Ecole Polytechnique, Promotion 2008
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 13 avril 2010
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies (7 points)

On considére l'équation de la chaleur dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(t, x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

avec $\nu > 0$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. On considère le schéma suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j+1}^n + 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0,$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$.

1. Etudier la stabilité de ce schéma.
2. Montrer que ce schéma est consistant sous une condition de type CFL que l'on précisera.
3. Que peut-on dire de la convergence de ce schéma ? Discuter des avantages et des inconvénients de ce schéma par rapport aux schémas classiques vus en cours.

2 Formulation variationnelle (13 points)

On considère deux matériaux qui occupent un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ (un ouvert borné régulier connexe), séparés par une interface imparfaite. Le premier matériau, de conductivité thermique $k_1 > 0$, occupe le complémentaire connexe $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_2}$ du sous-domaine régulier simplement connexe Ω_2, strictement inclus dans Ω, qui contient le deuxième matériau, de conductivité thermique $k_2 > 0$. Les deux sous-domaines sont séparés par une interface $\Gamma = \partial\Omega_2$ qui est une surface régulière. On a donc $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$ et le bord de Ω_1 est défini par $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cup \Gamma$ (voir la figure 1). On note n_1 (respectivement n_2) la normale unité extérieure à Ω_1 (resp. Ω_2), f_1 (resp. f_2) le terme source de chaleur dans Ω_1 (resp. Ω_2) et u_1 (resp. u_2) la température dans Ω_1 (resp. Ω_2). L'extérieur de Ω est supposé à température constante que, sans perte de généralité,

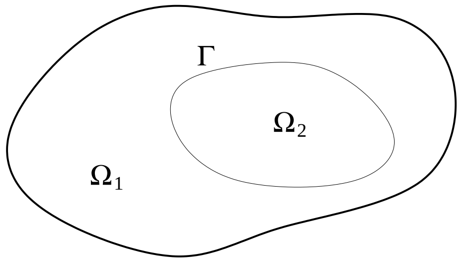

Fig. 1 – Deux matériaux séparés par une interface Γ.

on choisit nulle, c'est-à-dire que l'on considère une condition aux limites de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$.

Le fait que l'interface Γ soit imparfaite veut dire que la température **n'est pas continue** à travers Γ. La conservation de l'énergie impose que le flux de chaleur soit continu à travers Γ et on le modélise en le prenant proportionnel au saut des températures de part et d'autre de Γ avec une constante de proportionnalité $\alpha > 0$. Autrement dit, on étudie le système couplé suivant

$$\begin{cases} -k_1 \Delta u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ -k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = \alpha(u_1 - u_2) & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

et

$$\begin{cases} -k_2 \Delta u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ -k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = \alpha(u_2 - u_1) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3}$$

On suppose que $f_1(x)$ (resp. $f_2(x)$) appartient à $L^2(\Omega_1)$ (resp. $L^2(\Omega_2)$).

1. Dans cette question (seulement) on suppose connue la température $u_2 \in L^2(\Gamma)$. Donner la formulation variationnelle de (2). Démontrer l'existence et l'unicité de la solution u_1 de cette formulation variationnelle. En supposant que cette solution u_1 appartienne à $H^2(\Omega_1)$, en quel sens est-elle aussi une solution de (2) ?
2. Démontrer par l'absurde qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall v \in H^1(\Omega_2) \qquad \|v\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)^N} + \|v\|_{L^2(\Gamma)} \right).$$
3. Dans cette question (seulement) on suppose connue la température $u_1 \in L^2(\Gamma)$. Donner la formulation variationnelle de (3). Déduire de la question précédente l'existence et l'unicité de la solution u_2 de cette formulation variationnelle.
4. Donner la formulation variationnelle du système couplé (2)-(3). Démontrer l'existence et l'unicité de la solution (u_1, u_2) de cette formulation variationnelle. Indication : on pourra utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante, valable pour tout $\epsilon > 0$ aussi petit que l'on veut,
$$(a_1 - a_2)^2 \geq -\epsilon a_1^2 + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} a_2^2 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$
5. Que se passe-t-il formellement lorsque α tend vers $+\infty$? Et lorsque $\alpha = 0$?