ECOLE POLYTECHNIQUE
Analyse numérique et optimisation (MAP431)
Contrôle classant du 26 Juin 2006
Durée : 4 heures

Corrigé

1 Problème

Q1

Correction *On remarque tout d'abord que le domaine Ω étant régulier de classe C^2, on a l'équivalence suivante*

$$u \in H_0^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in H^1(\Omega) \text{ et } u_\Gamma = 0$$

Soit $u \in H^2(\Omega)$ vérifiant (1), on veut montrer que u est solution de la formulation variationnelle (2). Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on multiplie (1) par v et on intègre par parties. La nullité de v annule le terme de bord dans la formule de Green et on obtient ainsi (2). Inversement, soit $u \in H^2(\Omega)$ et vérifiant (2) pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on veut montrer que u vérifie (1). La formule de Green montre alors que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (-\epsilon\Delta u + a.\nabla u - f)\, v = 0$$

Par densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on conclut que

$$-\epsilon\Delta u + a.\nabla u - f = 0$$

Q2

Correction *On intègre par parties et on utilise la nullité de u (ou de v) sur la frontière :*

$$b(u,v) = \int_\Omega (a\cdot\nabla u)\, v = -\int_\Omega u \,\mathrm{div}(a\, v) = -\int_\Omega u\,\mathrm{div}(a)\, v - \int_\Omega u\,(a\cdot\nabla v)$$

D'après l'énoncé, div$(a) = 0$ et on a ainsi

$$b(u,v) = -\int_\Omega u\,(a\cdot\nabla v) = -b(v,u)$$

Pour utiliser le théorème de Lax-Milgram, on introduit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} A : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longrightarrow \textstyle\int_\Omega \epsilon\nabla u\,\nabla v + b(u,v) \end{aligned}$$

La continuité de A vient de la majoration suivante :

$$|A(u,v)| \le \epsilon\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \max(\epsilon, \|a\|_{L^\infty(\Omega)})\|u\|_{H^1}\,\|v\|_{H^1}$$

Pour la coercivité de A, on utilise

- *le caractère borné de Ω qui permet d'écrire l'inégalité de Poincaré (dont la constante est notée C_P)*
- *l'antisymétrie de u donne $b(u,u) = 0$*

On a ainsi

$$A(u,u) = \int_\Omega \epsilon |\nabla u|^2 \geq \frac{\epsilon}{C_P + 1} \|u\|_{H^1}^2$$

La continuité de la forme linéaire l

$$\begin{array}{rcl} l : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longrightarrow & \int_\Omega f\, v \end{array}$$

vient de $l(v) \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$.
Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sur A et l sont vérifiées et on a ainsi l'unicité et l'existence d'une solution de (2).

Q3

Correction *On part de $A(u,u) = l(u)$ et on utilise la coercivité de A et la continuité de l :*

$$\frac{\epsilon}{C_P + 1} \|u\|_{H^1}^2 \leq A(u,u) = l(u) \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1} \,,$$

soit en simplifiant par $\|u\|_{H^1}$ (en supposant $\|u\|_{H^1}$ non nul),

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{C_P + 1}{\epsilon} \|f\|_{L^2} \,.$$

Q4

Correction *On écrit (1) sous la forme*

$$-\Delta u = \frac{1}{\epsilon}(-a \cdot \nabla u + f)$$

D'après le rappel de cours, on a :

$$\|u\|_{H^2} \leq \frac{C_\Omega}{\epsilon} \| - a \cdot \nabla u + f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\epsilon} (\|a\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} + \|f\|_{L^2})$$

En utilisant la majoration de la question précédente, on a

$$\|u\|_{H^2} \leq \frac{C_\Omega}{\epsilon} \left(\|a\|_{L^\infty} \frac{C_P + 1}{\epsilon} + 1\right) \|f\|_{L^2}$$

Q5

Correction *Pour ϵ petit, la constante C_1 est en $1/\epsilon$ et la constante C_2 est en $1/\epsilon^2$.*

Q6

Correction *La discrétisation s'écrit : trouver $u_h \in V_h$ telle que pour tout $v_h \in V_h$*

$$A(u_h, v_h) = l(v_h)$$

La forme bilinéaire A est coercive et continue et la forme l est linéaire, on a existence et unicité de la solution u_h et on peut appliquer le lemme de Cea qui donne :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \max(\epsilon, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \frac{C_P + 1}{\epsilon} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

Q7

Correction *On a une suite de maillages réguliers de Ω et on a alors pour $k+1 > d/2$ l'existence d'une constante C indépendante de h et de v telle que :*

$$\|v - r_h(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

où $r_h(v)$ est l'opérateur d'interpolation des éléments finis P_k introduit dans le cours. Pour $k = 1$, on a le résultat voulu.
D'après la question précédente, on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

En appliquant le résultat d'interpolation on a alors :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3\, C_4\, \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Finalement, en utilisant l'estimation sur la norme H^2 de la solution u, on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3\, C_4\, C_2\, \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Q8

Correction *Il est facile de voir que la constante C_5 est en $1/\epsilon^3$ quand ϵ tend vers zéro.*

Q9

Correction *Il suffit de prendre $v_h = u_h$ comme fonction test dans la formulation variationnelle discrète.*

Q10.a

Correction *L'espace des fonctions polynomiales de degré inférieure ou égal à 1 de R à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sont donc équivalentes, en particulier les normes L^2 et H^1. De plus, on a pour tout fonction p :*

$$\|\nabla p\|_{L^2(R)} \leq \|p\|_{H^1(R)}$$

Q10.b

Correction *On procède comme dans le livre de cours en introduisant une matrice inversible B et un vecteur b tels que pour tout $x \in K$ il existe $x_0 \in R$ vérifiant*

$$x = Bx_0 + b$$

Par changement de variable, on obtient que pour tout p polynôme de degré 1 de K à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\|\nabla p\|_{L^2(K)} \leq \|B^{-1}\| \, |det(B)|^{1/2} \, \|\nabla p_0\|_{L^2(R)}$$

où $p_0(x_0) = p(Bx_0 + b)$. D'après le a) de la question, on a donc

$$\|\nabla p\|_{L^2(K)} \leq C_R \|B^{-1}\| \, |det(B)|^{1/2} \, \|p_0\|_{L^2(R)}$$

Par changement de variable, on a :

$$\|p_0\|_{L^2(R)} = |det(B)|^{-1/2} \, \|p\|_{L^2(K)}$$

Finalement, on a :

$$\|\nabla p\|_{L^2(K)} \leq C_R \, \|B^{-1}\| \, \|p\|_{L^2(K)}$$

Encore d'après le livre de cours, on a :

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{diam(R)}{\rho(K)}$$

En utilisant la régularité de la suite des maillages, on a :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \|\nabla p\|_{L^2(K)} \leq C_R \frac{C_r}{h} \|p\|_{L^2(K)} \,.$$

On conclut de la manière suivante :

$$\|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla p\|^2_{L^2(K)} \leq (C_R \frac{C_r}{h})^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|p\|^2_{L^2(K)} \leq (C_R \frac{C_r}{h})^2 \|p\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Q11

Correction *On utilise l'inégalité (11) dans l'équation (10) et on obtient ainsi :*

$$0 \leq \int_\Omega u_h = \epsilon \int_\Omega |\nabla u_h|^2 \leq C_6^2 \epsilon h^{-2} \|u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Il est facile de vérifier que $\epsilon_0 = \dfrac{h^2}{N^3 \, C_6^2}$ répond à la question.

Q12

Correction *Il est clair que l'expression donnée est la solution exacte et on a pour $0 \leq x \leq 1 - \delta$:*

$$|u_\epsilon(x) - u_0(x)| = \frac{|1 - \exp(x/\epsilon)|}{|1 - \exp(1/\epsilon)|} \leq \frac{|1 - \exp((1-\delta)/\epsilon)|}{|1 - \exp(1/\epsilon)|}$$

Cette majoration donne la convergence uniforme, quand ϵ tend vers zéro, de u_ϵ vers u_0 sur l'intervalle $[0, 1 - \delta]$.

Q13

Correction *On a*

$$\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)} \leq \|u_\epsilon - u_0\|_{L^\infty(0,1-h)} + \|u_0 - r_h(u_0)\|_{L^\infty(0,1-h)} + \|r_h(u_0 - u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)}$$

Le second terme de la majoration est en fait nul. En effet, la fonction u_0 est linéaire et est donc égale à son interpolation. Le troisième et dernier terme se majore par $\|u_0 - u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1-h)}$. Finalement, on a :

$$\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)} \leq 2\,\|u_\epsilon - u_0\|_{L^\infty(0,1-h)}$$

Sur l'intervalle $[1-h,1]$, on a la majoration

$$\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)} \leq \|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1-h)} + \|r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)} \leq 2\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1-h)} \leq 2$$

Puis, on majore la normes L^2 par :

$$\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^2(0,1-h)} \leq \|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)}\sqrt{1-h} \leq \|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1-h)}$$

et

$$\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^2(1-h,1)} \leq \|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^\infty(1-h,1)}\sqrt{h} \leq 2\sqrt{h}\,.$$

On a donc finalement,

$$\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^2(0,1)} \leq 2\|u_\epsilon - u_0\|_{L^\infty(0,1-h)} + 2\sqrt{h}.$$

Comme $\|u_\epsilon - u_0\|_{L^\infty(0,1-h)} \to 0$ quand $\epsilon \to 0$, on en déduit que $\|u_\epsilon - r_h(u_\epsilon)\|_{L^2(0,1)} \leq 3\sqrt{h}$ pour ϵ suffisament petit.

Q14

Correction *On raisonne par l'absurde en supposant que la majoration (18) existe. Nous allons tout d'abord montrer que $\int u_{\epsilon,h}$ est minoré par une constante strictement positive pour h fixé et ϵ assez petit. En effet,*

$$\int_0^1 u_{\epsilon,h} = \int_0^1 u_{\epsilon,h} - u_e + \int_0^1 u_\epsilon - u_0 + \int_0^1 u_0 \geq -\|u_{\epsilon,h} - u_\epsilon\|_{L^2} + \int_0^1 u_\epsilon - u_0 + \int_0^1 u_0$$

D'après la majoration (18) et le théorème de la convergence dominée ($u\epsilon$ tend vers u_0 presque partout) :

$$\int_0^1 u_{\epsilon,h} \geq -3\sqrt{h} - o(\epsilon) + 1/2$$

Donc, pour h assez petit, à la limite quand ϵ tend vers zéro, $\int_0^1 u_{\epsilon,h} \geq 1/4$.
D'après la question (11), on doit donc avoir que $u_{\epsilon,h}$ tend vers l'infini quand ϵ tend vers zéro. Mais,

$$\|u_{\epsilon,h}\|_{L^2} \leq \|u_{\epsilon,h} - u_\epsilon\|_{L^2} + \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} \leq 3\sqrt{h} + o(\epsilon) + \|u_0\|_{L^2}$$

et on a ainsi une contradiction.

Q15

Correction *En dimension 1 d'espace et pour des éléments finis P_1, on sait que le terme $\epsilon\int_{]0,1[} u'_{\epsilon,h}\, v'_h$ correspond au schéma différences finies :*

$$\epsilon\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h}$$

On note ϕ_i la fonction chapeau valant 1 en ih et zéro ailleurs. Un calcul direct montre que pour $j \neq i \pm 1$:

$$\int_{]0,1[} \phi'_i\,\phi_j = 0$$

et que

$$\int_{]0,1[} \phi_i' \, \phi_{i\pm1} = \mp 1/2$$

Pour le terme venant de la convection $\int_{]0,1[} u'_{\epsilon,h} \, v_h$, *on a donc le schéma aux différences finies suivants :*

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2}$$

Au terme multiplicatif h *près, il s'agit d'un schéma centré connu pour ne pas être stable dans la limite* ϵ *tend vers zéro.*

Q16

Correction *Remarquons tout d'abord que la modification proposée revient à ajouter un terme de diffusion numérique avec un coefficient de diffusion* β_h.
D'autre part, le schéma décentré amont de discrétisation de u' *:*

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Il a la forme d'un schéma centré auquel on ajoute une diffusion numérique avec un coefficient de diffusion $h/2$. *En prenant* $\lambda = 1/2$, *le schéma proposé coïncide donc avec un schéma décentré amont.*

2 Exercice d'optimisation

Q1

Correction *Soient* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *deux éléments distincts de* I^n *et* $\theta \in]0,1[$, *il faut montrer que*

$$f(\theta \, x + (1-\theta) \, y) < \theta \, f(x) + (1-\theta) \, f(y) \, .$$

Il existe $1 \leq i_0 \leq n$ *tel que* $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ *et par stricte convexité, on a :*

$$f_{i_0}(\theta \, x_{i_0} + (1-\theta) \, y_{i_0}) < \theta \, f(x_{i_0}) + (1-\theta) \, f(y_{i_0}) \, .$$

Les fonctions f_i *étant convexes, on a pour* $i \neq i_0$ *:*

$$f_i(\theta \, x_i + (1-\theta) \, y_i) \leq \theta \, f(x_i) + (1-\theta) \, f(y_i) \, .$$

En sommant les inégalités ci-dessus ($i \neq i_0$), *on prouve la stricte convexité de* f.

Q2.a

Correction *On pose*

$$C := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ tel que pour tout } i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum_i x_i \leq 1\} \, ,$$

$B := f(1/n, \ldots, 1/n)$ et $m := \min_i \min_{0 \le x \le 1} f_i(x)$.
La fonction f_i tendant vers l'infini en zéro, il existe $\epsilon_i > 0$ tel que :

$$x_i \le \epsilon_i \Rightarrow f_i(x_i) > B - (n-1)m$$

On pose $\epsilon = \min_i \epsilon_i$. Alors, soit C tel que l'une de ses coordonnées (i_0 par exemple) soit plus petite que ϵ, on a :

$$f(x) = \sum_i f_i(x_i) > B - (n-1)m + \sum_{i \neq i_0} f_i(x_i) \ge B - (n-1)m + (n-1)m = B$$

On a ainsi $f(x) > B$ et le minimum de f sur C ne peut donc être atteint en x. Cela prouve l'équivalence des deux problèmes d'optimisation.

Q2.b

Correction *On pose*

$$C_\epsilon := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ tel que pour tout } i, x_i \ge \epsilon \text{ et } \sum_i x_i \le 1\},$$

D'après la question précédente, il est équivalent de montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème de minimisation sur C_ϵ.
L'ensemble C_ϵ est fermé et borné en dimension finie et est donc compact et f est continue. Le problème de minimisation sur C_ϵ admet donc au moins une solution. L'unicité vient de la convexité de C_ϵ et de la stricte convexité de f.

Q3.a

Correction *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de C ne saturant pas la contrainte $x_1 + \ldots + x_n \le 1$ c.a.d. tel que $x_1 + \ldots + x_n < 1$. Nous allons montrer que le minimum ne peut être atteint en ce point. En effet, il est alors possible d'augmenter x_1 tout en restant dans C_ϵ. La stricte décroissance de f_1 diminuera strictement la valeur de f.*

Q3.b

Correction *Quitte à prendre ϵ plus petit, on peut supposer que les contraintes $x_i \ge \epsilon$ sont inactives. La relation d'optimalité s'écrit alors :*

$$\exists \lambda \ge 0 \text{ tel que pour tout } i,\ f'(x_i^*) + \lambda = 0$$

On a ainsi les égalités demandées.

Q4

Correction *Pour le cas (i), on a $f_i'(x) = -p_i/t$ et $f_i''(x) = p_i/t^2$. Pour le cas (ii), on a $f_i'(x) = -p_i/t^2$ et $f_i''(x) = 2p_i/t^3$. Dans les deux cas, la stricte décroissance de f_i sur $]0, +\infty[$ se déduit du signe de f_i' et la stricte convexité se déduit de la stricte positivité de f_i''. Les limites infinies des fonctions en zéro sont évidentes.*
Nous considérons maintenant le calcul effectif de la solution basé sur la relation d'optimalité et le fait que $x_1^* + \ldots + x_n^* = 1$.

Cas (i) La relation d'optimalité donne :

$$p_i/x_i^* = \lambda \Rightarrow x_i^* = p_i/\lambda\,.$$

On déduit de la relation $x_1^* + \ldots + x_n^* = 1$:

$$1 = \frac{1}{\lambda} \sum_i p_i \Rightarrow \lambda = \sum_i p_i$$

Finalement, on a :

$$x_i^* = \frac{p_i}{\sum_j p_j} .$$

Cas (ii) La relation d'optimalité donne :

$$p_i/(x_i^*)^2 = \lambda \Rightarrow x_i^* = \sqrt{p_i/\lambda} .$$

On déduit de la relation $x_1^* + \ldots + x_n^* = 1$:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_i \sqrt{p_i} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \sum_i \sqrt{p_i}$$

Finalement, on a :

$$x_i^* = \frac{\sqrt{p_i}}{\sum_j \sqrt{p_j}} .$$

Q5

Correction *Sur son ensemble de définition, la fonction $x^3 y^4 z^5$ est positive et il est donc équivalent de la maximiser que de minimiser l'opposé de son logarithme : $-3\log(x) - 4\log(y) - 5\log(z)$. On est dans le cas i) de la question précédente et on a ainsi : $x^* = 3/12$, $y^* = 4/12$ et $z^* = 5/12$.*

Albert Cohen et Frédéric Nataf
Juin 2006.