Ecole Polytechnique, Promotion 2006
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 15 avril 2008
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies (8 points)

Etant donné un coefficient de diffusion $\nu > 0$, on considére l'équation de la chaleur dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_* \\ u(t, x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+_* \end{array} \right. \tag{1}$$

et une donnée initiale. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. Pour 3 réels α, β, γ indépendants de $\Delta t, \Delta x, \nu$ et des valeurs u_j^n, on considère le schéma à trois niveaux suivant

$$\frac{\alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n + \gamma u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

avec une initialisation adéquate u_j^0, u_j^1 et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$.

1. Ecrire en fonction de γ les coefficients α, β pour que ce schéma soit consistant. On supposera dans toute la suite de l'exercice que ces relations sont vérifiées. Quel schéma retrouve-t-on si $\gamma = -1/2$ et qu'en dit le cours ? Même question pour $\gamma = -1$. La suite de l'exercice consiste à montrer qu'une petite perturbation des coefficients dans ce schéma en change radicalement les propriétés.
2. Montrer que, si $-1/2 < \gamma \leq 0$, le schéma est stable en norme L^∞ sous une condition de type CFL que l'on précisera. Que peut-on dire alors de sa convergence ?
3. Montrer que, si $\gamma < -1$ ou $-1 < \gamma < -1/2$, le schéma est inconditionnellement instable en norme L^2. Indication : on montrera que la condition nécessaire de Von Neumann n'est pas satisfaite.
4. Montrer que, si $\gamma \geq 0$, le schéma vérifie la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann sous une condition de type CFL.

2 Formulation variationnelle (12 points)

Dans un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^N$ on s'intéresse à un modèle de diffusion avec absorption localisée dans un sous-domaine régulier $\omega \subset \Omega$ de mesure non nulle. On note $\chi(x)$ la fonction caractéristique de ce sous-domaine, c'est-à-dire que $\chi(x) = 1$ si $x \in \omega$, et $\chi(x) = 0$ sinon. On introduit le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + \chi u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est un terme source donné.

1. Donner la formulation variationnelle de (2).
2. En admettant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a
$$\int_\Omega v^2(x)\,dx \le C\left(\int_\omega v^2(x)\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^2(x)\,dx\right), \tag{3}$$
démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle.
3. En supposant que la solution u de la formulation variationnelle appartienne à $H^2(\Omega)$, en quel sens est-elle aussi une solution de (2) ?
4. Dans cette question seulement on suppose que $\Omega = \mathbb{R}^{N-1}\times]-1;+1[$ et $\omega = \mathbb{R}^{N-1}\times]-1;0[$. Démontrer l'inégalité (3) avec une constante $C = 3$. Indication : pour $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\times]0;1[$ on écrira
$$v(x', x_N) = v(x', x_N - 1) + \int_{x_N-1}^{x_N} \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', t)\,dt$$
et on estimera la norme du membre de gauche dans $L^2(\Omega \setminus \omega)$.
5. Démontrer l'inégalité (3) dans le cas général en utilisant un raisonnement par contradiction.
6. Dans (2) on multiplie la fonction caractéristique par $1/\epsilon > 0$ et on note u_ϵ la solution correspondante. Montrer que, lorsque ϵ tends vers 0, la solution u_ϵ, restreinte à ω, converge vers 0 dans $L^2(\omega)$.