Ecole Polytechnique, Promotion 2004
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 25 avril 2006

Corrigé proposé par G. Allaire

1 Différences finies

1. On remplace u_j^n par $u(t^n, x_j)$ où u est une fonction régulière et on définit l'erreur de troncature par

$$E = (\Delta t)^{-1}\Big(u(t^{n+1}, x_j) - c(c-1)/2u(t^n, x_{j-2}) - c(2-c)u(t^n, x_{j-1}) - (c-1)(c-2)/2u(t^n, x_j)\Big).$$

Remarquez le facteur $(\Delta t)^{-1}$ ci-dessus qui permettra d'avoir une erreur qui ne tendra vers zéro **que** si u est solution de l'équation de transport (voir la Remarque 2.2.5 du cours). On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j

$$u(t^n, x_{j-2}) = u(t^n, x_j) - 2\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + 2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\Big((\Delta x)^3\Big)$$

et

$$u(t^n, x_{j-1}) = u(t^n, x_j) - \Delta x\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\Big((\Delta x)^3\Big)$$

qui conduit à

$$E = \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + c\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) - c^2\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{c}{\Delta t}\mathcal{O}\Big((\Delta x)^3\Big).$$

En notant que $c(\Delta x)^3/\Delta t = a(\Delta x)^2$ et en faisant un développement de Taylor en t, on en déduit

$$E = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) - c^2\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\Big((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\Big).$$

Il est clair que si u n'est pas solution de l'équation de transport, alors l'erreur de troncature ne tend pas vers zéro. Par contre, si u est solution, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et l'erreur de troncature devient

$$E = \mathcal{O}\Big((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\Big)$$

ce qui prouve que le schéma de Beam-Warming est consistant et au moins d'ordre 2.

2. Pour étudier la stabilité L^2 du schéma on utilise l'analyse de Fourier. Avec les notations du polycopié, pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(\frac{c(c-1)}{2}e^{-4i\pi k\Delta x} + c(2-c)e^{-2i\pi k\Delta x} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\right)\hat{u}^n(k),$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(\frac{c(c-1)}{2}2\cos(2\pi k\Delta x) + c(2-c) - (c-1)e^{2i\pi k\Delta x}\right)e^{-2i\pi k\Delta x}\hat{u}^n(k)$$

En notant $\xi = 2\pi k\Delta x$, on obtient après simplification

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2|\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &= \left((c-1)^2\cos\xi + c(2-c)\right)^2 + (c-1)^2\sin^2\xi \\ &= (c-1)^2c(c-2)\cos^2\xi + 2c(2-c)(c-1)^2\cos\xi + c^2(2-c)^2 + (c-1)^2 \end{aligned}$$

On remarque que

$$c^2(2-c)^2 + (c-1)^2 = 1 + (c-1)^2c(c-2),$$

donc

$$|A(k)|^2 = 1 - (c-1)^2c(2-c)(1-\cos\xi)^2.$$

Pour $0 \le c \le 2$ le coefficient $(c-1)^2c(2-c)$ est positif, et on en déduit donc que $|A(k)| \le 1$ pour toute fréquence $k \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $0 \le c \le 2$.

L'avantage du schéma de Beam-Warming est qu'il permet de prendre des pas de temps deux fois plus grands que les schémas décentré amont, de Lax-Friedrichs ou de Lax-Wendroff, tout en étant explicite. Par ailleurs, un schéma linéaire consistant et stable est convergent d'après le théorème de Lax. Le schéma de Beam-Warming est donc convergent sous la condition CFL ci-dessus.

2 Masse ajoutée

1. Le gradient et le Laplacien d'une constante sont nuls et comme ce sont les seules expressions de ϕ_k qui apparaissent dans l'équation, si ϕ_k est solution, alors $\phi_k + C$ est aussi solution. Par ailleurs, la formule de Green sur Ω_s nous donne

$$-\int_\Gamma \vec{e}_k \cdot \vec{n}\, ds = \int_{\Omega_s} \frac{\partial 1}{\partial x_k} dx = 0.$$

2. Soit l'espace de Hilbert (comme sous-espace fermé de $H^1(\Omega_f)$)

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega_f) \text{ tel que } \int_{\Omega_f} v(x)\, dx = 0 \right\}.$$

On multiplie l'équation par une fonction test $v \in V$ et on utilise la condition aux limites dans l'intégration par parties pour obtenir la formulation variationnelle : trouver $\phi_k \in V$ tel que

$$a(\phi_k, v) = L(v) \quad \forall\, v \in V,$$

avec

$$a(\phi_k, v) = \int_{\Omega_f} \nabla\phi_k \cdot \nabla v \, dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Gamma \vec{e}_k \cdot \vec{n}\, v\, ds.$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution on applique le théorème de Lax-Milgram dont il faut vérifier les hypothèses. Il est clair que L est linéaire continue (par le théorème de trace) et a bilinéaire continue sur V muni de la norme usuelle de $H^1(\Omega_f)$. Pour vérifier la coercivité de a on utilise l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (équation (5.28) du cours) qui affirme qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in V$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega_f)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_f)^N}.$$

On en déduit

$$a(v, v) = \int_{\Omega_f} |\nabla v|^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_f} \left(|\nabla v|^2 + C^{-2}|v|^2\right) dx \geq C'\|v\|^2_{H^1(\Omega_f)},$$

ce qui prouve la coercivité de a. Par conséquent il existe une unique solution de cette formulation variationnelle. Pour montrer que cette solution est bien solution du problème aux limites, on procède à une intégration par parties "à l'envers". En supposant que $\phi_k \in H^2(\Omega_f)$ on utilise la formule de Green du théorème 4.3.30 pour obtenir

$$-\int_{\Omega_f} \Delta\phi_k\, v\, dx + \int_{\partial\Omega_f} \frac{\partial\phi_k}{\partial n} v\, ds = \int_\Gamma \vec{e}_k \cdot \vec{n}\, v\, ds,$$

qui est équivalent à

$$-\int_{\Omega_f} \Delta\phi_k\, v\, dx = \int_\Gamma \left(\vec{e}_k \cdot \vec{n} - \frac{\partial\phi_k}{\partial n}\right) v\, ds - \int_{\Gamma_{ext}} \frac{\partial\phi_k}{\partial n} v\, ds.$$

L'espace $C_c^\infty(\Omega_f)$ n'est pas inclus dans V à cause de la condition de moyenne nulle pour les fonctions de V. Cependant, si $\psi \in C_c^\infty(\Omega_f)$, alors $\psi - m(\psi)$ apartient à V, avec $m(\psi) = \frac{1}{|\Omega_f|}\int_{\Omega_f} \psi dx$. En remplaçant v par $\psi - m(\psi)$, et en utilisant le fait que $\psi = 0$ sur $\partial\Omega_f$, on obtient

$$-\int_{\Omega_f} \Delta\phi_k(\psi - m(\psi))\, dx = -m(\psi)\int_\Gamma \left(\vec{e}_k \cdot \vec{n} - \frac{\partial\phi_k}{\partial n}\right) ds + m(psi)\int_{\Gamma_{ext}} \frac{\partial\phi_k}{\partial n} ds.$$

En utilisant le résultat de la première question et en se rappelant que

$$\int_{\Omega_f} \Delta\phi_k\, dx = \int_{\partial\Omega_f} \frac{\partial\phi_k}{\partial n} ds,$$

on en déduit que tous les termes de bord s'éliminent et qu'il ne reste plus que

$$-\int_{\Omega_f} \Delta\phi_k\psi\, dx = 0 \quad \forall\psi \in C_c^\infty(\Omega_f).$$

Par conséquent, $\Delta\phi_k = 0$ presque partout dans Ω_f. En utilisant cette information on a donc

$$\int_\Gamma \left(\vec{e}_k \cdot \vec{n} - \frac{\partial \phi_k}{\partial n}\right) v\, ds - \int_{\Gamma_{ext}} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} v\, ds = 0 \quad \forall v \in V.$$

On choisit alors $v = \psi - m(\psi)$ avec $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}_f)$ (fonction régulière qui ne s'annulle pas au bord). Le même raisonnement que précédemment montrer que les termes en facteur de $m(\psi)$ s'éliminent et qu'il ne reste plus que

$$\int_\Gamma \left(\vec{e}_k \cdot \vec{n} - \frac{\partial \phi_k}{\partial n}\right) \psi\, ds - \int_{\Gamma_{ext}} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \psi\, ds = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\overline{\Omega}_f).$$

On en déduit donc

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial n} = \vec{e}_k \cdot \vec{n} \quad \text{p.p. sur } \Gamma, \qquad \frac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_{ext}.$$

On a donc bien résolu le problème aux limites, au sens faible ou presque partout.

3. Si on élimine la vitesse $\vec{u}$ on obtient le système suivant pour le potentiel ϕ

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_f, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le second membre de la condition aux limites pour ce système s'écrit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{n} = \sum_{k=1}^N \frac{dr_k}{dt} \vec{e_k} \cdot \vec{n},$$

où r_k désigne la k-ème composante du vecteur $\vec{r}$. Par linéarité de l'équation on en déduit

$$\phi(t,x) = \sum_{k=1}^N \frac{dr_k}{dt}(t)\phi_k(x).$$

4. On déduit de la question précédente que la pression est donnée par

$$p(t,x) = p_0 - \sum_{k=1}^N \frac{d^2 r_k}{dt^2}(t)\phi_k(x).$$

En remplaçant la pression par cette expression dans l'équation pour $\vec{r}$ et en se souvenant que la première question a montré que $\int_\Gamma p_0 \vec{n}\, ds = 0$, on obtient

$$\begin{cases} (m\mathrm{Id} + M)\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + k\vec{r} = \vec{f} \quad \text{pour } t > 0, \\ \vec{r}(0) = \vec{r}^0, \ \dfrac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{r}^1, \end{cases}$$

où la matrice M est définie par

$$M\vec{e}_k = \int_\Gamma \phi_k \vec{n}\, ds$$

5. Multiplions l'équation pour ϕ_j par ϕ_k et intégrons par parties. On obtient

$$\int_{\Omega_f} \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_k\, dx = \int_\Gamma \vec{e}_j \cdot \vec{n}\, \phi_k\, ds.$$

On en déduit que

$$M\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \int_\Gamma \vec{e}_j \cdot \vec{n}\, \phi_k\, ds = \int_{\Omega_f} \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_k\, dx.$$

Par conséquent la matrice M est symétrique. De plus, elle est définie positive car pour tout vecteur $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^N$ non nul on a

$$M\vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \sum_{j,k=1}^{N} \xi_j \xi_k \int_{\Omega_f} \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_k\, dx = \int_{\Omega_f} \nabla\phi_\xi \cdot \nabla\phi_\xi\, dx > 0$$

car $\phi_\xi = \sum_{k=1}^N \xi_k \phi_k$ est non constant, étant solution dans V de

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\xi = 0 & \text{dans } \Omega_f, \\ \dfrac{\partial\phi_\xi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{ext}, \\ \dfrac{\partial\phi_\xi}{\partial n} = \vec{\xi} \cdot \vec{n} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

qui ne peut pas avoir de solution constante puisque $\vec{\xi} \neq 0$.