Ecole Polytechnique, Promotion 2008
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 13 avril 2010
Corrigé proposé par G. Allaire

1 Différences finies

1. On étudie la stabilité L^∞ du schéma en utilisant le principe du maximum discret. En effet, on peut récrire le schéma sous la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{\lambda}{1+2\lambda} u_{j-1}^n + \frac{1}{1+2\lambda} u_j^n + \frac{\lambda}{1+2\lambda} u_{j+1}^n,$$

avec $\lambda = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} > 0$. Autrement dit, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de valeurs au temps précédent t_n. On sait alors, par une récurrence immédiate (voir le polycopié), que le schéma vérifie le principe du maximum discret, donc est inconditionnellement stable L^∞.

2. On calcule l'erreur de troncature du schéma

$$E = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + \nu \frac{-u(t_n, x_{j+1}) + 2u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_{j-1})}{(\Delta x)^2}$$

où $u(t,x)$ est une fonction régulière. En faisant un développement de Taylor autour du point (t_n, x_j), on trouve

$$E = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) + \frac{2\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Si u est solution de l'équation de la chaleur, alors on obtient

$$E = \frac{2\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\Delta t + (\Delta x)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Remarquons qu'il n'y a pas moyen d'éliminer le terme restant en $\frac{\partial u}{\partial t}$ car les termes suivants dans le développement de Taylor contiennent des dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 en t et supérieur ou égal à 4 en x.

Par conséquent le schéma n'est pas consistant **sauf** si on impose la condition suivante

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0. \tag{1}$$

3. Un schéma linéaire à deux niveaux stable et consistant est convergent par le théorème de Lax. Par conséquent le schéma est convergent si et seulement si la condition (1) est satisfaite. Cette condition est évidemment **très** restrictive puisqu'elle est beaucoup plus exigeante qu'une simple condition CFL pour l'équation de la chaleur.

Ainsi, même si le schéma a l'avantage d'être inconditionnellement stable, il est complètement inefficace à cause de la condition (1) qui impose des pas de temps trop petits. Par comparaison le schéma explicite est lui aussi stable sous une condition CFL beaucoup moins stricte et est inconditionnellement consistant.

2 Formulation variationnelle

1. Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} -k_1 \Delta u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ -k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = \alpha(u_1 - u_2) & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

où u_2 est supposé connu dans $L^2(\Gamma)$. Pour obtenir une formulation variationnelle de (2) on multiplie l'équation par une fonction test v_1 quelconque, s'annulant sur le bord $\partial\Omega$, et on intègre par parties. On obtient

$$\int_{\Omega_1} k_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_1 v_1 \, ds = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_2 v_1 \, ds. \tag{3}$$

Par ailleurs, pour que tous les termes dans (3) aient un sens on choisit l'espace de Hilbert

$$V_1 = \{v \in H^1(\Omega_1) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Finalement, la formulation variationnelle proposée est : trouver $u_1 \in V_1$ tel que

$$\int_{\Omega_1} k_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_1 v_1 \, ds = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_2 v_1 \, ds \quad \forall\, v_1 \in V_1. \tag{4}$$

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 3.3.1. On définit une forme linéaire

$$L_1(v) = \int_{\Omega_1} f_1 v \, dx + \alpha \int_\Gamma u_2 v \, ds$$

et une forme bilinéaire

$$a_1(u_1, v) = \int_{\Omega_1} k_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_\Gamma u_1 v \, ds$$

qui sont clairement continues par application du théorème de trace sur Γ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les intégrales. Vérifions maintenant la coercivité de la forme bilinéaire. On a

$$a_1(v, v) = \int_{\Omega_1} k_1 |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Gamma v^2 \, ds \geq k_1 \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_1)^N} \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

pour toute fonction $v \in V_1$ à cause de l'inégalité de Poincaré (valide car v s'annule sur le bord extérieur $\partial\Omega$). Ainsi, il existe une unique solution $u_1 \in V_1$ de la formulation variationnelle (4).

Vérifions maintenant que cette solution de la formulation variationnelle est bien une solution du problème (2). Pour cela on admet que $u_1 \in H^2(\Omega_1)$. On utilise la formule de Green (4.22) qui implique que, pour $v \in V_1$, (4) est équivalent à

$$\int_\Gamma \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha(u_1 - u_2) \right) v \, ds = \int_{\Omega_1} (k_1 \Delta u_1 + f_1) v \, dx. \tag{5}$$

On choisit d'abord v quelconque dans $C_c^\infty(\Omega_1)$ et on en déduit par application du Corollaire 4.2.2 que

$$-k_1\Delta u_1(x) = f_1(x)$$

comme fonctions de $L^2(\Omega_1)$, ce qui implique que cette égalité a lieu presque partout dans Ω_1. On réinjecte cette nouvelle information dans (5) pour obtenir

$$\int_\Gamma \left(k_1\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha(u_1 - u_2)\right) v\, ds = 0.$$

On choisit maintenant v quelconque dans $C^\infty(\overline{\Omega_1}) \cap V_1$. Par conséquent une variante du Corollaire 4.2.2, adaptée au bord Γ, implique que

$$k_1\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha(u_1 - u_2) = 0$$

comme fonction de $L^2(\Gamma)$ à cause du théorème de trace 4.3.13, ce qui implique que la condition aux limites a lieu presque partout dans Γ. La condition aux limites de Dirichlet sur $\partial\Omega$ se retrouve, à cause du théorème de trace 4.3.13, puisque $u_1 \in V_1$. On a donc bien retrouvé le système (2) au sens "presque partout".

2. Supposons qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega_2)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)^N} + \|v\|_{L^2(\Gamma)}\right).$$

Cela veut dire qu'il existe une suite $v_n \in H^1(\Omega_2)$ telle que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega_2)} > n\left(\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_2)^N} + \|v_n\|_{L^2(\Gamma)}\right).$$

Quitte à diviser v_n par sa norme dans $L^2(\Omega_2)$ on peut supposer que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega_2)} = 1 > n\left(\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_2)^N} + \|v_n\|_{L^2(\Gamma)}\right). \tag{6}$$

En particulier, (6) implique que la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega_2)$. Par application du Théorème de Rellich 4.3.21, il existe une sous-suite $v_{n'}$ qui converge dans $L^2(\Omega_2)$. De plus, (6) montre que la suite $\nabla v_{n'}$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega_2)$ (composante par composante). Par conséquent, $v_{n'}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega_2)$, qui est un espace de Hilbert, donc elle converge dans $H^1(\Omega_2)$ vers une limite v. Comme on a

$$\int_{\Omega_2} |\nabla v(x)|^2 dx = \lim_{n'\to+\infty}\int_{\Omega_2} |\nabla v_{n'}(x)|^2 dx \leq \lim_{n'\to+\infty}\frac{1}{n'} = 0,$$

on en déduit que v est une constant dans Ω_2 qui est connexe. Par ailleurs, en vertu du théorème de trace, on a

$$\int_\Gamma v^2 ds = \lim_{n'\to+\infty}\int_\Gamma |v_{n'}|^2 ds \leq \lim_{n'\to+\infty}\frac{1}{n'} = 0,$$

ce qui implique que la constante égale à v doit être nulle. Mais on a aussi

$$\int_{\Omega_2} |v(x)|^2 dx = \lim_{n'\to+\infty}\int_{\Omega_2} |v_{n'}(x)|^2 dx = 1,$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $v = 0$.

3. Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} -k_2 \Delta u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ -k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = \alpha(u_2 - u_1) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{7}$$

où u_1 est supposé connu dans $L^2(\Gamma)$. Pour obtenir une formulation variationnelle de (3) on multiplie l'équation par une fonction test v_2 quelconque et on intègre par parties. On obtient

$$\int_{\Omega_2} k_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_2 v_2 \, ds = \int_{\Omega_2} f_2 v_2 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_1 v_2 \, ds. \tag{8}$$

Par ailleurs, pour que tous les termes dans (8) aient un sens on choisit l'espace de Hilbert $V_2 = H^1(\Omega_2)$. Finalement, la formulation variationnelle proposée est : trouver $u_2 \in V_2$ tel que

$$\int_{\Omega_2} k_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_2 v_2 \, ds = \int_{\Omega_2} f_2 v_2 \, dx + \alpha \int_\Gamma u_1 v_2 \, ds \quad \forall \, v_2 \in V_2. \tag{9}$$

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 3.3.1. On définit une forme linéaire

$$L_2(v) = \int_{\Omega_2} f_2 v \, dx + \alpha \int_\Gamma u_1 v \, ds$$

et une forme bilinéaire

$$a_2(u_2, v) = \int_{\Omega_2} k_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_\Gamma u_2 v \, ds$$

qui sont clairement continues par application du théorème de trace sur Γ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les intégrales. Vérifions maintenant la coercivité de la forme bilinéaire. On a

$$a_2(v, v) = \int_{\Omega_2} k_2 |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Gamma v^2 \, ds \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega_2)}$$

grâce à l'inégalité de la question précédente. Ainsi, il existe une unique solution $u_2 \in V_2$ de la formulation variationnelle (9).

On peut bien sûr vérifier que cette solution de la formulation variationnelle est bien une solution du problème (7) mais cela n'est pas demandé...

4. Pour obtenir une formulation variationnelle du système couplé (2)-(7) on additionne les formulations variationnelles (4) et (9), ce qui donne : trouver $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ tel que

$$a\Big((u_1, u_2), (v_1, v_2)\Big) = L(v_1, v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \tag{10}$$

avec la forme linéaire

$$L(v_1, v_2) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 \, dx + \int_{\Omega_2} f_2 v_2 \, dx$$

et la forme bilinéaire

$$a\Big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\Big) = \int_{\Omega_1} k_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \int_{\Omega_2} k_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + \alpha \int_\Gamma (u_1 - u_2)(v_1 - v_2)\, ds.$$

Attention ! Ni L, ni a, ne sont la somme de L_1 et L_2, respectivement de a_1 et a_2. Par ailleurs, si on définit u dans Ω comme étant égale à u_1 dans Ω_1 et à u_2 dans Ω_2, cette fonction u n'appartient pas à $H^1(\Omega)$ car elle est discontinue à travers Γ puisqu'en général $u_1 \neq u_2$ sur Γ. Il faut alors choisir de même la fonction test (v_1, v_2) qui doit être discontinue à travers Γ.

On munit l'espace de Hilbert $V_1 \times V_2$ du produit scalaire de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, c'est-à-dire

$$\langle (u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle_{H^1(\Omega_1)\times H^1(\Omega_2)} = \int_{\Omega_1} (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_1 v_1)\, dx + \int_{\Omega_2} (\nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + u_2 v_2)\, dx.$$

On peut alors vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. La forme linéaire L et la forme bilinéaire a sont clairement continues. Comme d'habitude la difficulté vient de la coercivité de la forme bilinéaire.

L'indication donnée dans le sujet,

$$(a_1 - a_2)^2 \geq -\epsilon a_1^2 + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} a_2^2 \qquad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

est équivalente à

$$(1+\epsilon)a_1^2 - 2a_1 a_2 + \frac{1}{1+\epsilon} a_2^2 = (1+\epsilon)\left(a_1 - \frac{a_2}{1+\epsilon}\right)^2 \geq 0 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

qui est trivialement vrai pour tout $\epsilon > 0$ (et même $\epsilon > -1$). On utilise cette indication pour minorer l'intégrale sur Γ dans la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a\Big((v_1,v_2),(v_1,v_2)\Big) \geq \quad & \int_{\Omega_1} k_1 |\nabla v_1|^2 dx - \epsilon\alpha \int_\Gamma |v_1|^2 ds \\ & + \int_{\Omega_2} k_2 |\nabla v_2|^2 dx + \frac{\epsilon\alpha}{1+\epsilon} \int_\Gamma |v_2|^2 ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Grâce à l'inégalité de la deuxième question, la seconde ligne de (11) est minorée par

$$C_\epsilon \|v_2\|^2_{H^1(\Omega_2)}$$

où la constante $C_\epsilon > 0$ dépend de $\epsilon > 0$. Pour minorer la première ligne du membre de droite de (11) on utilise l'inégalité de Poincaré (car les fonctions $v_1 \in V_1$ s'annulent sur $\partial\Omega$) et le théorème de trace sur Γ

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} k_1 |\nabla v_1|^2 dx - \epsilon\alpha \int_\Gamma |v_1|^2 ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} k_1 |\nabla v_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} k_1 |\nabla v_1|^2 dx - \epsilon\alpha \int_\Gamma |v_1|^2 ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} k_1 |\nabla v_1|^2 dx + C_1 \int_{\Omega_1} |v_1|^2 dx - \epsilon\alpha C_\Gamma \int_{\Omega_1} \Big(|\nabla v_1|^2 + |v_1|^2\Big)\, dx \\ &\geq C \|v_1\|^2_{H^1(\Omega_1)} \end{aligned}$$

avec $C_1, C_\Gamma, C > 0$ désignant diverses constantes strictement positives si ϵ est suffisamment petit. Ceci prouve la coercivité de a et donc l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (10).

5. Formellement, lorsque $\alpha \to +\infty$ la forme bilinéaire $a\Big((u_1, u_2), (v_1, v_2)\Big)$ ne reste bornée que si, à la limite on a $u_1 = u_2$ sur Γ. Dans ce cas, si on fait l'intégration par parties "à l'envers" pour retrouver les équations dans Ω_1 et Ω_2, on obtient la condition

$$k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

qui, avec $u_1 = u_2$ sur Γ, constituent les conditions usuelles de transmission à travers une interface "parfaite" (voir polycopié).

Lorsque $\alpha = 0$ les deux problèmes dans Ω_1 et Ω_2 se découplent totalement. Plus précisément, on a

$$a\Big((u_1, u_2), (v_1, v_2)\Big) = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2), \quad L(v_1, v_2) = L_1(v_1) + L_2(v_2),$$

et la formulation variationnelle (10) est équivalente aux deux formulations variationnelles (séparées) (4) et (9). Physiquement, les deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sont isolés l'un de l'autre par une condition de Neumann homogène, synonyme d'absence d'échange thermique. Remarquons d'ailleurs que pour résoudre l'équation dans Ω_2 il faut que le terme source f_2 soit équilibré, c'est-à-dire que $\int_{\Omega_2} f_2 \, dx = 0$ (voir le polycopié).