Ecole Polytechnique - Promotion 2012
Analyse Numérique et Optimisation (MAP 431)
Corrigé du contrôle HC du 16 avril 2014

Problème 1 : différences finies

Question 1. Le schéma est explicite. Pour prendre en compte la condition initiale et les conditions limites, on impose

$$\forall 0 \leq j \leq J+1,\ \forall l \in \mathbb{Z},\ u_{j,l}^0 = u_0(r_j, \theta_l) \quad \text{et} \quad \forall l \in \mathbb{Z},\ \forall 0 \leq n \leq N,\ u_{0,l}^n = 0,\ u_{J+1,l}^n = 0.$$

La condition de périodicité en θ s'écrit

$$\forall (j,l,n) \in |[1,J]| \times \mathbb{Z} \times |[0,N]| \quad u_{j,l+L}^n = u_{j,l}^n.$$

La solution approchée à l'instant t_n est donc complètement caractérisée par les $J \times L$ valeurs $u_{j,l}^n$ pour $1 \leq j \leq J$ et $0 \leq l \leq L-1$ (par exemple).

Question 2. Le schéma est consistant, d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Question 3. On peut récrire le schéma (3) à l'aide des fonctions $u_j^n(\theta)$ sous la forme

$$\frac{u_j^{n+1}(\theta) - u_j^n(\theta)}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n(\theta) - 2u_j^n(\theta) + u_{j-1}^n(\theta)}{\Delta r^2} + \frac{u_{j+1}^n(\theta) - u_{j-1}^n(\theta)}{2r_j \Delta r} + \frac{u_j^n(\theta + \Delta\theta) - 2u_j^n(\theta) + u_j^n(\theta + \Delta\theta)}{r_j^2 \Delta\theta^2}.$$

En passant en représentation de Fourier pour la variable θ, on obtient

$$\frac{\widehat{u}_{j,k}^{n+1} - \widehat{u}_{j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\widehat{u}_{j+1,k}^n - 2\widehat{u}_{j,k}^n + \widehat{u}_{j-1,k}^n}{\Delta r^2} + \frac{\widehat{u}_{j+1,k}^n - \widehat{u}_{j-1,k}^n}{2r_j \Delta r} + \frac{e^{ik\Delta\theta} - 2 + e^{-ik\Delta\theta}}{r_j^2 \Delta\theta^2} \widehat{u}_{j,k}^n.$$

En remarquant que $e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha} = -4\sin^2(\alpha/2)$, il vient

$$M_k = I - \frac{\Delta t}{\Delta r^2} A + \frac{\Delta t}{2\Delta r} B - \frac{4\Delta t}{\Delta\theta^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta\theta}{2}\right) C,$$

où la matrice A est la matrice tridiagonale symétrique telle que $A_{jj} = 2$ et $A_{j,j+1} = A_{j,j-1} = -1$, où la matrice B est la matrice tridiagonale telle que $B_{jj} = 0$, $B_{j,j+1} = r_j^{-1}$ et $B_{j,j-1} = -r_j^{-1}$, et où C est la matrice diagonale telle que $C_{jj} = r_j^{-2}$.

Question 4. Si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\|M_k\|_2 \leq 1$, on a pour tout $0 \leq n \leq N$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\|\widehat{U}_k^n\| \leq \|\widehat{U}_k^0\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^J$. Il en résulte que pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^J \Delta r \sum_{l=0}^{L-1} \Delta\theta |u_{j,l}^n|^2 &= \sum_{j=1}^J \Delta r \int_0^{2\pi} |u_j^n(\theta)|^2 \, d\theta = \sum_{j=1}^J \Delta r \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}_{j,k}^n|^2 = \Delta r \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\widehat{U}_k^n\|^2 \\
&\leq \Delta r \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\widehat{U}_k^0\|^2 = \sum_{j=1}^J \Delta r \sum_{l=0}^{L-1} \Delta\theta |u_{j,l}^0|^2 = \sum_{j=1}^J \Delta r \sum_{l=0}^{L-1} \Delta\theta |u_0(r_j, \theta_l)|^2.
\end{aligned}$$

Cette inégalité assure que le schéma est stable en ce sens que la quantité $\sum_{j=1}^{J} \Delta r \sum_{l=0}^{L-1} \Delta\theta |u_{j,l}^n|^2$, qui est une approximation de l'intégrale $\int_a^b \int_0^{2\pi} |u(r,\theta,t_n)|^2 \, d\theta \, dr$, reste bornée au cours du temps. Notons que $v \mapsto \|v\| := \left(\int_1^2 \int_0^{2\pi} |v(r,\theta)|^2 \, d\theta \, dr \right)^{1/2}$ définit une norme sur $L^2(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle : $\forall v \in L^2(\Omega),\ \frac{1}{2}\|v\|_{L^2} \le \|v\| \le \|v\|_{L^2}$.

Problème 2 : espaces de Sobolev et formulations variationnelles

Question 1. On a

$$\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_1^2 r \int_0^{2\pi} |\nabla\phi(r,\theta)|^2 \, d\theta \, dr = \int_1^2 r \int_0^{2\pi} \left(\left|\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta)\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta)\right|^2 \right) d\theta \, dr.$$

En dérivant la série de Fourier sous le signe somme (ceci est parfaitement licite pour des fonctions de classe C^∞), on obtient

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k'(r) e_k(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\phi_k(r)e_k(\theta),$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta)\right|^2 d\theta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\phi_k'(r)|^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta)\right|^2 d\theta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|\phi_k(r)|^2.$$

Finalement, $$\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_1^2 \left(r|\phi_k'(r)|^2 + k^2 r^{-1}|\phi_k(r)|^2 \right) dr.$$

Question 2. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour tout $r \in [1,2]$,

$$|f(r)| = \left| \int_1^2 f'(t)\, dt \right| \le \left(\int_1^r 1 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_1^r |f'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \le \left(\int_1^2 |f'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

En élevant au carré les deux membres de l'inégalité ci-dessus, puis en multipliant par r et en intégrant sur $[1,2]$, on obtient

$$\int_1^2 r|f(r)|^2 \, dr \le \left(\int_1^2 r \, dr \right) \left(\int_1^2 |f'(t)|^2 \, dt \right) \le \frac{3}{2} \int_1^2 t|f'(t)|^2 \, dt.$$

Soit $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$. Comme $\phi(1,\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction ϕ_k vérifie pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi_k \in C^\infty([1,2],\mathbb{C}) \subset C^1([1,2],\mathbb{C})$ et $\phi_k(1) = 0$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_1^2 r|\phi_k(r)|^2 \le \frac{3}{2} \int_1^2 r|\phi_k'(r)|^2 \, dr.$$

On en déduit que

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_1^2 r|\phi_k(r)|^2 \, dr \le \frac{3}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_1^2 r|\phi_k'(r)|^2 \, dr \le \frac{3}{2} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On obtient ainsi

$$\forall\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V, \quad \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

avec $C_\Omega = \sqrt{3/2}$. On déduit de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ dans V (muni de la norme $H^1(\Omega)$) et de la continuité des fonctions $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \|v\|_{L^2(\Omega)} \in \mathbb{R}$ et $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \in \mathbb{R}$ que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Question 3. La fonction $u_0(r,\theta) = \ln(r)/\ln(2)$ est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ et vaut 0 sur Γ_1. Elle est donc dans V. En outre $u_0 = 1$ sur Γ_2 et

$$-\Delta u_0(r,\theta) = -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\ln(2)}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\ln(2)}{r} - 0 = 0.$$

Donc u_0 est solution de (4). Soit u une solution de (4) et $w = u - u_0$. La fonction w est solution du problème

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } w \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta w = 0 \text{ au sens faible dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On sait (cf. poly Section 5.2.1) que ce problème admet la fonction nulle comme unique solution. Donc $u = u_0$, ce qui prouve que u_0 est l'unique solution de (4).

Question 4. Pour $k = 1, 2$, on note L_k l'application linéaire qui à une fonction $u \in H^1(\Omega)$ associe $u|_{\Gamma_k}$. D'après le théorème de trace, L_k est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_k)$. Comme $V = \mathrm{Ker}(L_1)$, l'espace V, muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, est un espace de Hilbert. Pour tout $v \in V$, on pose $\|v\|_V = \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Soit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_2} uv \quad \text{ et } \quad b(v) = \int_\Omega fv.$$

En utilisant la continuité de L_2, on obtient

$$\forall (u,v) \in V \times V, \quad |a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|L_2(u)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|L_2(v)\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq (1+C^2)\|u\|_V \|v\|_V.$$

On déduit par ailleurs de l'inégalité de Poincaré établie à la question 2 que

$$\forall u \in V, \quad a(u,u) \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq (1 + C_\Omega^2)^{-1} \|u\|_V^2.$$

La forme bilinéaire (symétrique) a est donc continue et coercive sur V. Comme $f \in L^2(\Omega)$, la forme bilinéaire b est continue sur V. Il résulte du théorème de Lax-Milgram que le problème (5) est donc bien posé. Ce problème est une formulation variationnelle du problème aux limites avec condition au bord de Dirichlet sur Γ_1 et condition au bord de Fourier sur Γ_2, consistant à chercher $u \in H^2(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$ au sens faible dans Ω, $u = 0$ sur Γ_1, et $\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0$ sur Γ_2.

Question 5. On reconnaît dans (6) une formulation variationnelle du problème linéaire elliptique avec condition au bord de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f_\alpha \text{ au sens faible dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

On sait (Théorème 5.2.18 du poly) que ce problème admet une solution si et seulement si $\int_\Omega f_\alpha = 0$. Or

$$\int_\Omega f_\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^2 r(\alpha r + 1)\, dr = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -9/14.$$

Le problème (6) admet donc une solution u_0 si et seulement si $\alpha = -9/14$ et l'ensemble des solutions de (6) est alors composé des fonctions de la forme $u_0 + C$ où C est une constante réelle. La solution est donc unique à une constante additive près, mais n'est pas unique *stricto sensu*.