ECOLE POLYTECHNIQUE
Analyse numérique et optimisation (MAP431)
Contrôle classant du 26 Juin 2006
Durée : 4 heures

Le texte se compose d'un problème et d'un exercice. Il sera tenu compte de manière **essentielle** de la clarté et de la précision des démonstrations, en particulier de la citation précise des résultats du cours.

1. Problème (14 points)

Dans ce problème Ω désigne un domaine de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, et on s'intéresse à l'équation d'advection-diffusion

$$-\varepsilon\Delta u + a.\nabla u = f \text{ sur } \Omega, \quad u_{|\Gamma} = 0, \tag{1}$$

ainsi qu'à sa discrétisation numérique par la méthode des éléments finis. On suppose ici que $f \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, et $a(x) = (a_1(x), \cdots, a_d(x))$ est un champ de vecteur dont toutes les composantes sont de classe C^1 et uniformément bornées sur Ω, et tel que $\mathrm{div}(a) = 0$ en tout point de Ω. On note

$$\|a\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \left(\sum_{i=1}^{d} |a_i(x)|^2\right)^{1/2}$$

L'équation d'advection-diffusion modélise la diffusion d'une quantité u et son transport par le champ de vecteur a. Elle intervient dans de nombreux domaines: mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes linéarisées, transferts thermiques, ...), électronique (transport-diffusion de charges dans les semi-conducteurs), environnement (transports de polluants, de particules radioactives, ...), mathématiques financières (équation de Black-Scholes), ... L'objectif du problème est de mettre en évidence et d'étudier les difficultés numériques qui apparaissent dans la limite où le coefficient de diffusion ε tend vers 0.

On notera u_ε la solution de (1) associée au coefficient de diffusion ε.

Les trois parties du problème ne sont pas indépendantes mais il est possible d'utiliser les résultats de questions non-traitées pour aborder les questions suivantes.

Partie I : étude théorique

On suppose dans cette partie que Ω est un domaine régulier de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que toute solution $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ de (1) est aussi solution de la formulation variationnelle suivante: trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon . \nabla v + \int_\Omega (a.\nabla u_\varepsilon)\, v = \int_\Omega f v. \tag{2}$$

Montrer réciproquement que toute solution u_ε de (2) qui appartient à $H^2(\Omega)$ est aussi solution de (1).

2. Montrer que la forme bilinéaire $b(u,v) = \int_\Omega (a.\nabla u)v$ est antisymétrique sur $H_0^1(\Omega)$, c'est à dire $b(u,v) + b(v,u) = 0$. En déduire que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram s'appliquent pour en déduire l'existence et l'unicité de la solution de (2).

3. Etablir l'estimation

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3}$$

où l'on exprimera C_1 en fonction de la constante de Poincaré C_P du domaine Ω, de la norme $\|a\|_{L^\infty}$ et de $\varepsilon > 0$.

4. On rappelle que si v est la solution de la formulation variationnelle du problème $-\Delta v = g$ sur Ω avec condition aux limites $v = 0$ sur Γ et $g \in L^2(\Omega)$, on a l'estimation de régularité

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \le C_\Omega \|g\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4}$$

où la constante C_Ω ne dépend que du domaine Ω. En déduire que la solution u_ε de (2) vérifie une estimation similaire de la forme

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \le C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5}$$

où l'on exprimera C_2 en fonction de C_1, C_Ω, $\|a\|_{L^\infty}$ et $\varepsilon > 0$.

5. Montrer que les constantes C_1 et C_2 se déteriorent (c'est à dire tendent vers $+\infty$) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Partie II : étude numérique

On suppose dans cette partie que Ω est un domaine polyhédrique convexe de $\mathbb{R}^d$, et on admettra que tous les résultats obtenus dans la première partie du problème restent valables dans cette situation. On considère une suite $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de maillages réguliers conformes de Ω par des simplexes (triangles si $d = 2$, tétraèdres si $d = 3$, etc). On rappelle que

1. la suite $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(K)$ tend vers 0,
2. il existe une constante C_r telle que pour tout $h > 0$ et $K \in \mathcal{T}_h$, on a $\mathrm{diam}(K) \leq C_r\rho(K)$ où $\rho(K)$ est le rayon de la plus grande boule contenue dans K.

On désigne par V_h l'espace d'éléments finis P_1 de Lagrange associé au maillage $\mathcal{T}_h$. On s'intéresse à la discrétisation de (1) par la méthode de Galerkin: trouver $u_{\varepsilon,h} \in V_h$ telle que pour tout $v_h \in V_h$

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u_{\varepsilon,h}.\nabla v_h + \int_\Omega (a.\nabla u_{\varepsilon,h})\, v_h = \int_\Omega f v_h. \tag{6}$$

6. Montrer que (6) admet une solution unique $u_{\varepsilon,h}$ qui vérifie l'estimation d'erreur

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \inf_{v_h\in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_{H^1(\Omega)}, \tag{7}$$

où on exprimera C_3 en fonction de C_P, $\|a\|_{L^\infty}$ et $\varepsilon > 0$.

7. Montrer que pour $d \leq 3$, on a l'estimation

$$\inf_{v_h\in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 h\, \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}, \tag{8}$$

où la constante C_4 ne dépend que de C_r et d. On admettra que cette estimation reste vraie dans le cas $d > 3$. En déduire l'estimation d'erreur

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_5 h \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{9}$$

où on exprimera C_5 en fonction de C_2, C_3 et C_4.

8. Montrer que la constante C_5 se déteriore (c'est à dire tend vers $+\infty$) lorsque $\varepsilon \to 0$.

9. Dans toute la suite du problème, on suppose $f = 1$. Montrer l'égalité

$$\int_\Omega u_{\varepsilon,h} = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{\varepsilon,h}|^2. \tag{10}$$

10. Le but de cette question est de prouver le résultat suivant, dit "inégalité inverse" : il existe une constante C_6 telle que pour tout $h > 0$ et $v_h \in V_h$

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6 h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

a. Soit R le simplexe défini par l'équation $0 \leq x_1 + \cdots + x_d \leq 1$ et $x_i \geq 0$ pour tout i. Montrer qu'il existe une constante C_R telle que pour tout polynôme p de degré 1

$$\|p\|_{H^1(R)} \leq C_R \|p\|_{L^2(R)}, \tag{12}$$

et en déduire

$$\|\nabla p\|_{L^2(R)} \leq C_R \|p\|_{L^2(R)}. \tag{13}$$

b. Montrer que pour tout simplexe $K \in \mathcal{T}_h$ et pour tout polynôme p de degré 1,

$$\|\nabla p\|_{L^2(K)} \leq C_6 h^{-1} \|p\|_{L^2(K)}. \tag{14}$$

où C_6 ne dépend que de C_r et C_R, et en déduire la validité de (11).

11. Montrer que l'on a l'encadrement

$$0 \leq \int_\Omega u_{\varepsilon,h} \leq C_6^2 \varepsilon h^{-2} \|u_{\varepsilon,h}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{15}$$

En déduire que pour h fixé, dans la limite $\varepsilon \to 0$ on a soit $\|u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$ (comportement explosif), soit $\int_\Omega u_{\varepsilon,h} \to 0$ (comportement oscillant). Plus précisément, on montrera que pour tout $N > 0$, il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a $\|u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega)} > N$ ou $|\int_\Omega u_{\varepsilon,h}| \leq 1/N$.

Partie III : le cas monodimensionel

Afin de vérifier plus précisément que le comportement de la solution et de son approximation numérique se déteriore quand, à h fixé, $\varepsilon \to 0$, on considère le cas monodimensionel avec $\Omega =]0,1[$ et $f = a = 1$ soit

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' = 1 \text{ sur }]0,1[, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \tag{16}$$

On applique la méthode des éléments finis P_1 sur le maillage délimité par les points ih, $i = 1, \cdots, N-1$ avec $N = 1/h$. On note r_h l'opérateur d'interpolation sur l'espace V_h associé à ce maillage.

12. Montrer que la solution exacte u_ε a pour expression

$$u_\varepsilon(x) = x - \frac{1 - \exp(x/\epsilon)}{1 - \exp(1/\epsilon)}$$

et montrer qu'elle converge ponctuellement sur $[0,1[$ vers la fonction $u_0(x) = x$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, 1-\delta]$ $(\delta > 0)$. Il sera utile pour la compréhension d'esquisser son aspect lorsque ε est petit.

13. Prouver l'estimation

$$\|u_\varepsilon - r_h u_\varepsilon\|_{L^2(]0,1[)} \leq 2\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(]0,1-h[)} + 2h^{1/2} \tag{17}$$

Indication: on pourra prouver les estimations $\|u_\varepsilon - r_h(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(]1-h,1[)} \leq 2$ et $\|u_\varepsilon - r_h(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(]0,1-h[)} \leq 2\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(]0,1-h[)}$.

En déduire que si l'on fixe h et que l'on fait tendre ε vers 0, on a toujours l'estimation

$$\|u_\varepsilon - r_h u_\varepsilon\|_{L^2(]0,1[)} \leq 3h^{1/2} \tag{18}$$

lorsque ε est suffisament petit.

14. (Difficile) On pourrait espérer une estimation du type

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_7 h^{1/2}, \tag{19}$$

pour la solution de Galerkin $u_{\varepsilon,h}$ si l'on fixe h et que l'on fait tendre ε vers 0, avec une constante C_7 indépendante de h et ε. Montrer par l'absurde et en utilisant le résultat de la question 11 qu'une telle estimation n'est pas possible.

15. En utilisant la base des fonctions chapeau pour l'espace V_h, donner l'expression du système discret associé à la méthode de Galerkin (dont les inconnues sont les valeurs de u_h aux neuds ih, pour $i = 1, \cdots, N-1$). Montrer qu'il coincide avec un schéma aux différences finies où le terme de convection u'_ε est discrétisé par une différence centrée. Comment cela se relie-t-il intuitivement avec les problèmes numériques qui ont été établies dans la question précédente.

16 Une solution possible aux problèmes précédents consiste à discrétiser (1) par une formulation variationnelle du type: trouver $u_{\varepsilon,h} \in V_h$ telle que pour tout $v_h \in V_h$

$$\varepsilon \int_{]0,1[} u'_{\varepsilon,h}\, v'_h + \int_{]0,1[} u'_{\varepsilon,h}\, v_h + \int_{]0,1[} \beta_h\, u'_{\varepsilon,h}\, v'_h = \int_{]0,1[} f v_h. \tag{20}$$

avec β_h choisi de manière adéquate. Pour préciser le choix de β_h, on le cherche sous la forme

$$\beta_h = \lambda\, h\,.$$

Pour quelle valeur de λ, le schéma coincide-t-il avec un schéma aux différences finies où le terme de convection u'_ε est discrétisé par une différence décentrée amont dont on connait la stabilité dans la limite ε tend vers zéro?

2. Exercice d'optimisation (6 points)

1. Soit un ensemble de n fonctions d'une variable $(f_1, \cdots, f_n)$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit la fonction de n variables définie sur I^n par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n). \tag{21}$$

Montrer que si chaque f_i est strictement convexe, alors f est aussi strictement convexe.

2. On suppose dans toute la suite que les f_i sont des fonctions continues strictement convexes définies sur $]0, +\infty[$ et telles que $\lim_{t\to 0} f_i(t) = +\infty$.
a. Montrer que le problème de minimisation

$$\mathrm{Min}_{x_1,\cdots,x_n>0,\sum_{i=1}^n x_i\leq 1} f(x_1,\cdots,x_n), \tag{22}$$

est équivalent au problème

$$\mathrm{Min}_{x_1,\cdots,x_n\geq\varepsilon,\sum_{i=1}^n x_i\leq 1} f(x_1,\cdots,x_n), \tag{23}$$

lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisament petit.
b. Montrer qu'il existe une solution unique au problème (23), qui est aussi l'unique solution de (22) lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisament petit. On note $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ sa solution.

3. On suppose en plus que les fonctions f_i sont dérivables et strictement décroissantes.
a. Montrer que lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisament petit, la seule contrainte active dans le problème (23) est $x_1 + \cdots + x_n \leq 1$, c'est à dire que l'on a $x_1^* + \cdots + x_n^* = 1$ et $x_i^* > \varepsilon$. En déduire que les contraintes sont qualifiées
b. Montrer que les $f_i'(x_i^*)$ sont tous égaux.

4. On considère les cas particulier (i) $f_i(t) = -p_i \log(t)$ et (ii) $f_i(t) = p_i/t$, où les p_i sont des nombres strictement positifs. Montrer que les résultats obtenus s'appliquent à ces deux cas et donner l'expression de la solution $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ en fonction de $(p_1, \cdots, p_n)$.

5. Calculer la solution du problème suivant

$$\mathrm{Max}_{x,y,z>0,x+y+z\leq 1} x^3y^4z^5, \tag{24}$$

Albert Cohen et Frédéric Nataf
Juin 2006.