ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2009
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)

Correction de l'examen classant du lundi 27 juin 2011
Durée : 4 heures

Sujet proposé par A. Chambolle et H. Haddar

Problème 1 : Un problème de transmission intérieur (Copies blanches, noté sur 10)

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$. On note par $\partial\Omega$ sa frontière et par n la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω. On s'intéresse à la résolution du problème couplé suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(k_1 \nabla u_1) + \alpha_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\mathrm{div}(k_2 \nabla u_2) + \alpha_2 u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_2 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où pour $i = 1$ et 2, $f_i \in L^2(\Omega)$, $k_i \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$,

$$k_i(x) \geq k > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_i(x) \geq \alpha > 0$$

pour presque tout x dans Ω.

Partie I. Approche variationnelle naturelle

Question 1. On introduit l'espace

$$V := \{v = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega);\ \text{tq. } v_1 = v_2 \ \text{(au sens de la trace) sur } \partial\Omega\}. \tag{2}$$

muni de la norme

$$\|v\|_V^2 := \|v_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

1.a Montrer que V est un espace de Hilbert.

V est le noyau de l'application linéaire $v \mapsto \gamma_0(v_1) - \gamma_0(v_2)$ (où γ_0 désigne l'application trace sur $\partial\Omega$) continue de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$.

1.b Montrer qu'une formulation variationnelle du problème (1) s'écrit sous la forme : Chercher $u = (u_1, u_2) \in V$ tq.

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

avec :

$$a(u, v) := \int_\Omega (k_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + \alpha_1\, u_1 v_1)\, dx - \int_\Omega (k_2 \nabla u_2 \nabla v_2 + \alpha_2\, u_2 v_2)\, dx$$

$$\ell(v) := \int_\Omega (f_1 v_1 - f_2 v_2)\, dx$$

Soit $v \in V$. On multiplie l'équation pour u_i par v_i et on utilise pa formule de Green pour intégrer par partie le terme en Δu_i. En faisant la différence entre les deux équations obtenues, les termes de bord se simplifient grâce à

$$v_1 = v_2 \ \textit{et}\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \qquad \textit{sur}\ \partial\Omega.$$

Question 2. Montrer que $a : V \times V \to \mathbb{R}$ et $\ell : V \to \mathbb{R}$ sont continues. Montrer que la forme bilinéaire a n'est pas coercive.

La continuité de a (resp. ℓ) s'obtient facilement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait que $k_i \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$ (resp. $f_i \in L^2(\Omega)$). La non coercivité de a se voit clairement sur les $u = (0, u_2)$ avec $u_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ qui sont bien dans V. Pour de telles fonctions

$$a(u, u) = -\int_\Omega (k_2 |\nabla u_2|^2 + \alpha_2 |u_2|^2)\, dx,$$

et donc

$$a(u, u) \leq 0,$$

ce qui contredit la propriété de coercivité.

Question 3. Montrer qu'il n'y pas unicité des solutions $(u_1, u_2) \in V$ de (3) si elles existent dans le cas $k_1 = k_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. Indication : On pourra considérer (après justification de son existence) la solution $u_0 \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel

$$\int_\Omega (k_1 \nabla u_0\, \nabla v_0 + \alpha_1\, u_0\, v_0)\, dx = \int_{\partial\Omega} g\, v_0\, ds \quad \forall v_0 \in H^1(\Omega),$$

où $g \in L^2(\partial\Omega)$ est une fonction non nulle donnée.

Par linéarité il suffit de montrer l'existence de solutions non triviales dans le cas $f_1 = f_2 = 0$. On peut construire une telle solution sous la forme $u_1 = u_2 = u_0 \in H^1(\Omega)$ avec u_0 solution du problème variationnel indiqué. En effet, pour $u = (u_0, u_0)$, $u \in V$ et

$$a(u, v) = \int_{\partial\Omega} g\, (v_1 - v_2)\, ds = 0$$

pour tout $v \in V$.
Ainsi, s'il existe une solution non triviale $(u_1, u_2) \in V$ alors on peut en faire une infinité en ajoutant u_0 aux deux termes pour n'importe quel g.

Partie II. Etude du cas $k_1 \neq k_2$. On supposera dans cette partie qu'il existe une constante $\delta > 0$ tq.

$$k_1(x) - k_2(x) \geq \delta k_1(x) \quad \text{et} \quad \alpha_1(x) - \alpha_2(x) \geq \delta \alpha_1(x)$$

pour presque tout x dans Ω.

Question 4. Soit T un isomorphisme (application linéaire bijective continue et d'inverse continue) de V dans V tq. la forme bilinéaire $a_T : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par

$$a_T(u, v) := a(u, Tv) \quad \forall u,\, v \in V$$

soit coercive. Montrer que dans ce cas le problème (3) admet une solution unique qui dépend continûment de ℓ.

La bijectivité de T montre que le problème (3) est équivalent à chercher $u \in V$ tq.

$$a_T(u, v) = \ell(Tv) \quad \forall v \in V.$$

La continuité de T induit la continuité de a_T et la continuité de $\ell_T : v \mapsto \ell(Tv)$ sur V. Le théorème de Lax-Milgram implique l'existence et unicité de la solution du problème variationnel précédent qui dépend continûment de ℓ_T. Puisque $\|\ell_T\| \leq \|T\|\|\ell\|$, la solution dépend aussi continûment de ℓ.

Question 5. Montrer à l'aide de l'application T définie par $T(v) = (v_1, 2v_1 - v_2)$ que le problème (3) est bien posé.

$T(v) \in V$ puisque $2v_1 - v_2 = v_1$ sur $\partial\Omega$. On remarque que $T(T(v)) = v$ donc T est bijective d'inverse $= T$. T est clairement continue.

$$\begin{aligned} a_T(u, v) \;&= \int_\Omega (k_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + \alpha_1\, u_1 v_1)\, dx + \int_\Omega (k_2 \nabla u_2 \nabla v_2 + \alpha_2\, u_2 v_2)\, dx \\ &\quad -2 \int_\Omega (k_2 \nabla u_2 \nabla v_1 + \alpha_2\, u_2 v_1)\, dx. \end{aligned}$$

Montrons la coercivité de a_T.

$$\begin{aligned} a_T(u, u) \;&= \int_\Omega (k_1 |\nabla u_1|^2 + k_2 |\nabla u_2|^2 - 2k_2 \nabla u_2 \nabla u_1)\, dx + \int_\Omega (\alpha_1 |u_1|^2 + \alpha_2 |u_2|^2 - 2\alpha_2 u_2 u_1)\, dx \\ &\geq \int_\Omega (k_1 |\nabla u_1|^2 + k_2 |\nabla u_2|^2 - 2\sqrt{1-\delta}\sqrt{k_2} |\nabla u_2| \sqrt{k_1} |\nabla u_1|)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega (\alpha_1 |u_1|^2 + \alpha_2 |u_2|^2 - 2\sqrt{1-\delta}\sqrt{\alpha_2} |\nabla u_2| \sqrt{\alpha_1} |\nabla u_1|)\, dx \end{aligned}$$

A partir de l'identité remarquable

$$X^2 + Y^2 - 2\sqrt{1-\delta}XY = (\sqrt{(1-\delta)}X - Y)^2 + \delta X^2 = (\sqrt{(1-\delta)}Y - X)^2 + \delta Y^2$$

nous en déduisons que

$$X^2 + Y^2 - 2\sqrt{1-\delta}XY \geq \frac{\delta}{2}(X^2 + Y^2).$$

En appliquant cette inégalité à $X = \sqrt{k_2}|\nabla u_2|$ *et* $Y = \sqrt{k_1}|\nabla u_1|$ *et à* $X = \sqrt{\alpha_2}|u_2|$ *et* $Y = \sqrt{\alpha_1}|u_1|$ *nous en déduisons*

$$\begin{aligned} a_T(u,u) &\geq \frac{\delta}{2}\int_\Omega (k_1|\nabla u_1|^2 + k_2|\nabla u_2|^2 + \alpha_1|u_1|^2 + \alpha_2|u_2|^2)\, dx \\ &\geq \frac{\delta}{2}\min(\alpha,k)\|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Question 6. On note X_h l'espace des éléments finis P_1 de Lagrange construit sur une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω. On suppose que la famille de triangulation $\mathcal{T}_h$ indexée par h est régulière. On note N la dimension de X_h et M le nombre de noeuds sur la frontière $\partial\Omega$.

6.a Construire à l'aide de X_h un espace d'approximation V_h de V. Quelle est la dimension de V_h ?

$$V_h = \{v_h = (v_1^h, v_2^h) \in X_h \times X_h \, tq. \, v_1^h = v_2^h \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

La contrainte $v_1^h = v_2^h$ *sur* $\partial\Omega$ *enlève* M *degrés de liberté à une fonction de* $X_h \times X_h$. *Ainsi la dimension de* $V_h = 2N - M$.

6.b On note $u_h \in V_h$ la solution de

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4}$$

Montrer la convergence de u_h vers u dans V lorsque $h \to 0$ et préciser la vitesse de convergence en supposant $u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

On remarque que l'application T *de la question 5 est aussi un isomorphisme de* V_h. *Ainsi (4) est équivalent à résoudre*

$$a_T(u_h, v_h) = \ell(Tv_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5}$$

D'après le Lemme de Céa (Poly, Lemme 6.1.2)

$$\|u - u_h\|_V \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

On note r_h *l'opérateur d'interpolation associé à* X_h *(Formule 6.49). Alors*

$$\tilde{r}_h \, : \, v \mapsto (r_h v_1, r_h v_2)$$

est bien une application de V dans V_h puisque si $v_1 = v_2$ sur $\partial\Omega$ alors $r_h v_1 = r_h v_2$ sur $\partial\Omega$. Ainsi

$$\|u - u_h\|_V \leq c\|u - \tilde{r}_h u\|_V \leq c(\|u_1 - r_h u_1\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2 - r_h u_2\|_{H^1(\Omega)})$$

D'après la proposition 6.3.16 du Poly,

$$\|u_i - r_h u_i\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u_i\|_{H^2(\Omega)}.$$

Nous obtenons donc

$$\|u - u_h\|_V \leq C'h\|u\|_{H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)}.$$

Partie III. Etude du cas $k_1 = k_2$.

On supposera dans cette partie (pour simplifier) que $k_1 = k_2 = 1$. Dans ce cas le problème (1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \alpha_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 + \alpha_2 u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1 - u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} - \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Question 7. Montrer que $r \mapsto \log(r)$ n'appartient pas à $H^1(\{(r,\theta), r \leq \delta, 0 < \theta < \theta_0\})$ pour tout $\delta > 0$ et $\theta_0 > 0$. En déduire à l'aide d'un exemple l'existence de solutions de (11) qui ne sont pas dans V. Indication : considérer la fonction $x \mapsto \log|x - x_0|$ qui est à Laplacien nul sur tout ouvert ne contenant pas x_0 et prendre $x_0 \in \partial\Omega$.

Posons $\phi(r) = \log(r)$ et $O := \{(r,\theta), r \leq \delta, 0 < \theta < \theta_0\}$.

$$\|\nabla\phi\|^2_{L^2(O)} = \int_0^\theta \int_0^\delta (1/r^2) r dr\, d\theta = \infty$$

Ainsi $\phi \notin H^1(O)$. Par contre

$$\|\phi\|^2_{L^2(O)} = \int_0^\theta \int_0^\delta \log(r)^2 r dr\, d\theta < \infty.$$

Donc $\phi \in L^2(O)$. Soit $\psi : x \mapsto \log|x - x_0|$. Quitte à faire une translation et une rotaion de Ω on peut supposer que $x_0 = 0$ et que $O \subset \Omega$ pour δ et θ suffisamments petits. Dans ce cas $\psi = \phi$. En prenant $u_1 = u_2 = \psi$, $f_1 = \alpha_1\psi$ et $f_2 = \alpha_2\psi$ nous avons bien que $f_i \in L^2(\Omega)$ et que u_1 et u_2 sont solutions de (11) par contre u_1 et u_2 ne sont pas dans $H^1(\Omega)$.

On appellera désormais une solution faible de (11) tout couple $(u_1, u_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifiant les équations sur Ω au sens de la dérivation faible et tq. $u_1 - u_2 \in H^2(\Omega)$ et les conditions aux limites sont vérifiées au sens des fonctions de $L^2(\partial\Omega)$. On rappelle que

$$H^2_0(\Omega) := \{w \in H^2(\Omega) \text{ tq. } w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Question 8. On supposera dans cette question que $\alpha_1(x)-\alpha_2(x) \geq \alpha_* > 0$ pour presque tout x dans Ω.

8.a Montrer que l'existence d'une solution faible (u_1, u_2) de (11) est équivalente à l'existence de $w = u_1 - u_2 \in H_0^2(\Omega)$ vérifiant (au sens de la dérivation faible)

$$(-\Delta + \alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w)\right) = -\Delta\left(\frac{f_1-f_2}{\alpha_1-\alpha_2}\right) + \frac{\alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2}{\alpha_1-\alpha_2} \quad \text{dans } \Omega. \qquad (7)$$

En prenant la différence entre les deux équations on constate que

$$\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}(-\Delta w + \alpha_1 w) = u_2 + \frac{f_1-f_2}{\alpha_2-\alpha_1}.$$

En appliquant l'opérateur $(-\Delta+\alpha_2)$ à la dernière équation on arrive à (7). Réciproquement, en posant

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}(-\Delta w + \alpha_1 w) - \frac{f_1-f_2}{\alpha_2-\alpha_1},$$

et par "symétrie"

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}(-\Delta w + \alpha_2 w) - \frac{f_1-f_2}{\alpha_2-\alpha_1},$$

il est facile de vérifier que $u_1 - u_2 = w \in H^2(\Omega)$, $(u_1, u_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et vérifie les équations sur Ω au sens de la dérivation faible. Les conditions aux limites sont vérifiées puisque $w \in H_0^2(\Omega)$.

8.b On admettra que $w \mapsto \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme $H^2(\Omega)$ sur l'espace $H_0^2(\Omega)$. En déduire que $w \mapsto \|-\Delta w + \alpha_2 w\|_{L^2(\Omega)}$ est également une norme équivalente à la norme $H^2(\Omega)$ sur l'espace $H_0^2(\Omega)$ (on pourra utiliser par exemple un raisonnement par contradiction).

On a bien

$$\|-\Delta w + \alpha_2 w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|-\Delta w\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_2\|_\infty \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|w\|_{H^2(\Omega)}.$$

Montrons l'inégalité inverse par contradiction. Supposons donc qu'il existe w_n suite de $H_0^2(\Omega)$ tq

$$\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1 \text{ et } \|-\Delta w_n + \alpha_2 w_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 1/n.$$

Par le lemme de Rellich, quite à en extraire une sous suite, on peut supposer que w_n est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. De l'inégalité

$$\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|-\Delta w + \alpha_2 w\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_2 w\|_{L^2(\Omega)}$$

on déduit que Δw_n est également une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Il en résulte que w_n est également une suite de Cauchy dans $H_0^2(\Omega)$. Soit $w \in H_0^2(\Omega)$ la limite de cette suite. D'une part $\|w\|_{H^2(\Omega)} = 1$ et d'autre part, $w \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\Delta w + \alpha_2 w = 0 \text{ dans } \Omega,$$

donc $w = 0$ par unicité de la solution de ce problème (on peut facilement montrer que la formulation variationnelle associée est bien posée). D'où on obtient une contradiction.

8.c Ecrire la formulation variationnelle du problème (7) et montrer son caractère bien posé. Indication : pour étudier la coercivité, on fera apparaître dans la forme bilinéaire prise en (w, w) des termes en $|-\Delta w + \alpha_2 w|^2$, en $|\nabla w|^2$ et en $|w|^2$.
La formulation variationnelle s'obtient en multipliant par une fonction test $w' \in H_0^2(\Omega)$ et en appliquant la formule de Green deux fois. On obtient

$$\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w)(-\Delta w' + \alpha_2 w')\, dx = \int_\Omega -\frac{f_1 - f_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\Delta w' + \frac{\alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2}{\alpha_1 - \alpha_2} w' dx. \quad (8)$$

La question la plus délicate concerne la coercivité de la forme bilinéaire associée que l'on va noter β. Cependant on remarque que

$$\begin{aligned} \beta(w,w) &= \textstyle\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w)(-\Delta w + \alpha_2 w)dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}(-\Delta w + \alpha_2 w + (\alpha_1 - \alpha_2)w)(-\Delta w + \alpha_2 w)dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w + \alpha_2 w|^2 + w(-\Delta w + \alpha_2 w)dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w + \alpha_2 w|^2 + |\nabla w|^2 + \alpha_2 |w|^2 dx \\ &\geq \textstyle\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w + \alpha_2 w|^2 dx \\ &\geq c\|w\|^2_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

La manière de décomposer la forme bilinéaire est inspiré par la question précédente.

Question 9. On supposera dans cette question que $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) \geq \alpha_* > 0$ pour presque tout x dans $\Omega \setminus \Omega_0$ et que $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ pour presque tout x dans Ω_0 où Ω_0 désigne un domaine régulier strictement inclus dans Ω. On supposera pour simplifier que $f_1 = f_2 = f$ et que f est à support compact dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$. On pose

$$W := \{w \in H_0^2(\Omega);\ \text{tq.}\ -\Delta w + \alpha_1 w = 0 \text{ dans } \Omega_0\}.$$

9.a Montrer que W muni de la norme $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

W est le noyau de l'application lináire $w \mapsto (-\Delta w + \alpha_1 w)|\Omega_0$ continue de $H_0^2(\Omega)$ à valeur dans $L^2(\Omega_0)$.

9.b Montrer que si $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ est une solution de (11) alors $w = u_1 - u_2 \in W$ et vérifie

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w)(-\Delta w' + \alpha_2 w')\, dx = -\int_{\Omega\setminus\Omega_0} f w' dx \quad (9)$$

pour tout $w' \in W$.

Il est clair que w vérifie bien les mêmes équations que (7) sur $\Omega\setminus\Omega_0$. Il est clair également que $w \in W$. En procédant comme dans l'établissment de la formulation variationnelle de la question 8, on obtient

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}(-\Delta w+\alpha_1 w)(-\Delta w'+\alpha_2 w')\,dx + \int_{\partial\Omega_0}(w'\partial u_2/\partial n - u_2\partial w'/\partial n)\,ds$$
$$= -\int_{\Omega\setminus\Omega_0} f w' dx$$

pour tout $w' \in W$, où on a utilisé que

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}(-\Delta w+\alpha_1 w)$$

dans $\Omega\setminus\Omega_0$. Comme u_2 et w' vérifient

$$-\Delta w' + \alpha_1 w' = -\Delta u_2 + \alpha_1 u_2 = 0 \text{ dans } \Omega_0$$

nous avons

$$\int_{\Omega_0} \Delta u_2 w' - \Delta w' u_2 dx = 0$$

soit en utilisant la formule de Green

$$\int_{\partial\Omega_0}(w'\partial u_2/\partial n - u_2\partial w'/\partial n)ds = 0.$$

On obtient ainsi la formulation variationnelle indiquée.

9.c Montrer le caractère bien posé de la formulation variationnelle (9).

Encore une fois la question la plus délicate concerne la coercivité de la forme bilinéaire associée que l'on va noter $\tilde\beta$. En suivant une démarche similaire à la question 8 on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde\beta(w,w) &= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}(-\Delta w+\alpha_1 w)(-\Delta w+\alpha_2 w)dx\\
&= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}(-\Delta w+\alpha_2 w+(\alpha_1-\alpha_2)w)(-\Delta w+\alpha_2 w)dx\\
&= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w+\alpha_2 w|^2 + w(-\Delta w+\alpha_2 w)dx\\
&= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w+\alpha_2 w|^2 + \int_\Omega w(-\Delta w+\alpha_2 w)dx\\
&= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w+\alpha_2 w|^2dx + \int_\Omega(|\nabla w|^2+\alpha_2|w|^2)dx\\
&\geq \textstyle\int_\Omega \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}|-\Delta w+\alpha_2 w|^2dx\\
&\geq c\|w\|^2_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé à la quatrième ligne de calcul que

$$-\Delta w + \alpha_2 w = 0 \text{ dans } \Omega_0.$$

9.d (question bonus) On admettra que les traces sur $\partial\Omega_0$ de fonctions dans W sont denses dans $L^2(\partial\Omega_0)$ et que pour toute fonction h trace sur $\partial\Omega_0$ d'une fonction de $H^2(\Omega\backslash\Omega_0)$ il existe une fonction $R(h) \in H^2(\Omega_0)$ tq.

$$\begin{cases} -\Delta R(h) + \alpha_1 R(h) = 0 \text{ dans } \Omega_0, \\ R(h) = h \text{ sur } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

En déduire que si h est la trace sur $\partial\Omega_0$ d'une fonction de $H^2(\Omega \setminus \Omega_0)$ et si $g \in L^2(\partial\Omega_0)$ vérifie

$$\int_{\partial\Omega_0} \left(gw' - h\frac{\partial w'}{\partial n} \right) ds = 0 \quad \forall w' \in W, \tag{10}$$

alors $g = \dfrac{\partial R(h)}{\partial n}$ sur $\partial\Omega_0$, où n désigne ici la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0.

Puisque $R(h)$ et w' vérifient

$$-\Delta w' + \alpha_1 w' = -\Delta R(h) + \alpha_1 R(h) = 0 \textit{ dans } \Omega_0$$

nous avons

$$\int_{\Omega_0} \Delta R(h) w' - \Delta w' R(h) dx = 0,$$

soit en utilisant la formule de Green

$$\int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial R(h)}{\partial n} w' - R(h)\frac{\partial w'}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Ainsi, en prenant la différence avec (10) on obtient

$$\int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial R(h)}{\partial n} - g \right) w' ds = 0$$

et ceci pour tout $w' \in W$. On en déduit par densité dans $L^2(\partial\Omega_0)$ des traces sur $\partial\Omega_0$ de fonctions dans W que $g = \dfrac{\partial R(h)}{\partial n}$ sur $\partial\Omega_0$.

9.e (question bonus) On suppose que la solution de (9) est dans $H^4(\Omega\backslash\overline{\Omega}_0)$. En déduire l'existence de solutions $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ de (11).

En prenant une fonction test dans $C_c^\infty(\Omega \setminus \Omega_0)$ dans (9) on déduit que

$$(-\Delta + \alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w) \right) = -f \textit{ dans } \Omega \setminus \Omega_0.$$

En posant

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(-\Delta w + \alpha_1 w) \textit{ dans } \Omega \setminus \Omega_0,$$

on vérifie sans peine que

$$(-\Delta + \alpha_2) = f \ \ dans\ \Omega \setminus \Omega_0.$$

En reprenant le calcul aboutissant à la formulation variationelle dans l'autre sens nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega_0} (w'\partial u_2/\partial n - u_2 \partial w'/\partial n) ds = 0.$$

pour tout w'. *Posons donc* $\tilde{u}_2 = R(u_2|_{\partial\Omega_0})$ *dans* Ω_0. *On a d'après la question précédente*

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$$

sur $\partial\Omega_0$. *Ainsi* u_2 *et* $\tilde{u}_2$ *vérifient le problème de transmission (classiquement étudié en TD)*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2 + \alpha_2 u_2 = f \qquad dans\ \Omega \setminus \Omega_0, \\ -\Delta \tilde{u}_2 + \alpha_2 \tilde{u}_2 = 0 \qquad dans\ \Omega_0, \\ \tilde{u}_1 - u_2 = 0 \qquad sur\ \partial\Omega_0, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \qquad sur\ \partial\Omega_0. \end{array} \right. \tag{11}$$

En prenant une fonction test φ *dans* $C_c^\infty(\Omega)$ *on vérifie sans peine que si on pose*

$$u_2 = \tilde{u}_2 \ \ dans\ \Omega_0$$

alors

$$\int_\Omega u_2(-\Delta\varphi + \alpha_2\varphi) dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

soit

$$-\Delta u_2 + \alpha_2 u_2 = f \qquad dans\ \Omega.$$

On vérifie aisément ensuite que

$$u_1 = w + u_2$$

convient pour contruire une solution (u_1, u_2) *de (11).*

Remarque : En fait il est également possible de construire à partir de toute solution de (9) (sans hypothèse de régularité supplémentaire) une solution faible de (11).

Problème 2 : La forme d'une goutte d'eau (Copies vertes, noté sur 9)

Question 1. On a posé

$$\bar{\sigma} \;=\; \frac{\sigma_{sl} - \sigma_{sa}}{\sigma_{la}}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{sl} + \sigma_{la} &\;\geq\; \sigma_{sa} \\ \sigma_{sa} + \sigma_{la} &\;\geq\; \sigma_{sl}, \end{aligned}$$

soit

$$\sigma_{la} \;\geq\; \sigma_{sl} - \sigma_{sa} \geq\; -\sigma_{la}$$

c'est-à-dire:

$$-1 \;\leq\; \bar{\sigma} \;\leq\; 1$$

Partie I. .

Question 2. Si une goutte ne touche pas la ligne ∂S, alors son énergie est simplement donnée par

$$\mathcal{E}(E) \;=\; (\text{longueur de } \partial E).$$

Pour une aire $|E| = V$ donnée, l'inégalité isopérimétrique dit que l'ensemble de périmètre minimal est un disque. E doit donc être un disque d'aire V (et rayon $\sqrt{V/\pi}$).

Question 3. Si on suppose que $\bar{\sigma} = 0$, alors l'énergie devient

$$\mathcal{E}(E) \;=\; (\text{longueur de } \partial E \setminus \partial\Omega).$$

L'ensemble F est formé de E et de son symétrique par rapport à la droite $\{y = 0\} = \partial\Omega$. Son bord est donc l'union de $\partial E \setminus \partial\Omega$ et de son symétrique par rapport à la même droite. Par contre, la partie du bord $\partial E \cap \partial\Omega$ "disparait" dans l'opération, puisque l'ensemble se trouve alors des deux côtés. On a donc $\mathcal{E}(E) = (1/2)(\text{longueur de } \partial F)$. Si E minimise $\mathcal{E}$, F doit minimiser son périmètre à aire donnée $2V$. D'après l'inégalité isopérimétrique, F est donc un disque symétrique par rapport à la droite $\partial\Omega$ (donc de centre inclus dans cette droite). E est donc un demi-disque de la forme $\{x^2 + y^2 \leq 2V/\pi, y \geq 0\}$.

Question 4.a.. L'application $v(\bar{y})$ est clairement croissante et continue. On peut par exemple observer que le point le plus haut du cercle $\partial D(\bar{y})$ est le point $(0, \bar{y} + \sqrt{\bar{y}^2 + a^2})$.

Si $\bar{y} > \bar{y}'$, on a $\bar{y} + \sqrt{\bar{y}^2 + a^2} > \bar{y}' + \sqrt{\bar{y}'^2 + a^2}$ car la fonction $t \mapsto t + \sqrt{t^2 + a^2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est $1 + t/\sqrt{t^2 + a^2} > 0$). Par conséquent, l'arc de cercle passant par $(-a, 0)$, $(0, a)$, $\bar{y} + \sqrt{\bar{y}^2 + a^2}$ doit être à l'extérieur de l'arc passant par $(-a, 0)$, $(0, a)$, $\bar{y}' + \sqrt{\bar{y}'^2 + a^2}$, en d'autre terme la calotte $\tilde{E}(\bar{y}) = D(\bar{y}) \cap \Omega$ croît au sens de l'inclusion. On en déduit que l'aire $v(\bar{y})$ est une application strictement croissante (et continue).

Elle tend vers zéro quand $\bar{y} \to -\infty$, et vers $+\infty$ quand $\bar{y} \to -\infty$. Par conséquent, pour V donné, il existe un unique $\bar{y}$ tel que $v(\bar{y}) = V$.

4.b. Si $D' = E \cup (D \cap S)$, alors son aire de D' est $V + |D \cap S|$ tandis que son périmètre est la somme des longueurs de $\partial E \setminus \partial\Omega$ et de $\partial D \cap S$ (qui est une constante).

Par ailleurs, $\mathcal{E}(E)$ est la longueur de $\partial E \setminus \partial\Omega$ plus $2\bar{\sigma}a$. Si E minimise cette énergie, D' doit aussi minimiser son périmètre, à aire $V + |D \cap S|$ fixée. Par conséquent, ça ne peut être qu'un disque. Donc $E = D' \cap \Omega$ est la portion de disque $D \cap \Omega$.

Partie II. On suppose maintenant que $\bar{\sigma} < 0$, $E = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < h(x)\}$ où h est une fonction positive, continue, vérifiant

$$\int_{-a}^{a} h(x)\,dx \;=\; V\,. \tag{12}$$

L'énergie est

$$\mathcal{E}(a, h) \;=\; \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + h'(x)^2}\,dx \;+\; 2\bar{\sigma}\,a \tag{13}$$

à condition de supposer que $h > 0$ p.p. dans $(-a, a)$. (En effet, sinon, il faudrait mettre un poids $\bar{\sigma}$ à la partie de longueur $\{x \in (-a, a) : h(x) = 0\}$)

Question 5. On suppose que $a > 0$ est connu, et on admet l'existence d'un minimiseur $h \in H^1(-a, a)$ de $\mathcal{F}_a(h) = \mathcal{E}(a, h)$, parmi toutes les fonctions positives vérifiant (12). Notamment, h est continue.

On suppose que $h(x) > 0$ pour $x \in]-a, a[$. Si $\phi \in C_c^\infty(-a, a)$, on note $K \subset]-a, a[$ son support (compact). La fonction $h(x) + t\phi(x)$ est une fonction continue. Pour qu'elle soit positive il suffit que $|t| \max_K |\phi| < \min_K h$, or $\min_K h > 0$ par hypothèse, donc il suffit que t soit assez petit.

Par ailleurs, on doit avoir $\int_{-a}^{a} h + t\phi = V + t\int_{-a}^{a} \phi = V$, donc il faut que $\int_{-a}^{a} \phi = 0$.

Pour un tel ϕ, cherchons la dérivée en $t = 0$ de

$$t \mapsto \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (h' + t\phi')(x)^2}\,dx\,. \tag{14}$$

On doit calculer

$$\lim_{t\to 0} \int_{-a}^{a} \frac{1}{t}\left(\sqrt{1 + (h' + t\phi')(x)^2} - \sqrt{1 + h'(x)^2}\right)\,dx\,.$$

Pour presque tout x, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\sqrt{1 + (h' + t\phi')(x)^2} - \sqrt{1 + h'(x)^2}\right) \;=\; \frac{h'(x)\phi'(x)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}\,dx\,,$$

par ailleurs on sait que pour tout t il existe t^* entre 0 et t tel que

$$\frac{1}{t}\left(\sqrt{1 + (h' + t\phi')(x)^2} - \sqrt{1 + h'(x)^2}\right) \;=\; \frac{(h'(x) + t^*\phi'(x))\phi'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x) + t^*\phi'(x))^2}}.$$

Or le membre de droite de cette inégalité est borné par $|\phi'(x)|$, par conséquent on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et passer à la limite sous le signe intégral. On trouve

$$\lim_{t\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{t}\left(\sqrt{1+(h'+t\phi')(x)^2}-\sqrt{1+h'(x)^2}\right)dx \;=\; \int_{-a}^{a}\frac{h'(x)\phi'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}}\,dx\,.$$

Enfin, comme h est solution du problème, la fonction (14) est minimale en zéro et sa dérivée doit s'y annuler. Donc

$$\int_{-a}^{a}\frac{h'(x)\phi'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}}\,dx \;=\; 0\,.$$

Question 6. On pose $F(p)=\sqrt{1+|p|^2}$. On a

$$F'(p)=\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} \qquad F''(p)=\frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}^{\,3}} \;>\; 0\,.$$

Notamment, pour tous $p,q\in\mathbb{R}$,

$$(F'(p)-F'(q))(p-q) \;=\; \left(\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+|q+t(p-q)|^2}^{\,3}}\right)(p-q)^2.$$

Si $p\neq q$, ceci est strictement positif, donc F est strictement convexe. Mais, pour tout $\alpha>0$, c'est inférieur à $\alpha|p-q|^2$ dès que p,q sont assez grands (car $F''\to 0$ à l'infini).

On en déduit notamment que $\mathcal{F}_a$ est strictement convexe, le minimiseur h doit donc être unique. En détails, si h,g sont deux solutions de même intégrale V, alors $(h+g)/2$ a aussi intégrale V, mais

$$\mathcal{F}_a\left(\frac{h+g}{2}\right) \;<\; \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_a(h)+\mathcal{F}_a(g)\right).$$

Remarque: c'est encore vrai si on tient aussi compte de la contrainte $h,g\geq 0$ (ou >0).

Question 7.
7.a. On considère une fonction $f\in L^2(-a,a)$ telle que pour toute $\phi\in C_c^\infty(-a,a)$ telle que $\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx=0$,

$$\int_{-a}^{a}f(x)\phi'(x)\,dx \;=\; 0\,.$$

Considérons $\theta\in C_c^\infty(-a,a)$ avec $\int_{-a}^{a}\theta\,dx=1$, et $\phi\in C_c^\infty(-a,a)$. On pose $\hat\phi=\phi-(\int_{-a}^{a}\phi\,dx)/(2a)\,\theta$: c'est une fonction d'intégrale nulle, régulière et à support compact. On a donc

$$0=\int_{-a}^{a}f(x)\hat\phi'(x)\,dx \;=\; \int_{-a}^{a}f(x)\phi'(x)\,dx-\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x)\theta'(x)\,dx\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx$$

soit, en posant $\lambda = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\theta'(x)\,dx$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\phi'(x)\,dx \;=\; \lambda\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx$$

et ceci pour toute $\phi \in C_c^\infty(-a,a)$. Mais cela signifie précisément que f a pour dérivée faible $-\lambda$. On sait que dans ce cas, $f(x) = -\lambda x + c$ pour une constante c.

7.b. On a vu à la question **6.** que

$$\int_{-a}^{a}\frac{h'(x)\phi'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}}\,dx \;=\; 0\,.$$

pour toute $\phi \in C_c^\infty(-a,a)$ avec $\int_{-a}^{a}\phi\,dx = 0$. De toute évidence, la fonction $h'/\sqrt{1+h'^2}$ (entre -1 et 1), est dans L^2 (et même $L^\infty(-a,a)$). Donc on peut appliquer le résultat précédent: cette fonction est affine. En particulier, on a bien

$$\int_{-a}^{a}\frac{h'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}}\phi'(x)\,dx \;=\; \lambda\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx$$

pour toute $\phi \in C_c^\infty(-a,a)$, et pour un certain paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ce λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'aire $\int_{-a}^{a} h(x)\,dx = V$.

Question 8. On rappelle qu'on suppose $a > 0, V > 0$. Un commentaire sur l'hypothèse $\lambda \geq 0$: en vérité, on pourrait remplacer la contrainte égalité (aire $= V$) du problème par une contrainte *inégalité*: $\int_{-a}^{a} h(x)\,dx \geq V$. Cette contrainte serait alors automatiquement saturée, en effet, si une solution vérifiait $\int_{-a}^{a} h\,dx > V$, alors $(1-\epsilon)h$ serait encore admissible, pour $\epsilon > 0$ assez petit, et d'énergie inférieure, une contradiction.

On a:

$$\frac{h'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \;=\; c - \lambda x \;\Leftrightarrow\; h'(x) = \frac{(c-\lambda x)}{\sqrt{1-(c-\lambda x)^2}}$$

(et il faut $|\lambda x + c| \leq a$).

On trouve

$$h \;=\; \frac{\sqrt{1-(c-\lambda x)^2}}{\lambda - c'}\,,$$

et comme $h(\pm a) = 0$, on en déduit que $c' \geq 0$, $(\lambda c')^2 = 1-(c+\lambda a)^2 = 1-(c-\lambda a)^2$.

Donc $c = 0$ ou $\lambda a = 0$, mais dans ce dernier cas on aurait h' =constante et donc (avec $h(\pm a) = 0$, $h = 0$), d'où $V = 0$. Si $V > 0$, on doit donc avoir $\lambda > 0$,

$$c' \;=\; \frac{\sqrt{(1-\lambda^2 a^2)}}{\lambda}\,,$$

et en posant $R = 1/\lambda$, on trouve pour $|x| \leq a$,

$$h(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2}$$

On trouve l'équation de l'arc de cercle de centre $(0, -\sqrt{R^2 - a^2})$ et de rayon $R = 1/\lambda$, entre les points $(0, -a)$ et $(0, a)$.]

Question 9. On a $R \sin\alpha = a$,

$$V \;=\; R^2\alpha \;-\; R^2\cos\alpha\sin\alpha \;=\; R^2\alpha \;-\; R^2\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

tandis que la longueur est $2\alpha R$ et l'énergie est donc

$$\mathcal{E}(E) \;=\; 2\alpha R + 2\bar{\sigma}\, R\sin\alpha.$$

On doit donc résoudre

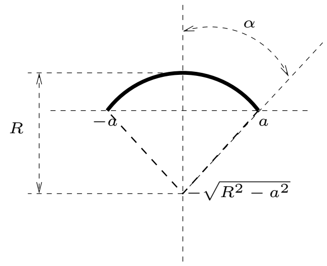

Figure 1: La goutte en 2 dimensions

$$\min_{R,\alpha} 2R(\alpha + \bar{\sigma}\sin\alpha) \;:\; R^2\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = V.$$

Au minimum, il existe un multiplicateur de Lagrange λ tel que

$$\begin{aligned} 2R(1 + \bar{\sigma}\cos\alpha) \;&=\; \lambda R^2(1 - \cos 2\alpha) \\ 2(\alpha + \bar{\sigma}\sin\alpha) \;&=\; 2\lambda R\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} 1 + \bar{\sigma}\cos\alpha - (\lambda R)\sin^2\alpha \;&=\; 0 \\ \alpha + \bar{\sigma}\sin\alpha - (\lambda R)(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) \;&=\; 0 \end{aligned}$$

On peut éliminer $\bar{\sigma}$ en multipliant la première équation par $\sin\alpha$, la seconde par $\cos\alpha$, et en soustrayant:

$$\sin\alpha - (\lambda R)\sin^3\alpha - \alpha\cos\alpha + (\lambda R)(\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha\sin\alpha) \;=\; 0$$

soit

$$\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + (\lambda R)(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) \;=\; 0$$

ce qui donne $\lambda R = 1$, soit $\lambda = 1/R$ (ou $\tan\alpha = \alpha$, mais alors $\alpha = 0$ et $\bar{\sigma} = -1$).

On voit alors que $\bar{\sigma} = -\cos\alpha$.

Si $\bar{\sigma} > 0$, on pourrait encore montrer que $\bar{\sigma} = -\cos\alpha$ mais cette fois, $\alpha > \pi$, le centre a une ordonnée positive $-R\cos\alpha$, et on est dans un cas où la goutte n'est plus décrite par un graphe (par contre, les calculs fais dans cette question restent encore valides).