**Ecole Polytechnique, Promotion 2010**
**Analyse numérique et optimisation (MAP 431)**
**Contrôle Hors Classement du mardi 24 avril 2012**
**Corrigé proposé par G. Allaire et B. Maury**

# 1 Exercice mémoriel (12 points)

1. (2 points) Pour $\phi \in V$, on développe

$$\int_\Omega \int_\Omega |\phi(x) - \phi(x')|^2 \, dx \, dx' = \int_\Omega \int_\Omega (\phi^2(x) + \phi^2(x') - 2\phi(x)\phi(x')) \, dx \, dx'$$

$$= 2|\Omega| \int_\Omega \phi^2(x) \, dx - 2 \left( \int_\Omega \phi(x) \, dx \right)^2$$

où le dernier terme s'annule car $\phi$ est à moyenne nulle.

2. (2 points) On note tout d'abord que, puisque $\Omega$ est convexe, le segment $(x, x')$ appartient bien à $\Omega$ pour tous points $x, x' \in \Omega$. Par Cauchy-Schwarz, on a

$$|\phi(x) - \phi(x')|^2 \leq \int_0^1 |(x - x') \cdot \nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 \, dt$$

$$\leq d(\Omega)^2 \int_0^1 |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 dt.$$

On en déduit

$$\int_\Omega \int_\Omega |\phi(x) - \phi(x')|^2 \, dx \, dx' \leq d(\Omega)^2 \int_\Omega \int_\Omega \left( \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right) |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx'.$$

Par symétrie (échangeant $x$ et $x'$ et $t$ en $(1-t)$), on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \int_0^{1/2} |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx' = \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx',$$

ce qui entraine le résultat.

3. (2 points) Par Fubini on peut échanger l'ordre des intégrales en $t$ et $x$. Pour $t$ fixé dans $[1/2, 1]$, le changement de variable $\tilde{x} = tx + (1-t)x'$ conduit à

$$\int_\Omega |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 \, dx = \frac{1}{t^N} \int_\omega |\nabla\phi(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x}$$

où $\omega = t\Omega + (1-t)x'$ est un sous-ensemble de $\Omega$ (car $\Omega$ est convexe). On peut donc majorer

$$\int_\Omega |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 \, dx \leq 2^N \int_\Omega |\nabla\phi(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x}.$$

4. (2 points) Au total, on a obtenu

$$\int_\Omega \int_\Omega |\phi(x) - \phi(x')|^2 \, dx \, dx' \leq 2^N d(\Omega)^2 2 \int_{1/2}^1 \int_\Omega \int_\Omega |\nabla \phi(x)|^2 dt \, dx \, dx'$$

$$\leq 2^N d(\Omega)^2 |\Omega| \int_\Omega |\nabla \phi(x)|^2 \, dx,$$

ce qui conduit, pour tout $\phi \in V$, à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_\Omega \phi^2(x) \, dx \leq 2^{N-1} d(\Omega)^2 \int_\Omega |\nabla \phi(x)|^2 \, dx.$$

5. (1 point) S'il existe une solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \int_\Omega u(x) \, dx = 0, & \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

en intégrant l'équation sur $\Omega$ on obtient

$$\int_\Omega f(x) \, dx = -\int_\Omega \Delta u(x) \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \, ds = 0$$

qui est donc une condition nécessaire sur $f$.

6. (1 point) La formulation variationnelle est : trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On vérifie aisément toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram : en particulier, la forme bilinéaire est coercive sur $V$ grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Il existe donc une unique solution $u \in V$.

7. (2 points) Remarquons tout d'abord que, si $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $v = \phi - |\Omega|^{-1} \int_\Omega \phi(x) \, dx$ appartient bien à $V$. Comme $f$ est à moyenne nulle, la formulation variationnelle pour $v$ donne

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x) \, dx = \int_\Omega f(x) \, \phi(x) \, dx \quad \text{pour tout } \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Si $u \in V$ est solution (régulière) de la formulation variationnelle, alors, pour $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, par intégration par parties on obtient

$$\int_\Omega \Big( f(x) + \Delta u(x) \Big) \phi(x) \, dx = 0$$

Par conséquent, il vient

$$f(x) + \Delta u(x) = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Enfin, en prenant $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (ne s'annulant pas sur $\partial\Omega$), on obtient

$$\int_\Omega \Big( f(x) + \Delta u(x) \Big) \phi(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \phi(x) \, ds.$$

On sait déjà que le membre de gauche est nul, donc celui de droite aussi et, comme $\phi$ est quelconque sur le bord, on en déduit

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

Par ailleurs, $u \in V$ implique que $u$ est à moyenne nulle. Autrement dit, $u$ est solution de (1) au sens "presque partout".

# 2 Différences finies pour l'équation de Schrödinger (8 points)

1. (2 points)
   L'erreur de troncature s'écrit

$$e_j^n = i\frac{u((n+1)\Delta t, j\Delta x) - u(n\Delta t, j\Delta x)}{\Delta t}$$

$$+\frac{1}{(\Delta x)^2}\theta\left(u((n+1)\Delta t,(j+1)\Delta x) - 2u((n+1)\Delta t, j\Delta x) + u((n+1)\Delta t,(j-1)\Delta x)\right)$$

$$+\frac{1}{(\Delta x)^2}(1-\theta)\theta\left(u(n\Delta t,(j+1)\Delta x) - 2u(n\Delta t, j\Delta x) + u(n\Delta t,(j-1)\Delta x)\right) = 0,$$

   En faisant les développements limités en $\Delta x$ et $\Delta t$, et en utilisant en particulier le fait que, par symétrie du stencil,

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}(u(n\Delta t,(j+1)\Delta x) - 2u(n\Delta t, j\Delta x) + u(n\Delta t,(j-1)\Delta x)) =$$

$$\partial_{xx}(n\Delta t, j\Delta x) + O(\Delta x^2),$$

   on obtient immédiatement

$$e_j^n = O(\Delta t) + O(\Delta x^2).$$

2. (2 points) On a

$$(1 - 4i\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}B)\hat{u}^{n+1}(k) = (1 + 4i(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}B)\hat{u}^n(k),$$

   avec

$$B = \exp(2i\pi k\Delta x) - 2 + \exp(-2i\pi k\Delta x) =$$

$$-4\left(\frac{\exp(i\pi k\Delta x) - \exp(-i\pi k\Delta x)}{2i}\right)^2$$

$$= -4\sin\left(\pi k\Delta x\right)^2,$$

   de telle sorte que

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k),$$

où le coefficient d'amplification s'écrit

$$A(k) = \frac{1 - 4i(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin{(\pi k \Delta x)}^2}{1 + 4i\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin{(\pi k \Delta x)}^2}$$

3. (2 points) Le coefficient d'amplification s'écrit

$$A(k) = \frac{1 - i(1-\theta)b}{1 + i\theta b}$$

où $b$ est un réel non nul en général. Le carré du module de ce coefficient est donc

$$|A(k)|^{\ 2} = \frac{1 + (1-\theta)^2 b^2}{1 + \theta^2 b^2}$$

qui est donc strictement supérieur à 1 pour $\theta \in [0, 1/2]$ (instabilité inconditionnelle), strictement inférieur à 1 pour $\theta \in ]1/2, 1]$ (stabilité inconditionnelle). Pour $\theta = 1/2$ le module vaut 1 indépendamment des paramètres de la discrétisation, on a donc conservation du module de tous les coefficients $\hat{u}(k)$, donc conservation de la norme $L^2$ de la solution discrète.

4. (2 points) Le cas de l'équation de la chaleur peut être retrouvé immédiatement en remarquant que l'équation de Schrödinger divisée par $i$ peut être vue (de façon très formelle) comme l'équation de la chaleur avec coefficient de diffusion imaginaire (égal à $i$). On retrouve immédiatement les coefficients d'amplification pour l'équation de la chaleur en remplaçant $i$ par 1 :

$$A^c(k) = \frac{1 - 4(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin{(\pi k \Delta x)}^2}{1 + 4\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin{(\pi k \Delta x)}^2}$$

On retrouve la stabilité inconditionnelle pour $\theta \geq 1/2$, mais on perd la conservation exacte de la norme $L^2$ pour $\theta = 1/2$.

Pour $\theta \leq 1/2$, on peut perdre la stabilité lorsque le numérateur ci-dessus est plus petit que l'opposé du dénominateur (le coefficient devient alors strictement inférieur à $-1$). On peut s'assurer que cela n'arrive pas si l'on suppose

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{1-2\theta}.$$

On a donc alors stabilité conditionnelle (et non pas instabilité inconditionnelle comme dans le cas Schrödinger).