|v\|_{W^{2(m-1)}(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{H^{2(m-1)}}$ pour les fonctions de $W^{2(m-1)}(\Omega)$. Le Théorème de régularité **5.2.26** nous dit aussi que

$$\|v\|_{H^{2m}(\Omega)} \leq C\|\Delta v\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

c'est à dire, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $v \in W^{2m}(\Omega)$,

$$\|v\|_{H^{2m}(\Omega)} \leq C\|\Delta v\|_{W^{2(m-1)}(\Omega)} = C\|\Delta^{m-1}(\Delta v)\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_{W^{2m}(\Omega)},$$

ce qui prouve que $\|v\|_{W^{2m}(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{H^{2m}(\Omega)}$ pour les fonctions de $W^{2m}(\Omega)$ (l'inégalité inverse est évidente).

On se propose de montrer que $u \in C^\ell([\varepsilon, T], W^{2m}(\Omega))$. A cet effet, il suffit de prouver que la suite w_k des sommes partielles introduites dans la preuve du Théorème **8.2.3** est de Cauchy pour la norme $C^\ell([\varepsilon, T], W^{2m}(\Omega))$. Notons que toute fonction propre u_i appartient à $W^{2m}(\Omega)$ pour tout m (car $\Delta^m u_i = \lambda_i^m u_i = 0$ sur $\partial\Omega$). On rappelle que

$$w^k(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_0^j e^{-\lambda_j t} u_j.$$

Ainsi, soit l et k deux entiers naturels non nuls,

$$\left\|\frac{\partial^\ell(w^k - w^l)}{\partial t^\ell}(t)\right\|^2_{W^{2m}(\Omega)} = \int_\Omega \left|\sum_{j=k}^{l} \alpha_0^j(-\lambda_j)^\ell e^{-\lambda_j t}(\Delta)^m u_j\right|^2 dx.$$

Comme u_j est une base de vecteur propres orthonormale du Laplacien, $(\Delta)^m u_j = (-\lambda_j)^m u_j$ et

$$\left\|\frac{\partial^\ell(w^k - w^l)}{\partial t^\ell}(t)\right\|^2_{W^{2m}(\Omega)} = \sum_{j=k}^{l} \left(\alpha_0^j(-\lambda_j)^{m+\ell} e^{-\lambda_j t}\right)^2.$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout m et ℓ, il existe une constant $C(\varepsilon, m, \ell)$ telle que

$$|(-\lambda_j)^{m+\ell} e^{-\lambda_j t}|^2 \leq C(\varepsilon, m, \ell)$$

pour tout $t \geq \varepsilon$ et tout indice j. Ainsi, pour tout $t \geq \varepsilon$, on a

$$\left\|\frac{\partial^\ell(w^k - w^l)}{\partial t^\ell}(t)\right\|_{W^{2m}} \leq C(\varepsilon, m, \ell) \sum_{j=k}^{l} |\alpha_0^j|^2,$$

où le second membre tend vers zéro lorsque k et l tendent vers l'infini. La suite w^k est donc de Cauchy dans $C^\ell([\varepsilon, T]; W^{2m}(\Omega))$. Elle est donc convergente dans cet espace et $u \in C^\ell([\varepsilon, T]; W^{2m}(\Omega))$.

Exercice 8.4.6 Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $t > 0$, on pose

$$S(t)u_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

Vérifier que $S(t)$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. En posant $S(0) = \mathrm{Id}$ (l'identité de $L^2(\mathbb{R}^N)$), vérifier que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs qui dépendent continûment de t, c'est-à-dire qu'ils vérifient $S(t+t') = S(t)S(t')$ pour $t, t' \geq 0$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N))$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{8.19}$$

admet une unique solution $u \in C(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*; L^2(\mathbb{R}^N))$, donnée par

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds, \tag{8.20}$$

c'est-à-dire

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{dy}{(4\pi t)^{N/2}} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} f(y,s) e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \frac{dy\, ds}{(4\pi(t-s))^{N/2}}.$$

Correction.

Par mesure de commodité, on notera indifférement la transformée de Fourier d'une fontion v par $\hat{v}$ ou $\mathcal{F}(v)$. La linéarité de l'opérateur $S(t)$ est évidente.

Continuité de l'opérateur. Montrons que pour tout réel t positif ou nul, $S(t)$ est continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. La norme $L^2(\mathbb{R}^N)$ de $S(t)u_0$ étant égale à la norme $L^2(\mathbb{R}^N)$ de sa transformée de Fourier, il suffit de vérifier la continuité de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de l'application qui à u_0 associe $\mathcal{F}(S(t)u_0)$). Notons tout d'abord que $S(t)u_0$ est égale au produit de convolution de u est d'un Gaussienne

$$S(t)u_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} u_0 * e^{-|x|^2/4t}.$$

Or la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale (à un coefficient près, du à la définition de la transformée de Fourier choisie) au produit des transformées de Fourier. Plus précisément, on a pour toutes fonctions v et w de $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}(v * w) = (2\pi)^{N/2} \hat{v}\hat{w}.$$

Enfin la transformée de Fourier d'une Gaussienne est une Gaussienne : pour tout réel a, on a

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2})(\xi) = (2a)^{-N/2} e^{-|\xi|^2/4a}.$$

On déduit de ces deux propriétés que

$$\mathcal{F}(S(t)u_0)(\xi) = \hat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t}$$

Ainsi, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|S(t)u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

et $S(t)$ est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de norme inférieure à 1.
Propriété de semi-groupe. Montrons que $S(t)$ est un semi-groupe. Pour tout réels t et t' positifs, on a

$$\mathcal{F}(S(t+t')u_0) = \hat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t} e^{-|\xi|^2 t'} = \mathcal{F}(S(t)u_0) e^{-|\xi|^2 t'} = \mathcal{F}(S(t')(S(t)u_0))$$

en appliquant la transformée de Fourier inverse, on obtient que

$$S(t+t')(u_0) = S(t')(S(t)u_0).$$

Ainsi, $S(t+t') = S(t')S(t)$.
Cas homogène. On considère tout d'abord le cas homogène, c'est à dire $f = 0$. Montrons que $u(\cdot) = S(\cdot)u_0 \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$. Soit t et t' réels positifs ou nuls, on a

$$\begin{aligned}\|u(t') - u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \|(S(t') - S(t))u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u_0 - S(|t-t'|)u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|(1 - e^{-|\cdot|^2|t-t'|})\hat{u}_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Or $|(1 - e^{-|\xi|^2|t-t'|})\hat{u}_0|$ est borné uniformément par rapport à t et t' par $2|\hat{u}_0|$. Ainsi, par application du Théorème de convergence dominé de Lebesegue, on en déduit la continuité de l'application u de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Montrons que $u(\cdot) = S(\cdot)u_0 \in C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N))$. Notons qu'il est équivalent d'établir la dérivabilité de la transformée de Fourier de u. On rappelle que

$$\mathcal{F}(S(t)u_0) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0,$$

d'où on déduit formellement que

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{F}(S(t)u_0)) = -|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0 = -|\xi|^2 \mathcal{F}(S(t)u_0).$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse à cette expression, il vient

$$\frac{d}{dt}(S(t)u_0) = \Delta(S(t)u_0),$$

d'où on déduit que $S(t)u_0$ est solution de l'équation de la chaleur avec second membre nul. Reste à établir rigoureusement que $\mathcal{F}(S(t)u_0)$ est dérivable de $\mathbb{R}^+_*$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Notons tout d'abord que $|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t}\hat{u}_0$ apparient effectivement à $L^2(\mathbb{R}^N)$. Afin de prouver qu'il s'agit de la dérivée de $e^{-|\xi|^2 t}\hat{u}_0$, il reste à établir que pour tout $t > 0$,

$$\|(\delta t)^{-1}(e^{-|\xi|^2(t+\delta t)} - e^{-|\xi|^2 t} + \delta t|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = o(\delta t).$$

A cet effet, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale suivante

$$e^{-|\xi|(t+\delta t)} = e^{-|\xi|t} - \delta t|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t} + (\delta t)^2 \int_0^1 |\xi|^4 e^{-|\xi|^2(t+s\delta t)}\,ds.$$

On en déduit que dès que $\delta t > -t/2$, on a

$$\delta t^{-1}(e^{-|\xi|(t+\delta t)} - e^{-|\xi|t} + \delta t|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t}) = \delta t \int_0^1 |\xi|^4 e^{-|\xi|^2(t+s\delta t)}\, ds \leq \delta t \int_0^1 |\xi|^4 e^{-|\xi|^2 t/2}\, ds.$$

Or, pour t fixé, on a

$$\sup_\xi |\xi|^4 e^{-|\xi|^2 t/2} = C_t < \infty.$$

Il s'en suit que

$$\|(\delta t)^{-1}(e^{-|\xi|^2(t+\delta t)} - e^{-|\xi|^2 t} + \delta t|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_t \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \delta t,$$

ce qui conclut la preuve de la dérivabilité de u dans le cas $f = 0$.

Cas non homogène. D'après les résultats précédents, on a établi que dans le cas $f = 0$, la fonction u définie par (8.19) était solution de (8.20). D'après la linéarité de la définition (8.19) de u et de l'équation (8.20), il suffit de considérer le cas $f \neq 0$ et $u_0 = 0$ pour conclure. Dans ce cas, on a

$$u(t) = \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds.$$

Par un simple changement de variable, on en déduit que

$$u(t) = \int_0^t S(s) f(t-s)\, ds.$$

Enfin, l'opérateur $S(s)$ étant uniformément continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et f appartenant à $C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$, on en déduit que u est dérivable par rapport à t dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et que

$$\frac{du}{dt} = \int_0^t S(s) f'(t-s)\, ds + S(t) f(0).$$

Il en découle que

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(\xi) = \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{f}'(s,\xi)\, ds + e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(0,\xi).$$

En effectuant une intégration par partie sur le premier terme du membre de droite de cette équation, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{u}}{dt}(\xi) &= \left[e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{f}(s,\xi)\right]_0^t - |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{f}(s,\xi)\, ds + e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(0,\xi) \\
&= \hat{f}(t,\xi) - |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{f}(s,\xi)\, ds \\
&= \hat{f}(t,\xi) - |\xi|^2 \hat{u}.
\end{aligned}$$

Par transformation de Fourier inverse, on en déduit que

$$\frac{du}{dt} = \Delta u + f,$$

et on a évidemment $u(t = 0) = 0$.

Exercice 8.4.7 (égalité d'énergie) Soit u la solution de l'équation de la chaleur (8.19) avec $f = 0$. Montrer que, pour tout $T > 0$,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,T)^2dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x,t)|^2 dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)^2dx.$$

Correction. On rappelle que la transformée de Fourier de ∇u est $i\xi\hat{u}$. Comme la transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\hat{u} = \hat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}&\|u(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \\
&=\frac{1}{2}\|\hat{u}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_0^T \|\xi\hat{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(T,\xi)|^2 e^{-2|\xi|^2T}\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^T |\xi|^2|u_0(t,\xi)|^2e^{-2|\xi|^2t}\,dtd\xi \\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(T,\xi)|^2 e^{-2|\xi|^2T}\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(|u_0(t,\xi)|^2e^{-2|\xi|^2t}\right)\,dtd\xi \\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(\xi)|^2d\xi = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Exercice 8.4.8 (principe du maximum) Soit u la solution de l'équation de la chaleur (8.19) avec $f = 0$. Montrer que, si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ \forall\, t > 0.$$

Montrer que, si $u_0 \geq 0$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$, alors $u \geq 0$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_*$.

Correction. On majore la formule explicite pour u

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{\|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-y^2/4t}dy = \|u_0\|_\infty.$$

Enfin, d'après l'expression de explicite de u en fonction de u_0, il est évident que si $u_0 \geq 0$ presque partout, $u \geq 0$ presque partout.

Exercice 8.4.9 (effet régularisant) Soit u la solution de l'équation de la chaleur (8.19) avec $f = 0$. Montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_*)$.

Correction.

D'après l'expression de la transformée de Fourier de u,

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-|\xi|^2t},$$

pour tout multi-indice α et pour tout $t > 0$, la fonction $(\xi,t) \mapsto |\xi|^\alpha\hat{u}(\xi,t)$ est continue en temps à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, par transformation de Fourier inverse, $\partial^\alpha u$ est un élément de $C(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N))$. En d'autres termes, pour tout entier m, u appartient à $C(\mathbb{R}^+_*, H^m(\mathbb{R}^N))$. D'après les injections de Sobolev, on en déduit que $u(t) \in C(\mathbb{R}^+_*, C^\infty(\mathbb{R}^N))$. En effectuant une analyse similaire sur $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$, on en déduit que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+_*, C^\infty(\mathbb{R}^N)) = C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_*)$.

Exercice 8.4.10 (comportement asymptotique) Soit u la solution de l'équation de la chaleur (8.19) avec $f = 0$. Montrer que

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall\, t > 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Correction.

Soit r un réel positif, on décompose l'intégrale définissant $u(x,t)$ en deux intégrales

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\left(\int_{|x-y|\geq r} u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy + \int_{|x-y|\leq r} u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy\right).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chacun des termes, on en déduit que

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{|x-y|\geq r} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\,dy\right)^{1/2} + \left\|e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{|x-y|\leq r}|u_0(y)|^2\,dy\right)^{1/2}\right).$$

On note B_r la boule de rayon r centrée en l'origine. On a

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left\|e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} + \left\|e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{|x-y|\leq r}|u_0(y)|^2\,dy\right)^{1/2}\right)$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour r assez grand, on a $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} < \varepsilon$. De plus, pour x assez grand (r étant fixé), comme $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\|e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{|x-y|\leq r}|u_0(y)|^2\,dy\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout ε, pour x assez grand on a $|u(x,t)| < \frac{2\varepsilon}{(4\pi t)^{N/2}}$. En d'autres termes,

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x,t) = 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

On rappelle que $\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-|\xi|^2 t}$. Ainsi,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_0(\xi)|^2 e^{-2|\xi|^2 t}\,d\xi$$

et d'après le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ converge vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Le même raisonnement appliqué aux dérivées partielles de u d'ordre quelconque nous donne que pour tout entier m, la norme

H^m de $u(t)$ converge vers zéro lorsque t tend vers l'infini. D'après les injections de Sobolev, on en déduit que, pour tout entier r, la norme de $u(t)$ dans $C^r(\mathbb{R})$ tend vers zéro quand $t \to \infty$. En particulier,

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Exercice 8.4.11 (vitesse de propagation infinie) Soit u la solution de l'équation de la chaleur (8.19) avec $f = 0$. Montrer que, si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(x,t) > 0$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_*$.

Correction.

Soit $u_0 \geq 0$. D'après le principe du maximum, on a $u \geq 0$. Par contraposé, il suffit donc de montrer que s'il existe $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_*$ tel que $u(x,t) = 0$, alors $u_0(y) = 0$ presque partout. Ce dernier résultat est plus ou moins trivial, en effet, d'après l'expression explicite de $u(x,t)$, si $u(x,t) = 0$, on a $u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} = 0$ pour presque tout y et donc $u_0(y) = 0$ presque partout.

Exercice 8.5.1 Soit $\eta > 0$. On considère l'équation des ondes amortie

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{p.p. dans } \Omega \times \mathbb{R}^*_+ \\ u = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^*_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p. dans } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{p.p. dans } x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{8.21}$$

On suppose que u est une solution suffisamment régulière de (8.21) et que f est nul après un temps fini. Montrer, à l'aide d'un lemme de Gronwall (voir l'Exercice **8.2.1**), que u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ décroissent exponentiellement vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini.

Correction.

Comme on s'interesse uniquement à une propriété asymptotique de la solution et que f est nul pour t assez grand, on peut supposer, sans perte de généralité, que $f = 0$. Soit α un réel strictement positif. On pose $v = e^{\alpha t}u$. La fonction v est solution du problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (\eta - 2\alpha)\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \alpha(\eta-\alpha)v = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \times \mathbb{R}^*_+ \\ v = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^*_+ \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{p.p. dans } x \in \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x) & \text{p.p. dans } x \in \Omega. \end{array}\right.$$

où $v_0 = u_0$ et $v_1 = \alpha u_0 + u_1$. En multipliant l'équation vérifée par v dans Ω par $\partial v/\partial t$, on obtient suite à une intégration par partie et un échange de l'opérateur d'intégration par rapport au domaine et de dérivation par rapport au temps que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + |\nabla v|^2 - \alpha(\eta-\alpha)|v|^2\,dx\right) = (2\alpha - \eta)\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Ainsi, si $\alpha \leq \eta/2$, on en déduit qu'il existe C_α tel que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + |\nabla v|^2 - \alpha(\eta-\alpha)|v|^2\,dx < C_\alpha.$$

Enfin, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq C\int_\Omega |v|^2\,dx,$$

et la majoration suivante

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + (C - \alpha(\eta-\alpha))|v|^2\,dx < C_\alpha.$$

Il existe α (strictement positif) tel que $C-\alpha(\eta-\alpha)$ soit strictement positif (il suffit de choisir α assez petit. Il découle de l'inégalité précédente que les normes L^2 de $\partial v/\partial t$ et de v sont bornées, pourvu que $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ soit choisi suffisamment petit. Comme $u = e^{-\alpha t}v$ et $\partial u/\partial t = (\partial v/\partial t - \alpha v)e^{-\alpha t}$, u est $\partial u/\partial t$ déroîssent exponentiellement vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 8.5.2 Soit $u(t,x)$ la solution, supposée suffisamment régulière, de l'équation des ondes (8.9). En l'absence de terme source, montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \frac{1}{2}E_0,$$

avec E_0 l'énergie initiale

$$E_0 = \int_\Omega |u_1(x,t)|^2\;dx + \int_\Omega |\nabla u_0(x,t)|^2\;dx.$$

Pour cela on multipliera l'équation (8.9) par u et on intégrera par partie.

Correction.

En multipliant l'équation des ondes par u, on obtient par intégration sur $\Omega\times]0,t[$ que

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u(x,s)\,dxds + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2\,dxds = 0.$$

En intégrant par partie en temps le premier terme de cette équation, on en déduit que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}u(x,t)\,dx - \int_\Omega u_1u_0\,dx - \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right|^2\;dxds + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2\,dxds$$
$$= 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{t}\left(\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(x,s)|^2dxds-\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right|^2dxds\right)$$
$$=\frac{1}{t}\left(\int_\Omega u_1u_0dx-\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}u(x,t)dx\right)\xrightarrow{t\to+\infty}0,$$

car $\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}u(x,t)dx$ est uniformément borné en temps. D'autre part, l'équation de conservation de l'énergie implique que

$$\frac{1}{t}\left(\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxds+\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxds\right)=E_0.$$

En sommant ces deux équations on obtient que

$$\frac{1}{t}\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx,$$

et donc

$$\frac{1}{t}\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dx,$$

convergent vers $E_0/2$.

Exercice 8.5.3 On considère l'équation des ondes dans tout l'espace $\mathbb{R}^N$

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\Delta u=0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+^*\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{dans } x\in\mathbb{R}^N\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) & \text{dans } x\in\mathbb{R}^N,\end{array}\right.\tag{8.22}$$

avec une donnée initiale (u_0,u_1) régulière et à support compact. Montrer que la solution $u(t,x)$ peut se mettre sous la forme

$$u(x,t)=(Mu_1)(x,t)+\left(\frac{\partial(Mu_0)}{\partial t}\right)(x,t),$$

où M est un opérateur de moyenne défini par

$$\text{si } N=1,\quad (Mv)(x,t)=\frac{1}{2}\int_{-t}^{+t}v(x-\xi)d\xi,$$

$$\text{si } N=2,\quad (Mv)(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<t}\frac{v(x-\xi)}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}d\xi,$$

$$\text{si } N=3,\quad (Mv)(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi|=t}v(x-\xi)ds(\xi),$$

où $ds(\xi)$ est la mesure surfacique de la sphère. En déduire que la solution u en (t,x) ne dépend que des valeurs des données initiales u_0 et u_1 sur la boule $|x|\leq t$. (Pour savoir comment on trouve les expressions ci-dessus de l'opérateur M, nous renvoyons au chapitre 9 de [3].)

Correction.

On procède de manière identique dans les trois cas : dans un premier temps, on vérifie que pour toute fonction v,

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(x,t) = \Delta(Mv)(x,t) \tag{8.23}$$

Pour tout couple (x,t) tel que $t > 0$. On en déduit que la fonction u définie à l'aide de Mu_1 et Mu_0 vérifie bien l'équation des ondes. Il reste à montrer qu'elle vérifie les conditions aux limites, c'est à dire que

$$\begin{aligned} Mv(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial Mv}{\partial t}(x,0) &= v(x) \\ \frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Le cas $N = 1$ est essentiellement élémentaire. Étudions directement les cas $N = 2$ ou 3.

Cas N=2. Tout d'abord, on effectue un changement de variable afin de définir Mv à l'aide d'une intégrale dont le domaine est indépendant du temps. On a

$$Mv = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1} \frac{v(x-t\xi)t}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi.$$

Si on suppose que v est assez régulière, on peut échanger les opérateur d'intégration et de dérivation lors du calcul des dérivées partielles. On obtient

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1} \frac{t(D^2v(x-t\xi)\xi)\cdot\xi - 2\nabla v(x-t\xi)\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi$$

et

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1} \frac{\Delta v(x-t\xi)}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}td\xi.$$

Afin de vérifié (8.23), on introduit, pour tous x et $t > 0$ fixés, la fonction $w(\xi) = v(x-t\xi)$. Des expressions de $\partial^2 Mv/\partial t^2$ et de $\Delta(Mv)$, on déduit que

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi t}\int_{|\xi|<1} \frac{(D^2 w\xi)\cdot\xi + 2\nabla w\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi$$

et que

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{2\pi t}\int_{|\xi|<1} \frac{\Delta w}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi.$$

Soit r un réel strictement positif tel que $r < 1$. Par intégration par partie, on montre que

$$\int_{|\xi|<r} \frac{\Delta w}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi = -\int_{|\xi|<r} \frac{\nabla w\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{3/2}}d\xi + \frac{1}{r(1-r^2)^{1/2}}\int_{|\xi|=r}(\nabla w\cdot\xi)ds\ .$$

De même,

$$\int_{|\xi|<r} \frac{(D^2 w\xi)\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}\,d\xi =$$

$$-\int_{|\xi|<r} (\nabla w\cdot\xi)\left(\frac{2}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1-|\xi|^2)^{3/2}}\right)d\xi + \frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}\int_{|\xi|=r}\nabla w\cdot\xi\,ds\,.$$

On effectue la soustraction de ces deux expressions, puis on fait tendre r vers 1. Les termes de bords tendent vers zéro, ce qui établit que

$$\int_{|\xi|<1} \frac{\Delta w-(D^2 w\xi)\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi = 2\int_{|\xi|<1}\frac{\nabla w\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}d\xi\,.$$

De l'expression des dérivées partielles de Mv en fonction de w, on en déduit que Mv vérifie l'équation des ondes (8.23). Reste à prouver que Mv vérifie bien les conditions aux limites annoncées en $t=0$.

On a évidemment $Mv(t=0)=0$. De plus,

$$\frac{\partial Mv}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{-t\nabla v(x-t\xi)\cdot\xi + v(x-t\xi)}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}\,d\xi\,.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial Mv}{\partial t}(x,t=0) = v(x)\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{1}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}\,d\xi\,.$$

En passant en coordonnées polaires afin de calculer le terme intégrale, il vient

$$\frac{\partial Mv}{\partial t}(t=0) = v\,.$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(t=0) = -\frac{1}{\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{\nabla v(x)\cdot\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|<1}\nabla_\xi\cdot\left(\nabla v(x)(1-|\xi|^2)^{1/2}\right)\,d\xi\,.$$

Par intégration par partie, on obtient que

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(t=0) = -\frac{1}{\pi}\int_{|\xi|=1}(\nabla v(x)\cdot\xi)(1-|\xi|^2)^{1/2}\,d\xi = 0.$$

Cas N=3. On procède au calcul des dérivées partielles de Mv comme précédemment. Il vient

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1} t(D^2 v(x-t\xi)\xi)\cdot\xi - 2(\nabla v\cdot\xi)\,ds$$

et

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1} t\Delta v(x-t\xi)\,ds\,.$$

Soit (x, t) fixé tel que $t > 0$. On introduit la fonction $w(\xi) = v(x - t\xi)$. On a

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi|=1} (D^2 w\xi) \cdot \xi + 2(\nabla w \cdot \xi)\, ds$$

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi|=1} \Delta w\, ds \ .$$

Il suffit donc de remarquer que

$$\int_{|\xi|=1} (D^2 w\xi + 2\nabla w - \Delta w\xi) \cdot \xi\, ds = 0 \ ,$$

en tant que flux d'un champ de divergence nulle. En effet,

$$\nabla \cdot (D^2 w\xi) = \nabla(\Delta w) \cdot \xi + \Delta w \ ,$$

et (en dimension 3),

$$\nabla \cdot (\Delta w\xi) = 3\Delta w + \nabla(\Delta w) \cdot \xi \ .$$

Pour finir, il est aisé de vérifier que Mv vérifie bien les conditions aux limites annoncées (pourvu qu'on sache que la surface de la sphère est 4π).

Exercice 8.5.4 On considère l'équation des ondes (8.22) dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec des conditions aux limites indéterminées mais homogènes, et une donnée initiale (u_0, u_1) régulière et à support compact dans Ω. Vérifier qu'il existe un temps $T > 0$ tel que sur l'intervalle $[0, T]$ la solution est encore donnée par les formules de l'Exercice **8.5.3**.

Correction.
Soit K l'union des supports de u_0 et u_1. Si T est inférieur à la distance de K à la frontière de Ω, la solution explicite donnée par l'exercice précédent est aussi solution de l'équation des ondes dans le domaine Ω. En effet, les conditions aux limites sont vérifiées, car $u(x, t)$ est nul dès que la distance de x à K est supérieure à t.

Exercice 8.5.5 (application musicale) En admettant que le son se propage selon l'équation des ondes, montrer qu'il n'est pas possible d'écouter de la musique (audible) dans un monde de dimension spatiale $N = 2$, alors que c'est (fort heureusement) possible en dimension $N = 3$.

Correction.
En dimension 3, d'après l'expression de la solution de l'équation des ondes obtenu à l'Exercie **8.5.3**, on constate (en considérant une source sonore ponctuelle) que cette dernière est indépendante du point l'espace considéré, à un amortissement et un décalage temporel près. Tout auditeur perçoit donc le même son (tout comme le musicien par ailleurs) et seul la puissance du signal reçu varie. De plus, le son perçu ne dépend que du son émis à un instant donné, ce qui permet en particulier au musicien d'excercer un retro-contrôle. Ces deux propriétés ne sont plus vérifiées en dimension 2. Le son perçu (même en considérant une source ponctuelle) dépend de

l'emplacement de l'auditeur et dépend de plus de tout le passé. Cela rend la tâche d'un musicien délicate même en considérant qu'il n'y a qu'un seul auditeur en un endroit donné : il lui serait nécessaire de résoudre en temps réel un problème inverse difficile. Enfin, il est à noté qu'en dimension 2, il est tout simplement impossible d'obtenir un silence absolu (même si la "pollution sonore" décroît progressivement au court du temps).

Exercice 8.6.1 La discrétisation en espace d'une équation parabolique conduit à la résolution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \mathcal{M}\dfrac{dU}{dt}(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t) \\ U(t=0) = U^0 \end{cases}, \tag{8.24}$$

où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ sont les matrices de masse et de rigidité associées au problème et $U(t) \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur constitué des degrés de libertés de l'approximation spaciale choisie. Dans l'optique de résoudre numériquement cette équation ordinaire, on introduit le θ-schéma consistant à calculer une approximation $U^n \in \mathbb{R}^N$ de $U(n\Delta t)$ définie par

$$\mathcal{M}\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \mathcal{K}\left(\theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n\right) = \theta b(t_{n+1}) + (1-\theta)b(t_n). \tag{8.25}$$

où $\theta \in [0,1]$. Pour $\theta = 1/2$, on obtient le schéma de Crank-Nicholson. Nous allons également considéré un autre schéma, dit de Gear, défini par

$$\mathcal{M}\frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{K}U^{n+1} = b(t_{n+1}). \tag{8.26}$$

Montrer que le schéma de Crank-Nicholson et celui de Gear sont d'ordre 2 (en temps), tandis que le θ-schéma pour $\theta \neq 1/2$ est d'ordre 1.

Correction.

Schéma de Crank-Nicholson et θ-schéma

Soit U la solution de l'équation différentielle (8.24). L'erreur de troncature du schéma du θ-schéma est

$$\begin{aligned} E(U) = \mathcal{M}\frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t} &+ \mathcal{K}(\theta U(t_{n+1}) + (1-\theta)U(t_n)) \\ &- \left(\theta b(t_{n+1}) + (1-\theta)b(t_n)\right). \end{aligned}$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t_n$, on obtient

$$\begin{aligned} E(U) = \left(\mathcal{M}\frac{dU}{dt} + \mathcal{K}U - b\right) &+ \Delta t\left(\frac{\mathcal{M}}{2}\frac{d^2U}{dt^2} + \theta\left(\mathcal{K}\frac{dU}{dt} - \frac{db}{dt}\right)\right) \\ &+ (\Delta t)^2\left(\frac{\mathcal{M}}{6}\frac{d^3U}{dt^3} + \frac{\theta\mathcal{K}}{2}\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{\theta}{2}\frac{d^2b}{dt^2}\right) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \end{aligned}$$

En exploitant l'équation vérifiée par U, on en déduit que

$$E(U) = \Delta t \frac{1-2\theta}{2}\left(\frac{db}{dt} - \mathcal{K}\mathcal{M}^{-1}(b - \mathcal{K}U)\right)$$
$$+ (\Delta t)^2 \frac{1-3\theta}{6}\left((\mathcal{K}\mathcal{M}^{-1})^2(b-\mathcal{K}U) + \mathcal{K}\mathcal{M}^{-1}\frac{db}{dt} + \frac{d^2b}{dt^2}\right) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

Pour $\theta \neq 1/2$, le θ-schéma est d'ordre 1 en temps tandis que le schéma de Crank-Nicholson (qui correspond au cas $\theta = 1/2$) est d'ordre 2 en temps.

Schéma de Gear

Dans le cas du schéma de Gear, l'erreur de troncature est

$$E(U) = \mathcal{M}\frac{2U(t_{n+1}) - 4U(t_n) + U(t_{n-1})}{2\Delta t} + \mathcal{K}U(t_{n+1}) - b(t_{n+1}).$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t_{n+1}$, on obtient

$$E(U) = \left(\mathcal{M}\frac{dU}{dt} + \mathcal{K}U - b\right)(t_{n+1}) + \frac{(\Delta t)^2}{3}\mathcal{M}\frac{d^3U}{dt^3}(t_{n+1}) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

Si U est solution de (8.24), on a donc

$$E(U) = \frac{(\Delta t)^2}{3}\mathcal{M}\frac{d^3U}{dt^3}(t_{n+1}) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

Le schéma de Gear est donc d'ordre 2 en temps.

Exercice 8.6.2 On considère le θ-schéma (8.25) avec $1/2 \leq \theta \leq 1$. On note $\|U\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\mathcal{M}U \cdot U}$. Démontrer l'équivalent discret suivant de l'inégalité d'énergie (**8.17**)

$$\|U^{n_0}\|_{\mathcal{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \mathcal{K}\hat{U}^n \cdot \hat{U}^n \leq C\left(\|U^0\|_{\mathcal{M}}^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \mathcal{O}(1)\right).$$

où $n_0 = T/\Delta t$. Pour cela, on prendra le produit scalaire de (8.25) avec $\hat{U}^n = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$.

Correction. Afin d'établir l'inégalité d'énergie demandée, on procède comme dans le cas continue. A cet effet, on utilise une version discrète du lemme de Gronwall : Si v^n est une suite de réels positifs tels que pour $a \geq v^0 \geq 0$ et $b \geq 0$, on a

$$v^{n+1} \leq a + b\sum_{p=0}^{n} v^p,$$

alors pour tout n, on a

$$v^n \leq a(1+b)^n.$$

Dans un premier temps, nous allons donc démontrer ce lemme, puis l'appliquer au θ-schéma afin d'obtenir l'estimation d'énergie souhaitée. On introduit la suite w_n définie par

$$w^{n+1} = a + b\sum_{p=0}^{n} w^p,$$

$w^0 = a$. On vérifie que $w^n = a(1+b)^n$ et que $v^n \leq w^n$, ce qui prouve la version discrète de lemme de Gronwall. Nous allons maintenant appliquer ce lemme afin d'obtenir l'estimation voulue.

Notons que

$$2\mathcal{M}(U^{n+1} - U^n) \cdot (\theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n) = \|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} - \|U^n\|^2_{\mathcal{M}} \\ + (2\theta - 1)\|U^{n+1} - U^n\|^2_{\mathcal{M}}.$$

En effectuant le produit scalaire de (**8.59**) avec $\hat{U}^n = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$, on obtient

$$\frac{\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} - \|U^n\|^2_{\mathcal{M}}}{2\Delta t} + \frac{2\theta - 1}{2\Delta t}\|U^{n+1} - U^n\|^2_{\mathcal{M}} + \mathcal{K}\hat{U}^n \cdot \hat{U}^n = (\theta b_{n+1} + (1 - \theta b_n)) \cdot \hat{U}^n.$$

Comme $\theta \geq 1/2$, par sommation de la relation précédente, il vient

$$\frac{\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} - \|U_0\|^2_{\mathcal{M}}}{2\Delta t} + \sum_{p=0}^{n} \mathcal{K}\hat{U}^p \cdot \hat{U}^p \leq \sum_{p=0}^{n} (\theta b_{p+1} - (1-\theta)b_p) \cdot (\theta U^{p+1} - (1-\theta)U^p). \tag{8.27}$$

Majorons le terme de droite. D'après la définition de b, on a

$$(\theta b_{p+1} - (1-\theta)b_p) \cdot (\theta U^{p+1} - (1-\theta)U^p) \\ = \int_{\Omega} (\theta f(t_{p+1}) + (1-\theta) f(t_p)) \cdot (\theta u_h^{p+1} + (1-\theta)u_h^p) dx.$$

On en déduit que

$$(\theta b_{p+1} - (1-\theta)b_p) \cdot (\theta U^{p+1} - (1-\theta)U^p) \\ \leq \frac{1}{2}\left(\|\theta f(t_{p+1}) + (1-\theta) f(t_p)\|^2_{L^2} + \|\theta u_h^{p+1} + (1-\theta)u_h^p\|^2_{L^2}\right).$$

De la définition de $\mathcal{M}$ et en utilisant la convexité de l'application $x \mapsto x^2$, il en découle que

$$(\theta b_{p+1} - (1-\theta)b_p) \cdot (\theta U^{p+1} - (1-\theta)U^p) \\ \leq \frac{1}{2}\left(\theta\|f(t_{p+1})\|^2_{L^2} + (1-\theta)\|f(t_p)\|^2_{L^2} + \theta\|U^{p+1}\|^2_{\mathcal{M}} + (1-\theta)\|U^p\|^2_{\mathcal{M}}.\right)$$

L'inégalité (8.27) implique ainsi

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} - \|U_0\|^2_{\mathcal{M}}\right) + \sum_{p=0}^{n} \mathcal{K}\hat{U}^p.\hat{U}^p \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{n+1} \|f(t_p)\|^2_{L^2} + \sum_{p=0}^{n+1} \|U^p\|^2_{\mathcal{M}},\right).$$

On réarrange les différents termes de l'inégalité afin d'obtenir une majoration nous permettant d'appliquer l'équivalent discret du lemme de Gronwall.

$$\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{2\Delta t}{1 - \Delta t}\sum_{p=0}^{n} \mathcal{K}\hat{U}^p \cdot \hat{U}^p \\ \leq \frac{1}{1-\Delta t}\|U^0\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{\Delta t}{1-\Delta t}\left(\sum_{p=0}^{n+1} \|f(t_p)\|^2_{L^2} + \sum_{p=0}^{n} \|U^p\|^2_{\mathcal{M}}\right)$$

On applique la version discrète du lemme de Gronwall à $v_n = \|U^n\|^2_{\mathcal{M}}$,

$$a = \frac{1}{1-\Delta t}\|U^0\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{1}{1-\Delta t}\sum_{p=0}^{n_0}\|f(t_p)\|^2_{L^2}, \qquad b = \frac{\Delta t}{1-\Delta t}.$$

Pour tout $n \leq n_0$, on a $v_n \leq a(1+b)^n$. En particulier,

$$a + b\sum_{p=0}^{n} v^p \leq a(1+b)^{n+1},$$

et

$$\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} + (1-\Delta t)^{-1}\sum_{p=0}^{n}\mathcal{K}\hat{U}^p\cdot\hat{U}^p\Delta t \leq$$
$$(1-\Delta t)^{-(n+2)}\left(\sum_{p=0}^{n_0+1}\|f(t_p)\|^2_{L^2}\Delta t + \|U^0\|^2_{\mathcal{M}}\right).$$

Notons que $(1-\Delta t)^{-n}$ est majoré par une constante indépendante du pas de temps Δt (mais dépendant du temps final $T = n_0\Delta t$). En effet, $(1-\Delta t)^{-n} \to e^t$ lorsque Δt tend vers zéro (avec $n = t/(\Delta t)$). On retrouve ainsi l'équivalent discret de l'estimation d'énergie de l'Exercice 8.3.1.

Exercice 8.6.3 Montrer que le schéma de Gear (8.26) est inconditionnellement stable.

Correction. On prouve la stabilité en établissant une estimation d'énergie du même type que celle obtenue dans l'Exercice 8.6.2. On note tout d'abord que

$$\mathcal{M}(3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1})\cdot U^{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} - \|U^n\|^2_{\mathcal{M}}$$
$$+ \|2U^{n+1} - U^n\|^2_{\mathcal{M}} - \|2U^n - U^{n-1}\|^2_{\mathcal{M}} + \|U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}\|^2_{\mathcal{M}}\Big).$$

On effectue le produit scalaire du schéma de Gear (8.26) par U^{n+1}. En majorant le second terme, on obtient

$$\frac{1}{4}\left(\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} - \|U^n\|^2_{\mathcal{M}} + \|2U^{n+1} - U^n\|^2_{\mathcal{M}} - \|2U^n - U^{n-1}\|^2_{\mathcal{M}}\right)$$
$$+ \Delta t\mathcal{K}U^{n+1}\cdot U^{n+1} \leq \Delta t\left(\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2}\|f(t_{n+1})\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Par sommation, on en déduit que

$$(1-2\Delta t)\|U^{n+1}\|^2_{\mathcal{M}} + \Delta t\sum_{p=1}^{n+1}\mathcal{K}U^p\cdot U^p$$
$$\leq \|2U^1 - U^0\|^2_{\mathcal{M}} + \|U^1\|^2_{\mathcal{M}} + 2(\Delta t)\sum_{p=1}^{n+1}\|f(t_p)\|^2_{L^2} + 2(\Delta t)\sum_{p=1}^{n}\|U^p\|^2_{\mathcal{M}}.$$

En appliquant la version discrète du Lemme de Gronwall à $v_n = \|U^n\|_n^2$,

$$a = (1-2\Delta t)^{-1}\left(\|2U^1 - U^0\|_{\mathcal{M}}^2 + \|U^1\|_{\mathcal{M}}^2 + 2(\Delta t)\sum_{p=1}^{n+1}\|f(t_p)\|_{L^2}^2\right)$$

et $b = 2\Delta t/(1-2\Delta t)$, on obtient l'estimation d'énergie

$$\|U^n\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1-2\Delta t)^{-(n+1)}\left(\|2U^1 - U^0\|_{\mathcal{M}}^2 + \|U^1\|_{\mathcal{M}}^2 + 2\sum_{p=1}^{n_0+1}\|f(t_p)\|_{L^2}^2\Delta t\right),$$

pour tout $n \leq n_0$. Enfin,

$$(1-2\Delta t)^{-(n+1)} = e^{-\ln(1-2\Delta t)(n+1)} \leq e^{-\ln(1-2\Delta t)T/\Delta t} = e^{2T} + o(1).$$

Pour un temps final fixé, le schéma est donc stable.

Exercice 8.6.4 On résout par éléments finis $\mathbb{P}_1$ et schéma explicite en temps l'équation de la chaleur (8.1) en dimension $N = 1$. On utilise une formule de quadrature qui rend la matrice $\mathcal{M}$ diagonale (voir la Remarque **7.4.3** et l'Exercice **7.4.1**). On rappelle que la matrice $\mathcal{K}$ est donnée par (6.1) et qu'on a calculé ses valeurs propres lors de l'Exercice **13.1.3**. Montrer que dans ce cas la condition CFL

$$\max_i \lambda_i \, \Delta t \leq 2, \tag{8.28}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $\mathcal{K}U = \lambda\mathcal{M}U$ est bien du type $\Delta t \leq Ch^2$.

Correction. La matrice $\mathcal{M}$ obtenue à l'aide de la méthode de mass-lumping est

$$\mathcal{M} = h\,\mathrm{Id}\,.$$

Ainsi, les valeurs propres λ_i sont égales aux valeurs propres de $\mathcal{K}$ divisées par h, et

$$\lambda_i = 4h^{-2}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right).$$

On en déduit que $\lambda_i \leq 4h^{-2}$, on retrouve une condition CFL classique, c'est à dire

$$2\Delta t \leq h^2.$$

Exercice 8.6.5 Écrire le système linéaire d'équations différentielles ordinaires obtenu par semi-discrétisation de l'équation des ondes amortie (8.21).

Correction. Le problème discrétisé en espace consiste à déterminer $u(t)$ fonction de t à valeur dans V_{0h} tel que pour tout $v_h \in V_{0h}$,

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle u_h(t), v_h\rangle_{L^2(\Omega)} + \eta\frac{d}{dt}\langle u_h(t), v_h\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle\nabla u_h(t), \nabla v(t)\rangle = \langle f, v_h\rangle_{L^2(\Omega)}$$

tel que

$$u_h(t=0) = u_{0,h} \text{ et } \frac{du_h}{dt}(t=0) = u_{1,h}.$$

Si ϕ_i désigne la base de V_{0h}, si on note $U_i(t)$ les coordonnées de $u_h(t)$ dans cette base, on a

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{M}U(t) + \eta\frac{d}{dt}\mathcal{M}U(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t)$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice de masse $\mathcal{M} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$, $\mathcal{K}$ la matrice de rigidité $\langle \nabla\phi_i, \nabla\phi_j \rangle$ et b le terme source $\langle f, \phi_j \rangle$.

Exercice 8.7.1 La discrétisation spaciale de l'équation des ondes conduit à l'équation différentielle ordinaire

$$\mathcal{M}\frac{d^2U}{dt^2}(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t), \tag{8.29}$$

où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité, tandis de $U(t) \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur contenant les dégrés de libertés de l'approximation spaciale de la solution exacte et $b(t) \in \mathbb{R}^N$ dépend du terme source. Afin d'intégrer numériquement cette équation différentielle ordinaire, on considère le schéma de Newmark

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{U}^{n+1} + \mathcal{K}U^{n+1} = b(t_{n+1}) \\ \dot{U}^{n+1} = \dot{U}^n + \Delta t(\delta\ddot{U}^{n+1} + (1-\delta)\ddot{U}^n) \\ U^{n+1} = U^n + \Delta t\dot{U}^n + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\left(2\theta\ddot{U}^{n+1} + (1-2\theta)\ddot{U}^n\right) \end{cases} \tag{8.30}$$

avec $0 \le \delta \le 1$ et $0 \le \theta \le 1/2$. Montrer que le schéma de Newmark est d'ordre 1 (en temps) pour $\delta \ne 1/2$, d'ordre 2 pour $\delta = 1/2$ et $\theta \ne 1/12$, et d'ordre 4 si $\delta = 1/2$ et $\theta = 1/12$.

Correction.

On introduit l'erreur de troncature

$$\begin{aligned} E(U) = \mathcal{M}&\frac{U(t+\Delta t) - 2U(t) + U(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \\ &+ \mathcal{K}\left(\theta U(t+\Delta t) + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta\right)U(t) + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta\right)U(t-\Delta t)\right) \\ &\qquad - \left(\theta b(t+\Delta t) + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta\right)b(t) + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta\right)b(t-\Delta t)\right). \end{aligned}$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t_n$, on établit que

$$\begin{aligned} E(U) = \mathcal{M}U'' + \mathcal{K}U - b + \Delta t\left(\delta - \frac{1}{2}\right)(\mathcal{K}U' - b') \\ + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{4} - \frac{\delta}{2} + \theta\right)(KU'' - b'') + \frac{(\Delta t)^2}{12}\mathcal{M}U^{(4)} \\ + \frac{(\Delta t)^3}{6}\left(\delta - \frac{1}{2}\right)(\mathcal{K}U^{(3)} - b^{(3)}) + \mathcal{O}((\Delta t)^4). \end{aligned}$$

Si U est solution de l'équation (8.29), on a

$$\mathcal{K}U'' - b'' = -\mathcal{M}U^{(4)}.$$

Ainsi,

$$E(U) = \Delta t \left(\delta - \frac{1}{2}\right)(\mathcal{K}U' - b') - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\delta}{2} + \theta - \frac{1}{12}\right)\mathcal{M}U^{(4)} + \frac{(\Delta t)^3}{6}\left(\delta - \frac{1}{2}\right)(\mathcal{K}U^{(3)} - b^{(3)}) + \mathcal{O}((\Delta t)^4).$$

On vérifie aisément sur l'expression de $E(U)$ que le schéma de Newmark est d'ordre 1 pour $\delta \neq 1/2$, d'ordre 2 pour $\delta = 1/2$ et $\theta \neq 1/12$ et d'ordre (au moins) 4 si $\delta = 1/2$ et $\theta = 1/12$.

Exercice 8.7.2 On considère le cas limite du Lemme **8.7.1**, c'est-à-dire $\delta = 1/2$ et tel que $\lambda_i (\Delta t)^2 = \frac{4}{1-4\theta}$ (on utilise les mêmes notations que celles introduites dans la preuve de ce dernier). Montrer que le schéma de Newmark (8.30) est instable dans ce cas en vérifiant que

$$A_i = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } A_i^n = (-1)^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}.$$

Remarquez qu'il s'agit d'une instabilité "faible" puisque la croissance de A_i^n est linéaire et non exponentielle.

Correction. D'après la démonstration du Lemme **8.7.1**, on a

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \frac{2 - \lambda_i(\Delta t)^2(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta)}{1 + \theta\lambda_i(\Delta t)^2}, \quad a_{12} = -\frac{1 + \lambda_i(\Delta t)^2(\frac{1}{2} - \delta + \theta)}{1 + \theta\lambda_i(\Delta t)^2}.$$

On vérifie sans mal que pour $\delta = 1/2$ et $\lambda_i(\Delta t)^2 = 4\theta/(1-\theta)$, $a_{11} = -2$ et $a_{12} = -1$. Ainsi,

$$A_i = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence on établit alors que

$$A_i^n = (-1)^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que le que le schéma de Newmark est instable dans ce cas (pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considéré le cas $b = 0$, $U_i^1 = U_i^0 = 1$)