Ecole Polytechnique, Promotion 2010
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 24 avril 2012
Sujet proposé par G. Allaire et B. Maury

1 Exercice mémoriel (12 pts)

A l'occasion du centenaire de la mort de Henri Poincaré (X promotion 1873, né le 29 avril 1854, décédé le 17 juillet 1912), on se propose de reprendre sa démonstration originale de la célèbre inégalité de Poincaré-Wirtinger. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, régulier et convexe. On désigne par V l'espace

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \phi(x)\, dx = 0\}.$$

L'inégalité de Poincaré-Wirtinger affirme qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $\phi \in V$, on a

$$\int_\Omega \phi^2(x)\, dx \le C \int_\Omega |\nabla\phi(x)|^2\, dx. \tag{1}$$

1. Montrer que, pour tout $\phi \in V$, on a
$$\int_\Omega \int_\Omega (\phi(x) - \phi(x'))^2\, dx\, dx' = 2|\Omega| \int_\Omega \phi^2(x)\, dx$$
où $|\Omega|$ désigne le volume de Ω.
2. En remarquant, grâce à la convexité de Ω, que pour toute fonction ϕ de $C^1(\Omega)$,
$$\phi(x) - \phi(x') = \int_0^1 (x - x') \cdot \nabla\phi(tx + (1-t)x')\, dt,$$
montrer que, pour tout $\phi \in C^1(\Omega)$,
$$\int_\Omega \int_\Omega |\phi(x) - \phi(x')|^2\, dx\, dx' \le 2d(\Omega)^2 \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2 dt\, dx\, dx'$$
où $d(\Omega) = \sup_{x,x' \in \Omega} |x - x'|$ désigne le diamètre de Ω.
3. Montrer que, pour tout $\phi \in C^1(\Omega)$, et pour tout $t \in [1/2, 1]$,
$$\int_\Omega |\nabla\phi(tx + (1-t)x')|^2\, dx \le \frac{1}{t^N} \int_\Omega |\nabla\phi(\tilde{x})|^2\, d\tilde{x} \le 2^N \int_\Omega |\nabla\phi(\tilde{x})|^2\, d\tilde{x}.$$
4. En déduire l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (1) sur l'espace V des fonctions de $H^1(\Omega)$ à moyenne nulle, avec une constante $C \le 2^{N-1} d(\Omega)^2$.

5. Application : pour $f \in L^2(\Omega)$, on considère le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{lcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)\,dx & = & 0, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

Montrer qu'il ne peut pas exister de solution $u \in H^1(\Omega)$ de (2) si f n'est pas à moyenne nulle dans Ω. On suppose donc désormais que $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$.

6. Donner la formulation variationnelle dans V de (2). Démontrer l'existence et l'unicité de la solution $u \in V$ de cette formulation variationnelle.
7. En supposant que la solution $u \in V$ de cette formulation variationnelle est régulière, démontrer qu'elle est bien une solution de (2) dans un sens que l'on précisera.

2 Différences finies pour l'éq. de Schrödinger (8 pts)

On considère l'équation de Schrödinger linéaire :

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

où $u(t,x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans le cas de conditions aux limites de périodicité en espace (de période 1). On note Δt le pas de temps, $\Delta x = 1/(N+1)$ le pas d'espace, et θ un paramètre dans l'intervalle $[0,1]$. Notant $u_j^n \in \mathbb{C}$ une approximation de $u(n\,\Delta t, j\,\Delta x)$, on s'intéresse aux schémas de discrétisation du type

$$i\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\theta\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) + (1-\theta)\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)\right) = 0,$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, avec conditions de périodicité discrète dans l'écriture du schéma ($u_{-1}^n = u_N^n$ et $u_{N+1}^n = u_0^n$).

1. Montrer la consistance du schéma à l'ordre au moins 1 en temps et 2 en espace.
2. On introduit la décomposition en série de Fourier de la solution discrète :

$$u^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}^n(k)\exp(2i\pi kx)\,, \quad x \in [0,1].$$

Calculer le coefficient d'amplification $A(k)$ associé à ce schéma en fonction de θ, des pas d'espace et de temps, et de $\sin(\pi k\Delta x)^2$.

3. Préciser le comportement du schéma selon la valeur de θ dans $[0,1]$, et montrer que l'on a conservation exacte de la norme L^2 de la solution discrète, c'est à dire de la quantité

$$\int_0^1 \mid u^n(x)|^2 \; dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid \hat{u}^n(k)|^2\,,$$

pour une valeur de θ à préciser.

4. Préciser les différences de comportement de cette classe de schémas en termes de stabilité par rapport à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur.