ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2008
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Contrôle classant
Lundi 28 juin 2010
Durée : 4 heures

Sujet Proposé par François Alouges et Habib Ammari

Le sujet se compose de deux problèmes totalement indépendants. Il compte 8 pages en tout. Chaque problème est à rédiger sur des copies de couleurs distinctes, roses pour le problème 1 et vertes pour le problème 2.

Problème 1 - (Copies roses, noté sur 12)

Notations et Rappels.
On considère Ω un ouvert borné régulier (de classe $\mathcal{C}^\infty$) de $\mathbb{R}^d$, et $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω. On notera

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)\,dx, \text{ et } ||u||_{L^2} = (< u, u >)^{\frac{1}{2}}$$

respectivement le produit scalaire de deux fonctions u et v de $L^2(\Omega)$ et la norme associée. On notera par ailleurs $H_0^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev classique des fonctions qui admettent une dérivée (faible) dans $L^2(\Omega)$ et dont la trace est nulle sur le bord $\partial\Omega$. On munit $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega),\ a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,dx\,,$$

et on note la norme associée $||u||_{H_0^1}$. Dans la suite, on posera $\lambda(u) = ||u||^2_{H_0^1} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx$ pour $u \in H_0^1(\Omega)$.

On rappelle qu'il existe une suite de fonctions $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\left[\begin{array}{l} -\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k \text{ dans } \Omega \\ \phi_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ ||\phi_k||_{L^2(\Omega)} = 1 \end{array}\right. \tag{1}$$

pour une suite croissante de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \cdots$ qui tend vers $+\infty$. Par ailleurs, $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (respectivement $\left(\frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$) est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (respectivement de $H_0^1(\Omega)$).

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on posera par la suite

$$E_N = \text{vect}\{\phi_k,\ 1 \leq k \leq N\} \tag{2}$$

le sous espace de dimension N de $H_0^1(\Omega)$ engendré par les N premières fonctions propres du Laplacien.

Dans tout le problème, on supposera que λ_1 est simple, c'est-à-dire que

$$\lambda_1 < \lambda_k \ \ \forall k \geq 2\,. \tag{3}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on notera $H^p(\Omega)$ l'espace de Sobolev classique (de sorte que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$), et on rappelle (théorème 4.3.25 du poly) que pour $p > \frac{d}{2}$, $H^p(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.

On rappelle le théorème suivant de régularité valable sur des ouverts bornés de classe $\mathcal{C}^\infty$:

Théorème 1 *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f \in H^p(\Omega)$, et $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de*

$$\left[\begin{array}{l} -\Delta u = f \ \ \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

alors $u \in H^{p+2}(\Omega)$.

Enfin, le problème consiste à trouver des fonctions solutions d'une équation d'évolution aux dérivées partielles. On cherchera ces solutions dans l'espace $X = \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ dont on rappelle qu'il est complet pour la norme

$$||u||_X = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t,\cdot)||_{L^2} + \left(\int_0^T ||u(t,\cdot)||^2_{H_0^1}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

1. Montrer que $\forall k \geq 1,\ \phi_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et que $\forall k \geq 1,\ \lambda_k = \lambda(\phi_k) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi_k|^2\,dx\,.$

2. Lemme de Gronwall. Soient $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall t \geq 0,\ f'(t) \leq b(t)f(t)\,.$$

Montrer que

$$\forall t > 0,\ f(t) \leq f(0)\exp\left(\int_0^t b(s)\,ds\right)\,.$$

On pourra introduire la fonction g définie par

$$\forall t \geq 0,\ g(t) = f(t)\exp\left(-\int_0^t b(s)\,ds\right)\,.$$

3.1 On considère, pour $f \in L^2(\Omega)$, le problème suivant

$$\left[\begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{5}$$

Montrer que (5) admet une unique solution $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$.

3.2 Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. On considère le problème d'évolution

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{array}\right. \tag{6}$$

où f est la fonction de la question précédente. En particulier f ne dépend pas du temps.

- Rappeler le résultat de cours qui permet d'affirmer que (6) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.
- Montrer que la formulation variationnelle du cours est équivalente pour les fonctions $u \in \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ à

$$\left[\begin{array}{l} \forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \forall t \in [0,T], \\ < u(t),\phi > + \displaystyle\int_0^t a(u(s),\phi)\,ds =< u(0),\phi > + \int_0^t < f,\phi > \,ds \\ u(0,x) = u_0(x)\,. \end{array}\right. \tag{7}$$

  (On a en fait $\int_0^t < f,\phi > \,ds = t < f,\phi >$ car l'intégrand ne dépend pas de s.)

- Montrer enfin que la solution $u(t)$ de (6) converge exponentiellement rapidement en temps dans $L^2(\Omega)$ vers $\bar{u}$ qui est la solution de (5).

On souhaite étudier une équation d'évolution du même type que la précédente mais qui converge vers des vecteurs propres du Laplacien. On propose l'équation suivante dans laquelle u_0 vérifie maintenant $||u_0||_{L^2(\Omega)} = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \mu(t)u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ ||u(t,.)||_{L^2(\Omega)} = 1, \ \forall t \geq 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Attention: dans l'équation précédente, μ est une inconnue du problème.

Le reste du problème consistera à montrer que l'on peut construire des solutions à cette équation. On montrera aussi dans un cas particulier qu'elles convergent effectivement (à un signe près) vers la fonction propre du Laplacien associée à la plus petite valeur propre $\pm\phi_1$.

4. **Estimation a priori.** On suppose dans cette question seulement qu'il existe u solution de (10) qui est aussi régulière que souhaité. Montrer que

$$\mu(t) = \lambda(u(t)) = \int_\Omega |\nabla u|^2(t,x)\, dx\,. \tag{9}$$

En déduire que l'on a alors $\lambda(u(t)) \geq \lambda_1$ avec égalité si et seulement si $u(t,x) = \pm u_1(x)\ \forall x \in \Omega$. Montrer aussi que $\lambda(u(t))$ est alors une fonction décroissante sur $[0,T]$.

Remarque 2 *Ainsi, en dépit des apparences, l'équation (8) est en fait un problème non-linéaire.*

Afin de mettre en évidence la non linéarité de l'équation, on réécrit (8) sous la forme variationnelle suivante:
Trouver $u \in \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ vérifiant

$$\left[\begin{array}{l} \forall \phi \in H^1_0(\Omega),\ \forall t \in [0,T], \\ < u(t), \phi > + \displaystyle\int_0^t a(u(s),\phi)\, ds =< u(0), \phi > + \int_0^t \lambda(u(s)) < u(s), \phi > \, ds \\ u(0,x) = u_0(x)\,. \end{array}\right. \tag{10}$$

Cette forme variationnelle correspond au problème

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda(u(t))u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x)\,. \end{array}\right. \tag{11}$$

Et l'on prendra à partir de maintenant et pour toute la fin du problème $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (au lieu de L^2) vérifiant $||u_0||_{L^2(\Omega)} = 1$.

---

5. Construction de solutions particulières. Dans toute cette question, on suppose que $u_0 \in E_N$ et on notera $u_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^0 \phi_i$.

5.1
- Montrer qu'il existe $T^* > 0$ et une unique solution u du problème (10) vérifiant $u(t,.) \in E_N,\ \forall t \in [0, T^*[$. On écrira $u(t,x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\phi_i(x)$, on montrera que $\lambda(u(t)) = \sum_{i=1}^N \lambda_k \alpha_k(t)^2$ et on écrira le système différentiel vérifié par $(\alpha_i(t))_{1 \le i \le N}$.

- Montrer que $||u(t,\cdot)||_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^N (\alpha_i(t))^2 = 1$ et en déduire que la solution est globale, c'est-à-dire que $T^* = +\infty$.

- Montrer aussi que $u \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[\times\Omega)$.

5.2 On suppose ici que $\alpha_1^0 > 0$. Montrer que $\lambda(u(t))$ est une fonction décroissante du temps qui converge vers λ_1 lorsque t tend vers $+\infty$. Montrer enfin que $\alpha_1(t)$ est une fonction croissante du temps qui converge vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$.

6. Construction de solutions dans le cas général. On prend maintenant $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et l'on suppose que

$$\int_\Omega u_0(x)\, \phi_1(x)\, dx > 0.$$

6.1 Montrer qu'il existe une suite $(u_0^N)_{N \ge 1}$ telle que

$$\begin{array}{l} \forall N \ge 1,\ u_0^N \in E_N\,, \\ \forall N \ge 1,\ ||u_0^N||_{L^2(\Omega)} = 1\,, \\ \forall N \ge 1,\ \int_\Omega u_0^N(x)\, \phi_1(x)\, dx > 0\,, \\ u_0^N \to u_0 \text{ lorsque } N \to +\infty \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ \big(\lambda(u_0^N)\big)_{N \ge 1} \text{ est bornée.} \end{array}$$

6.2 Pour tout $N \ge 1$, on construit grâce à la question 4. une solution $u^N(t,x)$ du problème (10) de donnée initiale u_0^N. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^N - u^M)^2\, dx + \int_\Omega |\nabla(u^N - u^M)|^2\, dx = \frac{\lambda(u^N) + \lambda(u^M)}{2}\int_\Omega (u^N - u^M)^2\, dx\,.$$

(On pourra utiliser l'identité $ab - cd = \left(\frac{a+c}{2}\right)(b-d) + \left(\frac{b+d}{2}\right)(a-c)$).

En déduire qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de N et M mais pouvant dépendre de T telles que

$$\forall t \in [0,T], \ \int_\Omega (u^N(t,x) - u^M(t,x))^2 \, dx \leq C_1 \int_\Omega (u_0^N(x) - u_0^M(x))^2 \, dx \, ,$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla (u^N(t,x) - u^M(t,x))|^2 \, dx \, dt \leq C_2 \int_\Omega (u_0^N(x) - u_0^M(x))^2 \, dx \, .$$

6.3 En déduire que la suite $(u^N)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et qu'elle converge. On appelle $u^\infty \in \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ sa limite.

Montrer enfin que $(\lambda(u^N))_{N\geq 1}$ converge dans $L^1(0,T)$ vers $\lambda^\infty = \lambda(u^\infty)$ et que λ^∞ est une fonction décroissante du temps.

Montrer que $||u^\infty(t)||_{L^2} = 1$, $\forall t \in [0,T]$.

6.4 Montrer que u^∞ est solution du problème (10) avec la donnée initiale u_0.

Problème 2 - Inégalité de Weyl (Copies vertes, noté sur 8)

Le but de ce problème est de démontrer un résultat (inégalité (13)) qui exprime en physique quantique le principe d'incertitude d'Heisenbarg.

On note X l'espace de fonctions :

$$X = \left\{ x(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ à valeurs réelles : } \int_0^{+\infty} \left[x^2(t) + t^2 x^2(t) + (\frac{dx}{dt})^2(t) \right] dt < +\infty \right\}.$$

1) Montrer que si $x \in X$ alors $tx^2(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Indication : Intégrer par parties

$$\int_0^t \tau x(\tau) \frac{dx}{d\tau}(\tau)\, d\tau.$$

2) En développant

$$\int_0^{+\infty} (\frac{dx}{dt} + tx)^2\, dt$$

et en intégrant par parties, montrer que pour tout $x \in X$,

$$\int_0^{+\infty} (\frac{dx}{dt})^2(t)\, dt \geq \int_0^{+\infty} (1 - t^2) x^2(t)\, dt. \tag{12}$$

3) En substituant dans (12) la fonction $y(t/a)$ à $x(t)$, montrer qu'on a

$$\int_0^{+\infty} (\frac{dy}{d\tau})^2(\tau)\, d\tau - a^2 \int_0^{+\infty} y^2(\tau)\, d\tau + a^4 \int_0^{+\infty} \tau^2 y^2(\tau)\, d\tau \geq 0, \quad \forall\, a > 0.$$

4) En déduire l'inégalité

$$\forall x \in X, \int_0^{+\infty} x^2(t)\, dt \leq C \left(\int_0^{+\infty} t^2 x^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} (\frac{dx}{dt})^2(t)\, dt \right)^{1/2}, \tag{13}$$

avec $C = 2$.

On veut maintenant démontrer que $C = 2$ est la plus petite constante qui vérifie (13). On considère le problème de minimisation sur X

$$\inf \int_0^{+\infty} (\frac{dx}{dt})^2(t)\, dt \tag{14}$$

sous la contrainte d'égalité, dite isopérimétrique,

$$\int_0^{+\infty} (t^2 - 1)\, x^2(t)\, dt = -1. \tag{15}$$

Pour trouver sa solution, on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \int_0^{+\infty} (\frac{dx}{dt})^2(t)\,dt + \lambda\Big[\int_0^{+\infty} (t^2-1)\,x^2(t)\,dt + 1\Big].$$

5) Pour h une fonction dans X à support compact, calculer la dérivée du Lagrangien $\mathcal{L}$ en x appliquée à h, c'est-à-dire la quantité

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{L}(x+\varepsilon h,\lambda) - \mathcal{L}(x,\lambda)}{\varepsilon}\,.$$

6) Montrer que les conditions nécessaires d'optimalité sont données par l'équation d'Euler

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(t^2-1)x = 0 \tag{16}$$

et la condition, dite de transversalité,

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \tag{17}$$

7) On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Vérifier que $x_0(t) = \dfrac{2}{\pi^{1/4}}e^{-t^2/2}$ satisfait (16) pour $\lambda = 1$, la condition de transversalité (17) et la contrainte isopérimétrique (15). Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{dx_0}{dt})^2(t)\,dt$. Montrer que la fonction x_0 est une solution au problème de minimisation (14)-(15).

8) Montrer que la plus petite constante C est égale à 2.

Indication : On pourra montrer en utilisant (12) que si C_{opt} est la plus petite constante alors

$$\frac{1}{C_{\text{opt}}^2} \le \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} (\frac{dy}{dt})^2\,dt$$

pour toute fonction $y \in X$ satisfaisant la contrainte isopérimétrique (15).