Promotion X 2000 — Mardi 2 juillet 2002

Cours Analyse et numérique et optimisation
Contrôle classant, durée 4h

Sujet donné par F. Bonnans et P. Joly

Documents autorisés : polycopiés du cours et notes personnelles (pas de calculettes). Le sujet comprend deux exercices, de poids respectif 1/3 et 1/6 de la note, et un problème de poids 1/2. Exercices et problème sont indépendants. Rédiger sur des copies séparées de couleurs différentes :

- **Les deux exercices sur feuilles blanches,**
- **Le problème sur feuilles jaunes.**

1 Première Partie : Exercices (1/2 de la note)

1.1 Exercice 1 : Minimisation d'un maximum fini (1/3 de la note)

Soient g_i, $i = 1$ à p, des fonctions continûment différentiables au sens de Fréchet de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Posons

$$J(x) := \max_{1 \leq i \leq p} g_i(x).$$

On note l'*ensemble des indices actifs* par

$$I(x) := \{i; g_i(x) = J(x)\}.$$

On considère le problème d'optimisation sans contrainte

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x). \tag{P}$$

1. Montrer que ce problème revient à résoudre

$$\inf_{(v,x) \in K} v, \tag{P'}$$

où

$$K := \{(v, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \quad g_i(x) - v \leq 0, \quad i = 1, \dots, p\}.$$

2. Montrer qu'en tout point de minimum (v, x) de (P'), la condition de qualification des contraintes (définition 11.2.13) est satisfaite.

3. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^p$ telle que, si x est point de minimum de (P), alors

$$\lambda \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i'(x) = 0; \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1; \quad \lambda_i = 0,\ i \notin I(x). \tag{SO}$$

4. Dans la suite on dira que x est un *point critique* de J s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que (x, λ) est solution de (SO). Montrer que, si les fonctions g_i, $i = 1$ à p, sont convexes, tout point critique de J est point de minimum de (P).

5. On définit la *dérivée directionnelle* de J au point $x \in \mathbb{R}^n$ dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ comme la limite, si elle existe,

$$J'(x, d) :\, = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(x + td) - J(x)}{t}.$$

Par $t \downarrow 0$ on veut dire que t est positif et tend vers 0. Montrer que les dérivées directionnelles de J existent, et satisfont la formule

$$J'(x, d) = \max_{i \in I(x)} \{g_i'(x) d\}, \qquad \text{pour tout } \ (x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que x est un point critique de J si et seulement si $J'(x, d) \geq 0$, pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ (on pourra s'inspirer de l'idée du passage de (P) à (P')).

7. On considère la "linéarisation" du problème (P) en $x \in \mathbb{R}^n$, définie comme suit :

$$\inf_{d \in \mathbb{R}^n} \max_{1 \leq i \leq p} \{g_i(x) + g_i'(x) d\}. \tag{L_x}$$

On notera $\phi(x)$ la *valeur* de l'infimum; *on suppose l'infimum atteint, et l'application* $x \mapsto \phi(x)$ *continue.* Montrer que $\phi(x) \leq J(x)$, avec égalité si et seulement si x est point critique de J.

8. On introduit l'algorithme de *Programmation linéaire successive* :

   (i) Initialisation : Choisir $x^1 \in \mathbb{R}^n$; $\quad k :\, = 1$.

   (ii) Choix de la direction de déplacement : calculer d^k, point de minimum du problème (L_{x^k}).

   (iii) Recherche linéaire : calculer μ_k, solution de (on suppose que ce point μ_k existe)

   $$J(x^k + \mu_k d^k) \leq J(x^k + \mu d^k), \qquad \text{pour tout} \quad \mu \geq 0.$$

   (iii) Si $\phi(x^k) = J(x^k)$, arrêt.
   $x^{k+1} :\, = x^k + \mu_k d^k; \quad k :\, = k + 1$. Aller en (ii).

a) Montrer que

$$J'(x^k, d^k) \leq \phi(x^k) - J(x^k). \tag{1}$$

b) En déduire que $\mu_k > 0$ si $\phi(x^k) < J(x^k)$.

9. *On suppose dans la suite les suites x^k et d^k bornées.* Soit $R > 0$. Montrer l'existence de $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, vérifiant $\lim_{\mu \to 0} r(\mu)/\mu = 0$, telle que, pour tout x et d dans la boule de rayon R, centrée en 0, on a

$$J(x + \mu d) \leq J(x) + \mu(\phi(x) - J(x)) + r(\mu).$$

10. En déduire que tout point d'adhérence de $\{x^k\}$ est point critique de J.

1.2 Exercice 2: Equation elliptique avec condition aux limites non locales (1/6 de la note)

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ de frontière Γ. On pose $V := H^1(\Omega)$. Considérons la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $L(\cdot)$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega (u\, v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx + \alpha \left(\int_\Gamma u\, d\sigma \right) \left(\int_\Gamma v\, d\sigma \right), \quad \forall\, (u,v) \in V \times V, \\ L(v) = \displaystyle\int_\Omega f v\, dx, \quad \forall\, v \in V. \end{array} \right.$$

Ici $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\Omega)$ sont donnés. On considère les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V = H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2}$$

Dans la suite de l'exercice, on va étudier (2) et donner son interprétation comme une formulation variationnelle d'une équation aux dérivées partielles.

1) Montrer l'existence et l'unicité de la solution de (2) lorsque α est positif ou nul.

2) Expliquer pourquoi on a toujours existence et unicité lorsque α est négatif mais suffisamment petit en valeur absolue.

3) On suppose $\alpha \geq 0$. Montrer que la solution de (14) est solution unique d'une équation aux dérivées partielles sur Ω, avec des conditions aux limites convenables. Pour établir l'équivalence des deux formulations, on se contentera de montrer que, si u est une solution d'un des problèmes et appartient à $H^2(\Omega)$, alors elle est également solution de l'autre.

2 Problème : Analyse numérique d'une méthode d'éléments finis non conforme (1/2 de la note)

Avertissement : *Le problème est découpé en quatre parties qui peuvent être traités comme des exercices indépendants, à ceci près que la partie III fait référence aux notations de la partie I et utilise les résultats des parties I et II (questions 1 et 10) qui sont explicites dans l'énoncé et que la partie IV sert à démontrer un résultat utilisé dans la partie II.*

I Présentation de la méthode.

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert polygonal convexe de $\mathbb{R}^2$. On pose $H = L^2(\Omega)$ et $V = H^1(\Omega)$. Pour tout entier m et toute fonction u dans $H^m(\Omega)$, $\|u\|_{m,\Omega}$ désignera la norme de u dans $H^m(\Omega)$ ($m = 0$ correspondant à L^2). On notera par ailleurs $|u|_{m,\Omega}$ la semi-norme de u dans $H^m(\Omega)$, définie par:

$$|u|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 \, dx.$$

(On renvoie au polycopié p.99 pour la définition de $\partial^\alpha u$.)

On s'intéresse à l'approximation numérique de la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

où f est donné dans $L^2(\Omega)$. Comme Ω est convexe, on sait (c'est un résultat de régularité que l'on admettra) que la solution u appartient à $H^2(\Omega)$. On rappelle que (3) est équivalent au problème variationnel (P) suivant:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

où on a posé:

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega (u\, v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx, \quad \forall\, (u,v) \in V \times V, \\ l(v) = \displaystyle\int_\Omega f v \, dx, \quad \forall\, v \in H. \end{cases}$$

Dans la suite, $\mathcal{T}_h$ désigne une famille de triangulations (conformes au sens classique des éléments finis) de Ω, famille qu'on suppose régulière. Pour tout triangle K de $\mathcal{T}_h$, h_K

désignera le diamètre de K et ρ_K le rayon du cercle inscrit (appelé aussi *rondeur* de K). Pour toute fonction v (ou v_h) définie sur Ω, on désignera par v_K la restriction de v à K. Rappelons que le pas de la triangulation $h = \sup_K h_K$ est destiné à tendre vers 0.

Soit $\mathcal{A}_h = \{a \in \mathcal{A}_h\}$ l'ensemble des arêtes de la triangulation $\mathcal{T}_h$. On partitionne $\mathcal{A}_h$ en deux parties: $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h^i \cup \mathcal{A}_h^\Gamma$ où $\mathcal{A}_h^\Gamma = \{a \in \mathcal{A}_h \ / \ a \subset \partial\Omega\}$ (arêtes frontalières) et $\mathcal{A}_h^i = \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{A}_h^\Gamma$ (arêtes internes). Pour toute arête a, on désigne par M_a le milieu de a. On définit les espaces discrets:

$$W_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \ / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, v_K \in P_1(K)\}$$

$$V_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \ / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, v_K \in P_1(K); \ \forall a = \partial K_1 \cap \partial K_2 \in \mathcal{A}_h^i, v_{K_1}(M_a) = v_{K_2}(M_a)\}$$

1) Quelle relation (simple) y a t-il entre les espaces W_h et V_h?

2) L'espace V_h est-il un sous-espace de V (argumentez votre réponse)?

3) On pose:

$$V + V_h = \{u = v + v_h, v \in V, v_h \in V_h\} \subset H.$$

Expliquer pourquoi on peut définir sur $V + V_h$ la norme:

$$\forall u \in V + V_h, \quad \|u\|_h^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla u\|_{0,K}^2 \, .$$

Que redonne la norme $\|u\|_h$ lorsque u appartient à V?

4) Montrer que toute fonction de V_h est déterminée par ses valeurs en tous les M_a.

5) Soit ϕ_a la fonction de V_h définie par (δ_{ab} désigne le symbole de Kronecker):

$$\forall \ b \in \mathcal{A}_h, \quad \phi_a(M_b) = \delta_{ab}.$$

Montrer que $\{\phi_a, a \in \mathcal{A}_h\}$ est une base de V_h. Quels sont les coefficients de v_h dans cette base? Indiquer (sur un dessin par exemple) le support de ϕ_a, ses lignes de niveau et le lieu de ses discontinuités.

6) Nous définissons:

$$\begin{cases} a_h(u,v) = \displaystyle\int_\Omega uv \ dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u . \nabla v \ dx, \quad \forall (u,v) \in (V + V_h) \times (V + V_h), \\ l(v) = \displaystyle\int_\Omega fv \ dx, \quad \forall v \in H. \end{cases}$$

On définit le problème approché:

$$(P_h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \\ a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Montrer que le problème admet une unique solution u_h et donner une majoration uniforme en h de $\|u_h\|_h$.

7) Montrer, en utilisant la base définie que la résolution peut se ramener à la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif dont la matrice a au plus 5 éléments non nuls sauf pour certaines lignes (que l'on précisera) où elle a au plus 3 éléments non nuls.

Le but de la suite du problème est établir la convergence de la solution u_h de P_h et d'obtenir une estimation d'erreur. Ceci est l'objet de la partie III qui va s'appuyer sur un résultat d'approximation abstrait général (partie II) et sur un lemme technique spécifique au problème (partie IV).

II Un résultat abstrait.

Dans cette partie, on considere une situation plus generale que celle de la partie I. Soit H un espace de Hilbert muni d'une norme $|.|$ et V un deuxième espace de Hilbert, inclus et dense dans H, avec injection continue. Soit $\{V_h, h > 0\}$ une famille de sous espaces de H de dimension finie. Attention, on ne suppose pas que V_h est un sous espace de V. Pour tout h, on définit une application :

$$v \to \|v\|_h \in \mathbb{R}^+, \quad \forall\, v \in V + V_h \subset H,$$

qui définit une norme hilbertienne sur $V + V_h$. On suppose en outre que:

$$\forall\, v \in V + V_h, \quad |v| \leq \|v\|_h \ .$$

Dans la suite $l(v)$ désigne une forme linéaire continue sur H et $a_h(.,.)$ désigne une forme bilinéaire sur V_h qui satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_h(u_h, v_h) \leq M\ \|u_h\|_h\ \|v_h\|_h, \quad \forall\ (u_h, v_h) \in V_h \times V_h\ , \\ \\ a_h(u_h, u_h) \geq \alpha\ \|u_h\|_h^2, \quad \forall\ u_h \in V_h\ . \end{array} \right.$$

où M et α sont deux constantes strictement positives indépendantes de h.

8) Démontrer que pour tout h, le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \\ a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall u_h \in V_h \ . \end{array} \right. \tag{4}$$

admet une solution unique et que $\|u_h\|_h$ est majorée par une constante indépendante de h.
(Remarque: cette question est une généralisation immédiate de la question 6)

9) En utilisant les propriétés de $a_h(.,.)$, démontrer que, si u désigne un élément quelconque de V:

$$\alpha \ \|u_h - v_h\|_h \leq M \ \|u - v_h\|_h + \frac{|l(u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h)|}{\|u_h - v_h\|_h} \ .$$

10) En déduire l'existence d'une constante C positive telle que :

$$\|u - u_h\|_h \leq C \ (\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\ l(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \ ) \ .$$

III Application aux éléments non conformes.

Dans cette partie, on revient aux notations du cas particulier de la partie I.

11) Etablir l'estimation d'interpolation :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq C \ h \ \|u\|_{2,\Omega} \ .$$

(Indication : on pourra utiliser la question 1).

12) Démontrer que, si u est la solution de (3), on a l'identité :

$$\forall w_h \in V_h, \quad a_h(u, w_h) - l(w_h) = \sum_{a \in \mathcal{A}_h^i} \int_a \frac{\partial u}{\partial n_a} [w_h]_a \ d\sigma,$$

où $[q]_a$ désigne le saut de q à travers a et n_a la normale unitaire à l'arête a (le saut et la normale étant convenablement orientés). On désigne par Π_a l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(a)$ dans $P_0(a)$, espace des fonctions constantes sur a. Montrer que :

$$\forall w_h \in V_h, \quad a_h(u, w_h) - l(w_h) = \sum_{a \in \mathcal{A}_h^i} \int_a (\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \ ) \ (\ [w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \ ) \ d\sigma.$$

13) Pour la suite, on admettra provisoirement le résultat suivant : étant donné K un triangle de $\mathcal{T}_h$ et a une arête de K, il existe une constante C indépendante de K telle que

$$\forall (v,w) \in H^1(K) \times H^1(K) \quad \left| \int_a (v - \Pi_a v)(w - \Pi_a w)\, d\sigma(x) \right| \leq C\, h_K\, |v|_{1,K}\, |w|_{1,K}\ . \tag{5}$$

En déduire que si $a = K_1 \cap K_2 \in \mathcal{A}_h^i$, alors:

$$\left| \int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a\left(\frac{\partial u}{\partial n_a}\right) \right) \left([w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \right) d\sigma \right| \leq C\, h\, \left(|u|_{2,K_1} |w_h|_{1,K_1} + |u|_{2,K_1} |w_h|_{1,K_1} \right)\ .$$

où C est une constante positive indépendante de h.

(Indication : on pourra penser à écrire $\dfrac{\partial u}{\partial n_a} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\, n_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\, n_2$ où $n_a = (n_1, n_2)$)

14) Montrer alors l'inégalité (C désigne une autre contante indépendante de h)

$$\forall w_h \in V_h, \quad |a_h(u, w_h) - l(w_h)| \leq C\, h\, |u|_{2,\Omega}\, \|w_h\|_h\ .$$

15) A l'aide de ce qui précède et du résultat de la question 10, établir finalement l'estimation d'erreur :

$$\|u - u_h\|_h \leq C\, h\, \|u\|_{2,\Omega}\ .$$

IV Un résultat technique.

On va dans cette dernière partie démontrer le résultat (5).

16) Dans ce qui suit, on pose $\hat{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ /\ x + y \leq 1\}$ ($\hat{K}$ est appelé le triangle de référence). Soit $b(.,.)$ une forme bilinéaire sur $H^{k+1}(\hat{K}) \times H^{m+1}(\hat{K})$ (m et k désignent deux entiers positifs ou nuls) satisfaisant:

$$\begin{cases} |b(v,w)| \leq \|b\|\ \|v\|_{k+1,\hat{K}}\ \|w\|_{m+1,\hat{K}}\ , \quad \forall\ (v,w) \in H^{k+1}(\hat{K}) \times H^{m+1}(\hat{K}), \\ b(p,w) = 0, \quad \forall (p,w)\ \in P_k(\hat{K}) \times H^{m+1}(\hat{K}), \\ b(v,q) = 0, \quad \forall (v,q) \in H^{k+1}(\hat{K}) \times P_m(\hat{K}). \end{cases} \tag{6}$$

On rappelle par ailleurs l'inégalité de Poincaré généralisée qui dit que pour tout entier $k \geq 0$ il existe une constante $C_k > 0$ telle que (c'est une version du lemme de Bramble-Hilbert, lemme 6.3.20, p. 184 du polycopié):

$$\inf_{p \in P_k(\hat{K})} \|v + p\|_{k+1,\hat{K}} \leq C_k\ |v|_{k+1,\hat{K}}\ . \tag{7}$$

En utilisant des résultats du cours montrer qu'il existe une constante $\hat{C}(m,k) > 0$ (ne dépendant que de m et k) telle que :

$$|b(v,w)| \leq \hat{C}(m,k)\ \|b\|\ |v|_{k+1,\hat{K}}\ |w|_{m+1,\hat{K}}, \quad \forall\ (v,w) \in H^{k+1}(\hat{K}) \times H^{m+1}(\hat{K}).$$

17) Dans cette question, K désigne un triangle de $\mathbb{R}^2$ et a une arête de K. On désigne par $lg(a)$ la longueur de l'arête a. Si $F_K(\hat{x}) = B_K\hat{x} + b_K$ désigne l'isomorphisme affine entre le triangle de référence $\hat{K}$ et K, $\hat{a}$ désignera l'image réciproque de a par F_K. À toute fonction v définie sur K, on associera $\hat{v}$ définie sur $\hat{K}$ par $\hat{v} = v \circ F_K$. On rappelle alors un résultat du cours, à savoir l'existence d'une constante positive $\hat{C}_0$ telle que, pour toute fonction v de $H^1(K)$:

$$|\hat{v}|_{1,\hat{K}} \leq \hat{C}_0\ \frac{h_K^2}{\rho_K^2}\ |v|_{1,K}\ . \tag{8}$$

a) Montrer que, si $(v,w) \in L^2(a)^2$:

$$\int_a (v - \Pi_a v)(w - \Pi_a w)\ d\sigma(x) = \frac{lg(a)}{lg(\hat{a})} \int_{\hat{a}} (\hat{v} - \Pi_{\hat{a}}\hat{v})(\hat{w} - \Pi_{\hat{a}}\hat{w})\ d\sigma(\hat{x}),$$

où $\sigma(x)$ (respectivement $\sigma(\hat{x})$) désigne l'abcisse curviligne le long de a (respectivement $\hat{a}$) et où l'opérateur Π_a a été défini à la question 12.

b) En utilisant la question 16), montrer qu'il existe une constante $\hat{C} > 0$ telle que:

$$\forall(\hat{v},\hat{w}) \in H^1(\hat{K}) \times H^1(\hat{K}) \quad \left| \int_{\hat{a}} (\hat{v} - \Pi_{\hat{a}}\hat{v})(\hat{w} - \Pi_{\hat{a}}\hat{w})\ d\sigma(\hat{x}) \right| \leq \hat{C}\ |\hat{v}|_{1,K}\ |\hat{w}|_{1,K}\ .$$

c) En déduire (5) (on rappelle que la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est supposée régulière).

Promotion X 2000 Mardi 2 juillet 2002

Analyse et numérique et optimisation
Corrigé du contrôle classant, durée 4h

F. Bonnans et P. Joly

3 Première Partie : Exercices

3.1 Exercice 1 : Minimisation d'un maximum fini

1. Dans le problème (P'), la minimisation en v pour x fixé donne $v = J(x)$. Les deux problèmes ont donc même infimum, et x est point de minimum de (P) ssi $(J(x), x)$ est point de minimum de $(P)'$.

2. La direction $\bar{w} = (1, 0)$ (déplacement positif sur v seulement) satisfait bien la condition de qualification.

3. Ecrivant la condition d'optimalité du premier ordre pour (P') (qui est nécessaire puisque tout point est qualifié), on obtient (SO).

4. Il suffit d'appliquer le théorème de Kuhn et Tucker à (P'); donnons néanmoins un argument direct. Soient x un point critique de J et λ le multiplicateur associé; pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$J(y) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(y) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) = J(x).$$

   La première inégalité utilise $\lambda \geq 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$, et la seconde le fait que $y \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(y)$ est convexe et a une dérivée nulle en x, donc atteint son minimum en ce point. L'inégalité finale utilise $\lambda_i = 0$ si $i \notin I(x)$, et $\sum_i \lambda_i = 1$.

5. Pour $\rho > 0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned} J(x + \rho d) &= \max_{i \in I(x)} g_i(x + \rho d) = \max_{i \in I(x)} \{J(x) + \rho g_i'(x)d + o(\rho)\} \\ &= J(x) + \rho \max_{i \in I(x)} \{g_i'(x)d\} + o(\rho), \end{aligned}$$

   d'où le résultat.

6. Si x est point critique, et λ est multiplicateur associé, on a

$$J'(x, d) = \max_{i \in I(x)} \{g_i'(x)d\} \geq \sum_{i \in I(x)} \lambda_i g_i'(x)d = 0.$$

Réciproquement, si $J'(x,d) \geq 0$, pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, alors le problème

$$\inf_{w\in\mathbb{R}, d\in\mathbb{R}^n} w; \quad g_i'(x)d - w \leq 0, \quad i \in I(x)$$

a pour point de minimum (non nécéssairement unique) $(0,0)$; écrivant la condition d'optimalité du premier ordre de ce problème, on obtient (SO).

7. Prenant $d = 0$, on obtient $\phi(x) \leq \max_{1\leq i\leq p}\{g_i(x)\} = J(x)$. Si l'égalité est satisfaite, et donc $d = 0$ est point de minimum du problème, écrivant la condition d'optimalité du premier ordre, on obtient (SO). Réciproquement, notons que

$$\phi(x) \geq \max_{i\in I(x)}\{g_i(x) + g_i'(x)d\} = J(x) + \max_{i\in I(x)}\{g_i'(x)d\} = J(x) + J'(x,d). \tag{9}$$

Si de plus (SO) est satisfait, on a, grâce à la question précédente, $J'(x,d) \geq 0$, ce qui permet de conclure.

8. La relation (1) est conséquence de (9). Elle implique que, si $\phi(x^k) < J(x^k)$ alors $J'(x^k, d^k) < 0$; pour $\mu > 0$ assez petit, on a $J(x^k + \mu d^k) < J(x^k)$; donc μ_k ne peut être nul.

9. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable; alors

$$f(x+w) = f(x) + f'(x)w + r_f(x,w),$$

avec

$$r_f(x,w) : = \left(\int_0^1 [f'(x+\rho w) - f'(x)]\mathrm{d}\rho\right) w,$$

et donc, par continuité uniforme de f' sur les bornés, uniformément sur x et w dans une boule de rayon R, on a

$$|r_f(x,w)| \leq C_f(|w|)|w| \tag{10}$$

où $C_f(\cdot)$ est le module de continuité uniforme de f' sur la boule de rayon $2R$. Appliquant cette égalité aux fonctions g_i, et notant $r_i : = r_{g_i}$, il vient

$$\begin{aligned} J(x+\mu d) &= \max_{1\leq i\leq p} g_i(x+\mu d) = \max_{1\leq i\leq p}\{g_i(x) + \mu g_i'(x)d + r_i(x,\mu d)\} \\ &\leq \max_{1\leq i\leq p}\{g_i(x) + \mu g_i'(x)d\} + \max_{1\leq i\leq p} r_i(x,\mu d). \end{aligned} \tag{11}$$

Avec (10), il vient

$$\max_{1\leq i\leq p} r_i(x,\mu d) \leq o(\mu) \tag{12}$$

où la fonction $o(\mu)$ est indépendante de x et d. Par ailleurs l'application

$$\mu \mapsto \psi(\mu) : = \max_{1\leq i\leq p}\{g_i(x) + \mu g_i'(x)d\}$$

est convexe, et donc

$$\max_{1\leq i\leq p}\{g_i(x) + \mu g_i'(x)d\} \leq \mu\psi(1) + (1-\mu)\psi(0) = J(x) + \mu(\phi(x) - J(x)).$$

On conclut en combinant avec les inégalités (11) et (12).

10. Soit $\bar{x}$, point d'adhérence de $\{x^k\}$; supposons que $\bar{x}$ n'est pas un point critique, donc $0 < \alpha : = J(\bar{x}) - \phi(\bar{x})$. Soit $\{x^k, k \in \mathcal{K}\}$ une sous suite de $\{x^k\}$ convergeant vers $\bar{x}$; comme Φ et J sont continues, pour k assez grand, on a $J(x^k) - \phi(x^k) \geq \frac{1}{2}\alpha$. Combinant avec la question précédente, il vient

$$J(x^k + \mu d^k) \leq J(x^k) - \tfrac{1}{2}\alpha\mu + r(\mu).$$

Soit $\bar{\mu} > 0$ tel que $r(\bar{\mu}) < \frac{1}{4}\alpha\bar{\mu}$, alors

$$J(x^k + \mu^k d^k) \leq J(x^k + \bar{\mu} d^k) \leq J(x^k) - \tfrac{1}{4}\alpha\bar{\mu}$$

ce qui garantit une décroissance de J d'au moins $\frac{1}{4}\alpha\bar{\mu}$ pour $k \in \mathcal{K}$ assez grand. Par ailleurs, la suite $J(x^k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, est décroissante. Elle tend donc vers $-\infty$. Mais ceci est impossible, car $\{x^k\}$ est bornée.

3.2 Exercice 2: Equation elliptique avec condition aux limites non locales

1) Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème Lax Milgram. V est bien évidemment un espace de Hilbert (dont nous noterons la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$) et la continuité de la forme linéaire $L(v)$ étant triviale, il suffit de vérifier la continuité et la coercivité de la forma bilinéaire $a(u,v)$. Or en utilisant le fait que Γ est borné et le théorème de traces (nous notons ici C la constante de continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$) on a :

$$\left|\int_\Gamma u \, d\sigma\right| \leq (\text{mes } \Gamma)^{\frac{1}{2}} \, \|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \, (\text{mes } \Gamma)^{\frac{1}{2}} \, \|u\|_{1,\Omega} \, . \tag{13}$$

Il s'ensuit de manière quasi-immédiate l'inégalité de continuité:

$$|a(u,v)| \leq (1 + C^2 \text{ mes } \Gamma) \, \|u\|_{1,\Omega} \, \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall \, (u,v) \in H^1(\Omega)^2.$$

Par ailleurs on a immédiatement:

$$a(u,u) = \|u\|_{1,\Omega}^2 + \alpha \, \left|\int_\Gamma u \, d\sigma\right|^2 .$$

La coercivité de $a(.,.)$ est donc immédiate quand α est positif ou nul.

2) En réutilisant l'inégalité (13) il vient immédiatement:

$$a(u,u) \geq (1 - |\alpha|\; C^2 \text{ mes } \Gamma)\; \|u\|^2_{1,\Omega}.$$

Lorsque $\alpha < 0$, le résultat de coercivité est donc néanmoins préservé si:

$$|\alpha| < C^{-2} (\text{mes } \Gamma)^{-1}.$$

3) Si u est une solution de (2), en choisissant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on obtient:

$$\int_\Omega (u\; v + \nabla u \cdot \nabla v)\; dx = \int_\Omega f v\; dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est à dire, en utilisant la dérivation au sens faible,

$$-\Delta u + u = f.$$

cette égalité ayant en fait lieu dans $L^2(\Omega)$ puisque $f \in L^2(\Omega)$. Si nous supposons en outre que u a la régularité H^2, en utilisant la formule de Green, nous obtenons:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\; v\; d\sigma + \alpha\; \left(\int_\Gamma u\; d\sigma\right)\; \left(\int_\Gamma v\; d\sigma\right) = 0, \quad \forall\; v \in H^1(\Omega),$$

soit encore

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \int_\Gamma u\; d\sigma\right)\; v\; d\sigma = 0, \quad \forall\; v \in H^1(\Omega).$$

L'espace décrit par les traces sur Γ des fonctions régulières étant dense dans $L^2(\Gamma)$, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \int_\Gamma u\; d\sigma = 0, \quad \text{dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit que u est solution du problème aux limites:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha \displaystyle\int_\Gamma u\; d\sigma = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

Réciproquement, soit u une solution de régularité H^2 de (14). Pour toute fonction test v dans $H^1(\Omega)$, on a

$$-\int_\Omega \Delta u\; v\; dx + \int_\Omega u\; v\; dx = \int_\Omega f\; v\; dx.$$

Par la formule de Green, il vient:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx + \int_\Omega u \; v \; dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \; v \; d\sigma = \int_\Omega f \; v \; dx.$$

Or en utilisant la condition aux limites sur Γ:

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \; v \; d\sigma = \alpha \left(\int_\Gamma u \; d\sigma \right) \left(\int_\Gamma v \; d\sigma \right).$$

On en déduit que u est solution de (2).

4 Problème : Analyse numérique d'une méthode d'éléments finis non conforme

I Présentation de la méthode.

1) On a évidemment l'inclusion $W_h \subset V_h$ (le raccord continu le long d'une arête entraînant a fortiori le raccord au centre de celle-ci).

2) L'espace V_h n'est pas un sous-espace de V car, en général, une fonction de V_h sera discontinue à travers les arêtes du maillages. Par consequent, les fonctions de V_h ne sont pas derivables au sens faible en general. Pour être plus précis, au sens des distributions le gradient d'une fonction de V_h est la somme d'une fonction constante par morceaux (qui n'est donc dans L^2) et d'une somme de mesures (distributions de Dirac) portées par les arêtes intérieures du maillages. C'est cette deuxième partie qui n'est pas dans L^2.

3) La restriction d'une fonction de V à K est évidemment dans $H^1(K)$ et la restriction d'une fonction de V_h à K est un polynôme de degré 1 qui appartient donc également à $H^1(K)$ puique K est un compact. Si $u \in V + V_h$, on peut donc définir le gradient de sa restriction u_K en tant qu'élément de $L^2(K)$ et par conséquent définir la quantité:

$$\forall u \in V + V_h, \quad \|u\|_h^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla u\|_{0,K}^2,$$

qui est bien évidemment une norme puisque en particulier:

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_h \; . \tag{15}$$

Lorsque u appartient à V on a tout simplement:

$$\|u\|_h = \|u\|_{1,\Omega} \; .$$

4) La valeur d'un polynôme de degré 1 est entièrement déterminée par sa connaissance en trois points qui ne sont pas alignés. C'est le cas des milieux des trois arêtes d'un triangle.

5) Les fonctions ϕ_a sont de toute évidence linéairement indépendantes. Par ailleurs, par définition de V_h, pour toute fonction v_h dans V_h, on peut parler sans ambiguité des quantités $v_h(M_a)$. Introduisons alors la fonction de V_h:

$$\tilde{v}_h = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} v_h(M_a)\ \phi_a\ .$$

Par définition de ϕ_a on a:

$$\tilde{v}_h(M_a) = v_h(M_a), \quad \forall\ a \in \mathcal{A}_h\ ,$$

et donc, d'après la question 4)

$$\tilde{v}_h = v_h\ .$$

Ceci démontre la formule:

$$v_h = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} v_h(M_a)\ \phi_a\ ,$$

qui prouve à la fois que la famille $\{\phi_a\ , a \in \mathcal{A}_h\}$ est bien génératrice dans V_h et que les degrés de liberté de v_h dans la base $\{\phi_a\}$ sont ses valeurs aux milieux des arêtes du maillage.

Si $a = K_1 \cap K_2$, le support de ϕ_a est le quadrilatère constitué par la réunion des deux triangles K_1 et K_2. Les lignes de niveau de ϕ_a sont des segments de droite parallèles à l'arête a et le lieu des discontinuités de ϕ_a est le bord de son quadrilatère support privé des quatre milieux des arêtes de ce quadrilatère (voir dessin ci-dessous).

6) Introduisons le problème:

$$(P_h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \\ a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h\ . \end{array} \right.$$

Pour démontrer le résultat d'existence et d'unicité demandé, il suffit par exemple d'appliquer le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de dimension finie V_h (encore que, comme on est en dimension finie, démontrer l'unicité de la solution suffit). La continuité et la coercivité de $a_h(.,.)$ sont évidentes puisque $a_h(u,v)$ coïncide avec le produit scalaire de $V + V_h$ (dont on choisit de munir V_h). Par ailleurs, on a l'inégalité de continuité:

$$\forall\ v_h \in V_h, \quad |l(v_h)| \leq \|f\|_{0,\Omega}\ \|v_h\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\ \|v_h\|_h\ .$$

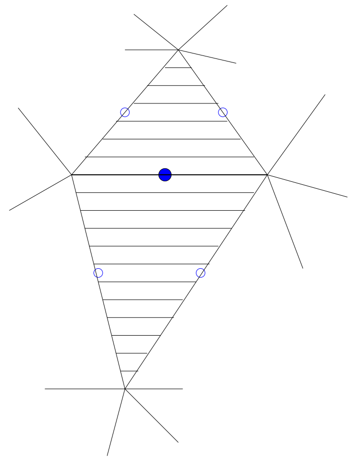

FIG. 1: *Support et lignes de niveau de ϕ_a*

En prenant $v_h = u_h$, on obtient:

$$\|u_h\|_h^2 = |l(u_h)| \leq \|f\|_{0,\Omega}\, \|u_h\|_h \ ,$$

d'où l'estimation uniforme

$$\|u_h\| \leq \|f\|_{0,\Omega} \ .$$

7) La première partie de la question est pour ainsi dire une question de cours. Si U_h désigne le vecteur des $u_h(M_a)$ (sa dimension est égale au nombre N_a des arêtes du maillage), résoudre (P_h) revient à résoudre le système linéaire:

$$A_h\, U_h = F_h,$$

où la matrice A_h $(N_a \times N_a)$ et le vecteur F_h sont définis par:

$$\begin{cases} A_{a,b} = a_h(\phi_a, \phi_b), \quad 1 \leq a, b \leq N_a \ , \\ F_a = l(\phi_a), \quad 1 \leq a \leq N_a \ . \end{cases}$$

Le caractère symétrique défini positif de la matrice A_h résulte alors directement de la symétrie et de la coercivité de $a_h(.,.)$.

En considérant les supports des fonctions ϕ_a (question 5), il est facile de voir que $a_h(\phi_a, \phi_b)$ ne peut être non nul que si $a = b$ ou si a et b sont les arêtes d'un même triangle. Lorsque $a = K_1 \cap K_2$ est une arète intérieure du maillage, il y a seulement quatre arêtes $b \neq a$ qui appartiennent à un des deux triangles K_1 ou K_2. Sur cette ligne de la matrice a au plus cinq éléments non nuls. Lorque a est une arête frontière, on a plus que deux arêtes b et donc au plus trois éléments non nuls.

II Un résultat abstrait.

8) C'est le même raisonnement qu'à la question 6) (Lax-Milgram dans V_h). Pour l'estimation uniforme, on prend $v_h = u_h$ et on a :

$$\alpha \; \|u_h\|_h^2 \leq a_h(u_h, u_h) = l(u_h) \leq \|l\| \; |u_h| \leq \|l\| \; \|u_h\|_h \; ,$$

ce qui fournit finalement:

$$\|u_h\|_h \leq \frac{\|l\|}{\alpha} \; .$$

9) Nous avons, d'aprés la coercivité et la continuité de de a_h et le fait que u_h soit solution du problème (P_h):

$$\left| \begin{aligned} \alpha \; \|u_h - v_h\|_h^2 & \leq a_h(u_h - v_h, u_h - v_h), \\ & = a_h(u_h - u, u_h - v_h) + a_h(u - v_h, u_h - v_h), \\ & = l(u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h) + a_h(u - v_h, u_h - v_h), \\ & \leq M \; \|u - v_h\|_h \; \|u_h - v_h\|_h + |l(u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h)| \; . \end{aligned} \right.$$

On obtient le résultat annoncé par division par $\|u_h - v_h\|_h$.

10) De façon évidente:

$$\frac{|l(u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h)|}{\|u - v_h\|_h} \leq \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\; l(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \; .$$

Par l'inégalité triangulaire:

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h \; ,$$

et par conséquent:

$$\|u - u_h\|_h \leq (1 + \frac{M}{\alpha}) \; \|u - v_h\|_h + \frac{1}{\alpha} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\; l(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \; .$$

Cette inégalité étant vraie pour n'importe quelle fonction v_h de V_h, on peut "passer à l'inf" pour obtenir le résultat annoncé:

$$\|u - u_h\|_h \leq C \; (\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\; l(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \;), \tag{16}$$

avec par exemple:

$$C = \max\left(1 + \frac{M}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right).$$

III Application aux éléments non conformes.

Dans cette partie, on revient aux notations de la partie I.

11) C'est très simple car on sait d'après le cours (Proposition 6.3.16, p. 182) et le fait que $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{1,\Omega}$ dans V (question 3) que:

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_h = \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq C\ h\ |u|_{2,\Omega}\ .$$

Or, d'après l'inclusion $W_h \subset V_h$ (question 1):

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_h\ .$$

12) On peut écrire:

$$a_h(u, w_h) - l(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla w_K + u\ w_K - f\ w_K)\ dx.$$

Comme u et w_h sont régulières (au moins H^2) à l'intérieur de chaque triangle K, on peut utiliser la formule de Green dans K et ainsi obtenir (ν_K désigne le vecteur unitaire normal le long de ∂K, sortant par rapport à K):

$$\left| \begin{aligned} a_h(u, w_h) - l(w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (-\Delta u + u - f)\ w_h\ dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu_K} w_h\ d\sigma, \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu_K} w_h\ d\sigma, \end{aligned} \right.$$

puisque u est solution de (P). Nous réarrangeons la somme précédente comme une somme d'intégrales le long des arêtes du maillage. Grâce à la condition de Neuman homogème satisfaite par u sur le bord extérieur, il ne reste plus que les contributions des arêtes intérieures, chacune étant "atteinte" deux fois. Plus précisément:

$$a_h(u, w_h) - l(w_h) = \sum_{a = K_1 \cap K_2\ \in\ \mathcal{A}_h^i} \int_a \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{K_1}} w_{K_1} + \frac{\partial u}{\partial \nu_{K_2}} w_{K_2} \right)\ d\sigma.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_{K_2}} = -\dfrac{\partial u}{\partial \nu_{K_1}}$ le long de a (par exemple en invoquant la régularité H^2), il vient:

$$a_h(u, w_h) - l(w_h) = \sum_{a = K_1 \cap K_2\ \in\ \mathcal{A}_h^i} \int_a \frac{\partial u}{\partial \nu_{K_1}} (w_{K_1} - w_{K_2})\ d\sigma,$$

ce que l'on peut écrire sans ambiguité:

$$\forall w_h \in V_h, \quad a_h(u, w_h) - l(w_h) = \sum_{a \in \mathcal{A}_h^i} \int_a \frac{\partial u}{\partial n_a}[w_h]_a \, d\sigma.$$

(On remarque en effet que la signification du produit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{K_1}}(w_{K_1} - w_{K_2})$$

ne dépend pas du choix de K_1 par rapport à K_2 - il suffit donc de définir l'orientation de la normale de façon cohérente avec la définition du saut.)

Pour la suite, le point clé de la démonstration consiste à remarquer que le long de a le saut $[w_h]_a$ étant une fonction linéaire d'une variable (l'abcisse curviligne le long de l'arête) qui s'annule au milieu de celle-ci (car w_h appartient à V_h !), sa valeur moyenne le long de a est nulle ! Autrement dit:

$$\Pi_a([w_h]_a) = 0 \ .$$

Par ailleurs, par définition de la projection orthogonale:

$$\int_a ([w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a)) \ q \ dx = 0, \quad \forall \ q \in P_0(a),$$

et donc en particulier pour $q_a = \Pi_a(\dfrac{\partial u}{\partial n_a})$. ($\dfrac{\partial u}{\partial n_a}$ appartient bien à $L^2(a)$ car $u \in H^2$)

Nous écrivons alors simplement (dans les deux premières égalités on ne fait que rajouter des termes identiquement nuls dans le membre de droite):

$$\left| \begin{aligned} \int_a \frac{\partial u}{\partial n_a} \ [w_h]_a \ d\sigma \ &= \int_a \frac{\partial u}{\partial n_a}(\ [w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \ ) \ d\sigma, \\ &= \int_a \frac{\partial u}{\partial n_a}(\ [w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \ ) \ d\sigma - \int_a \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a})(\ [w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \ ) \ d\sigma, \\ &= \int_a (\ \frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \ ) \ (\ [w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \ ) \ d\sigma. \end{aligned} \right.$$

ce qui mène au résultat demandé.

13) En écrivant $[w_h]_a = w_{K_1} - w_{K_2}$ et en utilisant la linéarité de la projection Π_a, nous

obtenons l'estimation suivante:

$$\left| \begin{array}{l} |\displaystyle\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \right) \ (\ [w_h]_a - \Pi_a([w_h]_a) \ ) \ d\sigma| \le \\ \qquad\qquad \le |\displaystyle\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma \ | \\ \qquad\qquad + |\displaystyle\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \right) (w_{K_2} - \Pi_a w_{K_2}) \ d\sigma \ | \ . \end{array} \right. \tag{17}$$

Par ailleurs, comme $\dfrac{\partial u}{\partial n_a} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \ n_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \ n_2$, nous avons:

$$\left| \begin{array}{l} |\displaystyle\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma| \le \\ \qquad\qquad \le \ |n_1| \ |\displaystyle\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial x_1}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma| \\ \qquad\qquad + |n_2| \ |\displaystyle\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial x_1}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma| \ . \end{array} \right.$$

Appliquons le résultat (4) donné dans l'énoncé avec $K = K_1$, $v = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ et $w = w_{K_1}$:

$$|\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial x_1}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma| \le \ C \ h_K \ |\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{1,K_1} \ |w_h|_{1,K_1} \le \ C \ h \ |u|_{2,K_1} \ |w_h|_{1,K_1},$$

puisque $h_K \le h$ et $|\dfrac{\partial u}{\partial x_1}|_{1,K_1} \le |u|_{2,K_1}$. De façon identique:

$$|\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial x_2}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma \le \ C \ h \ |u|_{2,K_1} \ |w_h|_{1,K_1}.$$

Par conséquent, comme $|n_1| \le 1$ et $|n_2| \le 1$, il vient:

$$|\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \right) (w_{K_1} - \Pi_a w_{K_1}) \ d\sigma| \le \ C \ h \ |u|_{2,K_1} \ |w_h|_{1,K_1}. \tag{18}$$

De la même façon:

$$|\int_a \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} - \Pi_a(\frac{\partial u}{\partial n_a}) \right) (w_{K_2} - \Pi_a w_{K_2}) \ d\sigma| \le \ C \ h \ |u|_{2,K_2} \ |w_h|_{1,K_2}. \tag{19}$$

En reportant alors (18) et (19) dans (17), nous obtenons le résultat annoncé.

14) D'après le résultat des question 12 et 13, nous pouvons écrire:

$$|a_h(u, w_h) - l(w_h)| \le C \ h \sum_{a = K_1 \cap K_2 \ \in \ \mathcal{A}_h^i} (\ |u|_{2,K_1} |w_h|_{1,K_1} + |u|_{2,K_1} |w_h|_{1,K_1}) \, .$$

On remarque alors que la somme précédente est une somme de termes de la forme:

$$|u|_{2,K}|w_h|_{1,K},$$

chaque triangle K apparaissant au plus trois fois dans la somme (trois fois si toutes ses arêtes sont intérieures, une ou deux fois sinon). Nous pouvons donc écrire:

$$\left| \begin{aligned} |a_h(u,w_h) - l(w_h)| &\leq 3\,C\,h \sum_{K\,\in\,\mathcal{T}_h} |u|_{2,K}|w_h|_{1,K}\ , \\ &\leq 3\,C\,h\ (\sum_{K\,\in\,\mathcal{T}_h} |u|^2_{2,K})^{\frac{1}{2}}\ (\sum_{K\,\in\,\mathcal{T}_h} |w_h|^2_{1,K})^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq 3\,C\,h\ |u|_{2,\Omega}\ \|w_h\|_h\ , \end{aligned} \right.$$

ce que l'on voulait démontrer.

15) Il est facile de vérifier que l'on est bien dans le cadre des hypothèses de la partie II et que par conséquent, l'estimation (16) s'applique. D'après la question qui précède, nous avons:

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|\ l(w_h) - a_h(u,w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq C\ h\ |u|_{2,\Omega}\ ,$$

et d'après la question 10, nous avons également:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq C\ h\ |u|_{2,\Omega}\ .$$

Il suffit alors de reporter ces deux dernières inégalités dans (16) pour obtenir le résultat annoncé:

$$\|u - u_h\|_h \leq C\ h\ |u|_{2,\Omega}\ .$$

IV Un résultat technique.

16) C'est presque immédiat. D'après les propriétés de $b(.,.)$, il vient:

$$|b(v,w)| = |b(v+p, w+q)|, \quad \forall\ (p,q) \in P_k(\hat{K}) \times P_m(\hat{K}),$$

Par suite, par continuité de $b(.,.)$:

$$|b(v,w)| \leq \|b\|\ \|v+p\|_{k+1,\hat{K}}\ \|w+q\|_{m+1,\hat{K}}\ , \quad \forall\ (p,q) \in P_k(\hat{K}) \times P_m(\hat{K}).$$

Par conséquent:

$$\left| \begin{aligned} |b(v,w)| &\leq \|b\| \inf_{p \in P_k(\hat{K})} \|v+p\|_{k+1,\hat{K}} \inf_{q \in P_m(\hat{K})} \|w+q\|_{m+1,\hat{K}}\ , \\ &\leq C_k\ C_m\ \|b\|\ |v|_{k+1,\hat{K}}\ |w|_{m+1,\hat{K}}\ . \end{aligned} \right.$$

c'est à dire le résultat demandé avec $\hat{C}(m,k) = C_k\, C_m$.

17) a) Commençons par remarquer que si on fait le changement de variable $x = F_K(\hat{x})$ dans une intégrale le long de l'arête a, nous avons:

$$\int_a f(x)\, d\sigma(x) = \frac{lg(a)}{lg(\hat{a})} \int_{\hat{a}} \hat{f}(\hat{x})\, d\sigma(\hat{x}). \tag{20}$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer (c'est immédiat) que l'application $v \mapsto \hat{v}$ est linéaire, satisfait $\widehat{v\, w} = \hat{v}\, \hat{w}$ et que:

$$\widehat{\Pi_a v} = \Pi_{\hat{a}} \hat{v}, \quad \forall v \in L^2(a). \tag{21}$$

Pour ce dernier point, il suffit de noter que l'application $v \mapsto \hat{v}$ préserve les fonctions constantes et d'appliquer (20). En effet, par caractérisation de Π_a, on a:

$$\int_a (u - \Pi_a u)\, q\, d\sigma(x) = 0, \quad \forall\, (u,q) \in L^2(a) \times P_0(a).$$

Après changement de variable, on obtient grâce à (20):

$$\int_a (\hat{u} - \widehat{\Pi_a u})\, \hat{q}\, d\sigma(\hat{x}) = 0, \quad \forall\, (u,\hat{q}) \in L^2(a) \times P_0(\hat{a}),$$

Comme $\hat{u}$ décrit $L^2(\hat{a})$ lorsque u décrit $L^2(a)$, ceci démontre (21).

b) Nous introduisons sur $H^1(\hat{K}) \times H^1(\hat{K})$, la forme bilinéaire:

$$b(\hat{v}, \hat{w}) = \int_{\hat{a}} (\hat{v} - \Pi_{\hat{a}} \hat{v})(\hat{w} - \Pi_{\hat{a}} \hat{w})\, d\sigma(\hat{x}).$$

Cette forme linéaire est bien continue. En effet:

$$b(\hat{v}, \hat{w}) \leq \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{a})}\, \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{a})} \leq \hat{C}^2\, \|\hat{v}\|_{1,\hat{K}}\, \|\hat{v}\|_{1,\hat{K}}\ .$$

(Nous avons utilisé successivement les propriétés de la projection orthogonale et le théorème de trace dans $H^1(\hat{K})$: $\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{a})} \leq \hat{C}\, \|\hat{v}\|_{1,\hat{K}}$.)

Par ailleurs:

$$\begin{cases} b(p,w) = 0, \quad \forall (p,w)\ \in P_0(\hat{K}) \times H^1(\hat{K}), \\[2ex] b(v,q) = 0, \quad \forall (v,q) \in H^1(\hat{K}) \times P_0(\hat{K}). \end{cases}$$

Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question 16 avec $m = k = 0$, ce qui nous donne le résultat demandé.

c) Nous avons donc:

$$\left|\begin{array}{ll}\displaystyle\int_a (v-\Pi_a v)(w-\Pi_a w)\, d\sigma(x) & \displaystyle = \frac{lg(a)}{lg(\hat{a})}\int_{\hat{a}} (\hat{v}-\Pi_{\hat{a}}\hat{v})(\hat{w}-\Pi_{\hat{a}}\hat{w})\, d\sigma(\hat{x}), \\ & \displaystyle \leq \hat{C}\ \frac{lg(a)}{lg(\hat{a})}\ |\hat{v}|_{1,K}\ |\hat{w}|_{1,K}\ , \\ & \displaystyle \leq \hat{C}\ h_K\ \hat{C}_0^2\ (\frac{h_K^2}{\rho_K^2})^2\ |v|_{1,K}\ |w|_{1,K}\ . \end{array}\right.$$

où nous avons utilisé le fait que $lg(\hat{a}) \geq 1$, quelle que soit l'arête $\hat{a}$ et la propriété (7) donnée dans l'énoncé. La famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ étant supposée régulière, il existe $\mu > 0$ tel que $h_K \leq \mu\rho_K$ et par conséquent:

$$\int_a (v-\Pi_a v)(w-\Pi_a w)\, d\sigma(x) \leq \hat{C}\ \hat{C}_0^2\ \mu^4\ h_K\ |v|_{1,K}\ |w|_{1,K}\ .$$