Ecole Polytechnique, Promotion 2005
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 30 avril 2007
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies (8 points)

On considére l'équation de la chaleur dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t,x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

avec un coefficient de diffusion constant et strictement positif $\nu > 0$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. Pour 3 réels c_-, c_0, c_+ indépendants des valeurs u_j^n, on considère le schéma suivant

$$u_j^{n+1} = c_- u_{j-1}^n + c_0 u_j^n + c_+ u_{j+1}^n$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$.

1. Montrer qu'il existe un seul choix possible de c_-, c_0, c_+, dépendant de Δt et Δx uniquement à travers le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$, qui conduit à un schéma consistant et que ce schéma n'est pas d'ordre 2. Quel schéma classique retrouve-t-on ainsi ? Quelle est son équation équivalente ?
2. On se propose de construire un schéma de type Lax-Wendroff pour l'équation de la chaleur (1) (voir les pages 43 et 44 du polycopié). L'idée est d'écrire un développement de Taylor

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + (\Delta t)\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\Big((\Delta t)^3\Big),$$

pour la solution u, puis de remplacer les dérivées en temps par des dérivées en espace et enfin d'approcher les dérivées en espace par des formules centrées d'ordre 2. Donner la formule de ce schéma. Combien de points en espace utilise-t-il ? Justifier qu'il est d'ordre 2. Montrer que, sous une condition CFL que l'on établira, il est stable en norme L^∞. En déduire qu'il converge.

2 Diffusion non locale (12 points)

On s'intéresse à un modèle de diffusion non-locale dans un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^N$. On considère une fonction régulière, positive, symétrique et de moyenne unité, $c(x,y)$ définie sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui modélise l'influence de la valeur de l'inconnue en y au point x. Autrement dit, elle vérifie

$$c(x,y) = c(y,x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega c(x,y)dy = 1.$$

On introduit le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \displaystyle\int_\Omega c(x,y)\Big(u(x) - u(y)\Big)dy = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est un terme source donné.

1. Donner la formulation variationnelle de (2) (on prendra soin d'écrire la forme bilinéaire de manière symétrique) et montrer qu'elle admet une unique solution.
2. En supposant que la solution u de la formulation variationnelle appartienne à $H^2(\Omega)$, en quel sens est-elle aussi une solution de (2) ?
3. Quelle est l'énergie qui est minimisée par la solution de (2) ?
4. On se place en dimension $N = 1$ et on suppose que $\Omega = (0,1)$ et $c(x,y) = 1$. On définit un maillage $x_j = j\Delta x$ pour $0 \leq j \leq n+1$ avec $\Delta x = 1/(n+1)$ (n est un entier positif). On applique la méthode des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ au problème (2). Pour calculer les intégrales intervenant dans la matrice de rigidité $\mathcal{K}$ on utilise la formule de quadrature, dite des trapèzes (voir page 109 du polycopié de cours), sur chaque maille. Calculer ainsi $\mathcal{K}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'une matrice tridiagonale plus une perturbation de rang 1 proportionnelle à $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. (Pour deux vecteurs a et b la notation $a \otimes b$ désigne la matrice de coefficients $a_i b_j$.)
5. Sachant que résoudre un système linéaire pour une matrice pleine coûte beaucoup plus cher que pour une matrice tridiagonale, proposer une formule pour l'inverse de $\mathcal{K}$ et une méthode de résolution qui permette de se ramener au cas d'une matrice tridiagonale.