Ecole Polytechnique, Promotion 2006
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 15 avril 2008

Corrigé proposé par G. Allaire

1 Différences finies

1. Comme les coefficients α, β, γ sont indépendants de $\Delta t, \Delta x, \nu$ et que le terme

$$\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

est consistant avec $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, l'autre terme

$$\frac{\alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n + \gamma u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

doit être consistant avec $\frac{\partial u}{\partial t}$. Un simple dévelopement de Taylor en remplaçant u_j^n par $u(t^n, x_j)$, avec u fonction régulière, conduit aux conditions suivantes pour la consistance

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha - \gamma = 1.$$

On en déduit

$$\alpha = 1 + \gamma \quad \text{et} \quad \beta = -(1 + 2\gamma).$$

Si $\gamma = -1/2$ on a $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$: on retrouve ainsi le schéma centré de Richardson dont le cours dit qu'il est inconditionnellement instable.

Si $\gamma = -1$ on a $\alpha = 0$ et $\beta = 1$: on retrouve ainsi le schéma implicite dont le cours dit qu'il est inconditionnellement stable.

2. On pose $c = \nu \Delta t/(\Delta x)^2$ et on réécrit le schéma sous la forme

$$(1 + \gamma)u_j^{n+1} = (1 + 2\gamma - 2c)u_j^n - \gamma u_j^{n-1} + c(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n).$$

Comme $\gamma \leq 0$ et $(1+\gamma) > 0$ il s'agit d'une combinaison convexe dès que $(1+2\gamma-2c) \geq 0$. Autrement dit le schéma vérifie le principe du maximum discret et est donc stable en norme L^∞ sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{(1 + 2\gamma)(\Delta x)^2}{2\nu}$$

qui ne peut avoir lieu que si $\gamma > -1/2$.

Comme le schéma est linéaire, consistant et stable, il converge d'après le théorème de Lax.

3. On utilise l'analyse de Fourier pour étudier la stabilité L^2 du schéma. Suivant les notations du polycopié, pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{u}^n(k)$ le coefficient de Fourier de la solution discrète du schéma et, comme le schéma est à 3 niveaux, on introduit le vecteur

$$\hat{U}^n(k) = \begin{pmatrix} \hat{u}^{n+1}(k) \\ \hat{u}^n(k) \end{pmatrix}.$$

La solution du schéma vérifie donc

$$\hat{U}^n(k) = A(k)\hat{U}^{n-1}(k)$$

où $A(k)$ est la matrice 2×2 définie par

$$A(k) = \begin{pmatrix} (1 + 2\gamma - 4c\sin^2(\pi k\Delta x))/(1+\gamma) & -\gamma/(1+\gamma) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car

$$(1 + 2\gamma - 2c)\hat{u}^n + c(e^{-2i\pi k\Delta x} + e^{2i\pi k\Delta x})\hat{u}^n = (1 + 2\gamma - 4c\sin^2(\pi k\Delta x))\hat{u}^n.$$

La condition nécessaire de stabilité de Von Neumann est que les deux valeurs propres $\lambda^{\pm}(k)$ de $A(k)$ vérifient

$$|\lambda^{\pm}(k)| \leq 1.$$

En notant $s = \sin(\pi k\Delta x)$ le polynôme charactéristique de $A(k)$ est

$$(1+\gamma)\lambda^2 - (1 + 2\gamma - 4cs^2)\lambda + \gamma = 0.$$

Le produit des racines est

$$\lambda^-(k)\lambda^+(k) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

qui vérifie $\frac{\gamma}{1+\gamma} > 1$ lorsque $\gamma < -1$, et $\frac{\gamma}{1+\gamma} < -1$ lorsque $-1 < \gamma < -1/2$.

On en déduit que nécessairement au moins une des deux valeurs propres a un module strictement plus grand que 1, donc le schéma est instable.

4. Si $\gamma \geq 0$, le produit des racines est $\lambda^-(k)\lambda^+(k) = \frac{\gamma}{1+\gamma} < 1$. Le discrimant du polynôme charactéristique est

$$\delta = (1 + 2\gamma - 4cs^2)^2 - 4\gamma(1+\gamma).$$

Quand $\delta < 0$ les deux valeurs propres sont complexes conjuguées de module $\sqrt{\gamma/(1+\gamma)} < 1$, donc la condition de Von Neumann est vérifiée. Quand $\delta \geq 0$ les deux valeurs propres sont réelles égales à

$$\lambda^{\pm}(k) = \frac{1 + 2\gamma - 4cs^2 \pm \sqrt{\delta}}{2(1+\gamma)}$$

avec $\lambda^-(k) \leq \lambda^+(k)$. La condition de Von Neumann est vérifiée si et seulement si

$$-1 \leq \lambda^-(k) \leq \lambda^+(k) \leq 1.$$

L'inégalité $\lambda^+(k) \leq 1$ est équivalente à

$$\sqrt{\delta} \leq 1 + 4cs^2 \quad \Leftrightarrow \quad -4(1+\gamma)cs^2 \leq 0$$

qui est toujours vraie. L'autre inégalité $-1 \leq \lambda^-(k)$ est équivalente à

$$\sqrt{\delta} \leq 3 + 4\gamma - 4cs^2. \tag{1}$$

Il faut donc déjà que le terme de droite dans (1) soit positif. Si c'est le cas, alors l'inégalité (1), élevée au carré, est équivalente à

$$1 + 2\gamma - 2cs^2 \geq 0. \tag{2}$$

Cette dernière inégalité (2) est plus restrictive que la précédente (1) et est donc celle qu'il faut retenir. Sachant qu'en variant k et Δx, s peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[-1; +1]$, l'inégalité (2) est vérifiée pour tout k et Δx si et seulement si la condition CFL suivante est vérifiée

$$\Delta t \leq \frac{(1 + 2\gamma)(\Delta x)^2}{2\nu}. \tag{3}$$

Autrement dit, sous la condition CFL (3) la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann est satisfaite.

2 Formulation variationnelle

1. Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + \chi u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Pour obtenir une formulation variationnelle de (4) on multiplie l'équation par une fonction test v quelconque, et on intègre par parties. On obtient

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + \chi uv \Big) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_\Omega f v \, dx. \tag{5}$$

A cause de la condition aux limites de Neumann le terme de bord s'annule. Par ailleurs, pour que tous les termes dans (5) aient un sens on choisit $H^1(\Omega)$ comme espace de Hilbert. Finalement, la formulation variationnelle proposée est : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + \chi uv \Big) dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{6}$$

2. On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 3.3.1. On définit une forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

et une forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + \chi uv \Big) dx$$

qui sont clairement continues par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les intégrales. Vérifions maintenant la coercivité de la forme bilinéaire. On a

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\omega v^2 dx.$$

Or, l'énoncé affirme l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega v^2(x)\, dx \le C \left(\int_\omega v^2(x)\, dx + \int_\Omega |\nabla v|^2(x)\, dx \right) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{7}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} a(v,v) &\ge \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\omega v^2 dx + \frac{1}{2C} \int_\Omega v^2(x)\, dx \\ &\ge \nu \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

avec $\nu = \min(1/2, 1/2C)$. Ainsi, il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (6).

3. Vérifions maintenant que cette solution de la formulation variationnelle est bien une solution du problème (4). Pour cela on admet que $u \in H^2(\Omega)$. On utilise la formule de Green (4.22) qui implique que (6) est équivalent à

$$\int_\Omega (-\Delta u + \chi u - f)\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds = 0. \tag{8}$$

On choisit tout d'abord v quelconque dans $C_c^\infty(\Omega)$, on en déduit par application du Corollaire 4.2.2 que

$$-\Delta u(x) + \chi u = f(x)$$

comme fonctions de $L^2(\Omega)$, ce qui implique que cette égalité a lieu presque partout dans Ω.

En tenant compte de cette information, (8) devient

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds = 0.$$

On choisit maintenant v quelconque dans $C^\infty(\overline{\Omega})$. Par conséquent une variante du Corollaire 4.2.2, adaptée au bord $\partial\Omega$, implique que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

comme fonction de $L^2(\partial\Omega)$ à cause du théorème de trace 4.3.13, ce qui implique que la condition aux limites de Neumann a lieu presque partout dans $\partial\Omega$. On a donc bien retrouvé le système (4) au sens "presque partout".

4. Pour $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times]0;1[$ on a

$$v(x', x_N) = v(x', x_N - 1) + \int_{x_N - 1}^{x_N} \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', t)\, dt$$

qui, en élevant au carrée et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donne

$$v^2(x', x_N) \leq 2 \left(v^2(x', x_N - 1) + \int_{x_N-1}^{x_N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right|^2 (x', t)\, dt \right)$$

$$\leq 2 \left(v^2(x', x_N - 1) + \int_{-1}^{+1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right|^2 (x', t)\, dt \right).$$

On intègre en x_N et x' pour obtenir

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v^2 dx'\, dx_N \leq 2 \left(\int_{-1}^0 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v^2 dx'\, dx_n + \int_{-1}^{+1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right|^2 (x', t)\, dx'\, dt \right)$$

qui est l'inégalté désirée.

5. On suppose que l'inégalité (7) est fausse. Autrement dit, pour toute constante C, par exemple $C = n \in \mathbb{N}$, il existe au moins une fonction $v_n \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega v_n^2\, dx > n \left(\int_\omega v_n^2\, dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^2\, dx \right).$$

Quitte à multiplier chaque fonction v_n (qui est non nulle) par une constante adéquate, on peut supposer que

$$\int_\Omega v_n^2\, dx = 1$$

et on a donc

$$\int_\omega v_n^2\, dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^2\, dx < \frac{1}{n}.$$

On en déduit que, lorsque n tend vers l'infini, la suite v_n tend vers 0 dans $L^2(\omega)$ et que la suite ∇v_n tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^N$. En particul,ier, la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$ et, par application du théorème 4.3.21 de Rellich, il existe une sous-suite $v_{n'}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$. Sa limite ne peut être qu'une constante puisque $\nabla v_{n'}$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^N$, et cette constante ne peut qu'être nulle puisque $v_{n'}$ tend vers 0 dans $L^2(\omega)$. Ceci est une contradiction avec le fait que la norme dans $L^2(\Omega)$ de $v_{n'}$ est égale à 1. L'inégalité (7) est donc vraie.

6. Pour $\epsilon > 0$ on considère

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \chi u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

La formulation variationnelle de (9) pour la fonction test $v = u_\epsilon$ donne

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_\omega u_\epsilon^2 dx = \int_\Omega f u_\epsilon dx \tag{10}$$

que l'on majore par Cauchy-Schwarz puis par l'inégalité (7)

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\|u_\epsilon\|_{L^2(\omega)} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \right).$$

Lorsque ϵ tend vers 0, on a $1 < \frac{1}{\epsilon}$, donc

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\omega)}+\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \le \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\|u_\epsilon\|_{L^2(\omega)}+\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\epsilon}\|u_\epsilon\|^2_{L^2(\omega)} + \|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)^N}}.$$

Au total on en déduit que (10) conduit à la majoration

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx + \frac{1}{\epsilon}\int_\omega u_\epsilon^2 dx \le C\|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

qui implique en particulier

$$\int_\omega u_\epsilon^2 dx \le C\epsilon\|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

c'est-à-dire que u_ϵ tends vers 0 dans $L^2(\omega)$. (Interprétation : l'absorption est si forte dans ω que l'inconnue y devient nulle.)