OPTIMISATION ET CONTRÔLE

Grégoire Allaire
Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique

1. Introduction sur le contrôle et rappels sur les EDO
2. Systèmes linéaires: critère de Kalman
3. Bref aperçu sur les systèmes non-linéaires

Pour une fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ on considère un système dynamique dont l'inconnue est $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $u : [0,T] \to \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, est un contrôle à notre disposition,

Contrôlabilité. Peut-on choisir le contrôle $u(t)$ pour atteindre une cible $C \subset \mathbb{R}^d$?

$$x(T) \in C$$

(La dimension k du contrôle est différente de celle d de l'état.)

EDO = équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

Pour un contrôle fixé $u(t)$, on pose $F(t, x) = f(t, x, u(t))$. En pratique, on a des contrôles discontinus (par exemple "on-off" ou "bang-bang"), donc on ne suppose pas $t \to F(t, x)$ continue.

Définition. On dit que $x : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est absolument continue et on écrit $x \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$ s'il existe $y \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$ tel que

$$x(t) - x(0) = \int_0^t y(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T].$$

On vérifie que, si $x \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$, alors $x(t)$ est continue sur $[0, T]$, dérivable presque partout, de dérivée égale à $y(t)$.

Théorème de Cauchy–Lipschitz. On suppose que :
(i) $F(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est mesurable en t et continue en x
(ii) $F(t,x)$ est intégrable en t

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \exists \beta \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+), \quad \forall t \in [0,T], \quad |F(t,x)| \leq \beta(t)$$

(iii) $F(t,x)$ est localement Lipschitzienne en x

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \exists r > 0, \quad \exists C_0 \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+),$$
$$\forall x_1, x_2 \in B(x,r), \quad |F(t,x_1) - F(t,x_2)| \leq C_0(t)|x_1 - x_2|$$

Alors, il existe une unique solution maximale $x \in AC(J;\mathbb{R}^d)$ au problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t)), \quad \text{p.p. } t \in J, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Soit $J = [0,T]$, soit $J = [0,T_*[$ avec $T_* < T$ et $\lim_{t \uparrow T_*} |x(t)| = +\infty$.

II - Systèmes linéaires

On se limite à $(x, u) \to f(t, x, u)$ linéaire, avec $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^k$.
EDO linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t) & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec les données $f \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$, $A \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^{d\times d})$ et $B \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^{d\times k})$.

- contrôle $u(t) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^k)$
- état $x(t) \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$

On appelle système autonome le cas où les coefficients ne dépendent pas du temps (et en absence de dérive f)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Proposition (formule de Duhamel). Pour $u \in L^1([0,T];\mathbb{R}^k)$, il existe une unique solution $x_u \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ donnée par la formule de Duhamel

$$x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Preuve. On définit l'exponentielle de matrice

$$e^A = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}A^i \quad \text{qui vérifie} \quad \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

donc x_u vérifie l'EDO (faire le calcul).

Définition On dit que le système linéaire autonome est contrôlable en temps T à partir de x_0 si

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}^d, \quad \exists u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k), \quad x_u(T) = x_1.$$

On cherche donc à atteindre la cible x_1 au temps T à partir de x_0.

Remarque. Grâce à la formule explicite pour x_u, en posant $x_2 = x_1 - e^{TA}x_0$, la contrôlabilité en T à partir de x_0 équivaut à

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \exists u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k), \quad x_2 = \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)\,ds,$$

c'est-à-dire à la surjectivité de l'application

$$\Phi : L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^d, \quad \Phi(u) = \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)\,ds.$$

Critère de Kalman

Théorème. Le système linéaire autonome $\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t)$ est contrôlable pour tout $T > 0$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ **si et seulement si** la matrice de Kalman $C \in \mathbb{R}^{d\times dk}$, définie par

$$C = \left(B, AB, \cdots, A^{d-1}B\right),$$

est de rang maximal, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(C) = d$.

Remarques.

1. Le critère de Kalman est indépendant de T et de x^0.
2. $T > 0$ peut être aussi petit qu'on veut et x^1 aussi loin de x^0 (c'est normal car le contrôle u n'est pas borné).
3. Le critère est invariant par changement de base.

Un grand nom de la théorie du contrôle: Kalman

Rudolf Kalman (1930-2016)

Preuve du critère de Kalman

(1) Supposons que $\mathrm{rg}(C) < d$. Alors les lignes de C sont liées. Donc il existe $\Psi \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $C^*\Psi = 0 \in \mathbb{R}^{dk}$ ou bien $\Psi^* C = 0$ (avec Ψ^* le vecteur ligne transposé de Ψ), c.-à-d.

$$\Psi^* B = \Psi^* AB = \cdots = \Psi^* A^{d-1} B = 0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^d = s_0 I_d + s_1 A + \cdots + s_{d-1} A^{d-1},$$

où I_d est l'identité $d \times d$ et $s_0, \cdots, s_{d-1} \in \mathbb{R}$. Par récurrence

$$\Psi^* A^k B = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

donc $\Psi^* e^{tA} B = 0 \ \forall t \in [0, T]$. Or $\Phi(u) = \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s)\, ds$. Ainsi, $\Psi^* \Phi(u) = 0$ pour tout contrôle u, et l'application Φ ne peut être surjective dans $\mathbb{R}^d$. Donc système pas contrôlable !

Preuve du critère de Kalman

(2) Réciproquement, si $\Phi(u)$ n'est pas surjective dans $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{Im}\Phi(u)$ est un s.e.v. strict de $\mathbb{R}^d$. Donc il existe $\Psi \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\Psi^*\Phi(u) \equiv \Psi^* \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)\, ds = 0, \quad \forall u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k).$$

En choisissant le contrôle $u(s) = B^* e^{(T-s)A^*}\Psi$, on obtient

$$\int_0^T \|\Psi^* e^{(T-s)A} B\|^2\, ds = 0 \quad \text{donc} \quad \Psi^* e^{tA} B = 0 \;\forall t \in [0,T].$$

En $t = 0$, il vient $\Psi^* B = 0$, puis en dérivant par rapport à t, il vient $\Psi^* AB = 0$ et ainsi de suite; d'où

$$\Psi^* B = \Psi^* AB = \cdots = \Psi^* A^{d-1} B = 0.$$

La matrice C n'est donc pas de rang maximal, $\mathrm{rg}(C) < d$.

Exemple: contrôlabilité d'un tram

Soit $X(t) : [0, T] \to \mathbb{R}$ la position d'un tram sur une ligne.
Le tram est controlé par son accélération $u(t) : [0, T] \to \mathbb{R}$

$$m\ddot{X}(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

On introduit la vitesse $V(t) := \dot{X}(t)$ pour réécrire

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{=:B} u(t), \quad \text{avec } x(t) := \begin{pmatrix} X(t) \\ V(t) \end{pmatrix}.$$

Il y a $d = 2$ degrés de liberté et $k = 1$ variable de contrôle. La matrice de Kalman $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 1/m & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rg}(C) = 2.$$

Le tram est donc contrôlable en tout temps T à partir de toutes position et vitesse initiales $x_0 = (X_0, V_0)^*$.

Reformulation du critère de Kalman

On introduit la matrice $G_T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ définie par

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^* e^{(T-s)A^*}\, ds.$$

Il est clair que G_T est symétrique, et on vérifie qu'elle est semi-définie positive car

$$y^* G_T y = \int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} y|^2\, ds \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

Lemme. Le système linéaire autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable pour tout $T > 0$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ **si et seulement si** la matrice G_T est inversible.

Remarque. On prépare le terrain pour une généralisation du critère de Kalman...

Preuve de la reformulation du critère de Kalman

(1) Soit $x_1 \in \mathbb{R}^d$. Supposons G_T inversible et posons

$$\overline{u}(s) = B^* e^{(T-s)A^*} y \quad \text{où} \quad y = G_T^{-1}(x_1 - e^{TA} x_0).$$

Par la formule de Duhamel, on voit que

$$x_{\overline{u}}(T) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A} B \overline{u}(s)\, ds = e^{TA} x_0 + G_T y = x_1.$$

Ceci montre que le système est contrôlable.
(2) Supposons qu'il existe $\Psi \in \ker(G_T) \subset \mathbb{R}^d$, $\Psi \neq 0$. Il vient

$$0 = \Psi^* G_T \Psi = \int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} \Psi|^2\, ds,$$

si bien que $\Psi^* e^{(T-s)A} B = 0$, $\forall\, s \in [0, T]$. Par la formule de Duhamel, on obtient $\Psi^*(x_u(T) - e^{TA} x_0) = 0$, ce qui montre que $x_u(T)$ est dans un hyperplan affine. Par conséquent, le système n'est pas contrôlable.

Extension au cas non-autonome

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $A \in L^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ et $B \in L^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times k})$.

Définition. Soit I_d la matrice identité de taille d. On appelle résolvante l'unique solution $R(t) \in AC([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ de

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t), \quad R(0) = I_d.$$

Remarques.

- Si A est constant, alors $R(t) = e^{tA}$.
- La résolvante permet de généraliser la formule de Duhamel.

Lemme. La solution du système différentiel instationnaire est

$$x_u(t) = R(t)x_0 + R(t)\int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Preuve. On vérifie que $R(t)$ est inversible. Posons $J(R) = \det R$, alors $\langle J'(R), S\rangle = \det R \operatorname{tr}(R^{-1}S)$. Donc, avec $S = \dot{R}(t)$,

$$\frac{d}{dt}\det(R(t)) = \operatorname{tr}(A(t))\det(R(t)), \quad \det(R(0)) = 1$$

d'où l'on déduit par intégration

$$\det(R(t)) = e^{\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))ds} > 0,$$

c'est-à-dire que $R(t)$ est inversible. On peut donc définir

$$x_u(t) = R(t)x_0 + R(t)\int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)\,ds.$$

On va vérifier que x_u est bien la solution de l'EDO.

Fin de la preuve.
On a défini

$$x_u(t) = R(t)x_0 + \underbrace{R(t)\int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)\,ds}_{=y_u(t)}.$$

On vérifie que $R(t)x_0$ est solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \forall t \in [0,T], \quad x(0) = x_0,$$

tandis qu'un calcul facile de la dérivée en temps de y_u montre que

$$\dot{y}_u(t) = A(t)y_u(t) + B(t)u(t) \quad \forall t \in [0,T], \quad y_u(0) = 0,$$

d'où le résultat par sommation et linéarité de l'EDO.

Critère de contrôlabilité, cas non-autonome

Lemme. Le système instationnaire est contrôlable en temps T à partir de x_0 **si et seulement si** la matrice $d \times d$ de contrôlabilité

$$K_T = \int_0^T R(s)^{-1}B(s)B(s)^*(R(s)^{-1})^*\,ds$$

est inversible.

Remarque. Si A et B sont constants, alors $K_T = e^{-TA}G_T e^{-TA^*}$.

Preuve. Identique au cas autonome.

(1) Si K_T est inversible, on choisit

$$\overline{u}(s) = B^*(s)(R(s)^{-1})^*y \quad \text{où} \quad y = K_T^{-1}(R(T)^{-1}x_1 - x_0),$$

alors

$$x_{\overline{u}}(T) = R(T)x_0 + R(T)\int_0^T R(s)^{-1}B(s)\overline{u}(s)\,ds = R(T)(x_0 + K_T y) = x_1.$$

Ce qui montre que le système est contrôlable.

Fin de la preuve.
(2) Si K_T n'est pas inversible, alors il existe $\Psi \in \ker(K_T) \subset \mathbb{R}^d$, $\Psi \neq 0$. Il vient

$$0 = \Psi^* K_T \Psi = \int_0^T |B^*(s)(R(s)^{-1})^* \Psi|^2 \, ds,$$

si bien que $\Psi^* R(s)^{-1} B(s) = 0$ pour tout $s \in [0, T]$. Donc, pour tout contrôle u on a

$$\Psi^* R(T)^{-1} x_u(T) = \Psi^* x_0 + \int_0^T \Psi^* R(s)^{-1} B(s) u(s) \, ds = \Psi^* x_0,$$

ce qui montre que $x_u(T)$ est dans un hyperplan affine. Par conséquent, le système n'est pas contrôlable.

Exemple de non-contrôlabilité

Soit le système de contrôle linéaire instationnaire ($d = 2$ et $k = 1$)

$$\dot{x}_u(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_u(t) + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u(t).$$

Comme A est constante, on a $R(s) = e^{sA} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$, d'où

$$R(s)^{-1}B(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$K_T = \int_0^T R(s)^{-1}B(s)B(s)^*(R(s)^{-1})^*\, ds = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice K_T n'est pas inversible et le système pas contrôlable.

Et pourtant, si $\tilde{B}^* = (\cos(\tau), \sin(\tau))$ est constant, alors la matrice de Kalman $C = (\tilde{B}, A\tilde{B})$ est de rang plein ($= 2$) et le système est contrôlable.

On considère encore un système de contrôle linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

mais désormais on suppose que le contrôle u est à valeurs dans un compact non-vide $U \subset \mathbb{R}^k$.

Définition. Pour $t \in [0, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble atteignable au temps t à partir de x_0 est

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in L^\infty([0, T]; U) \text{ tel que } x_u(t) = x_1 \right\}.$$

Théorème. Pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t, x_0)$ est compact, convexe, et varie continûment en t.

Ensemble atteignable (2)

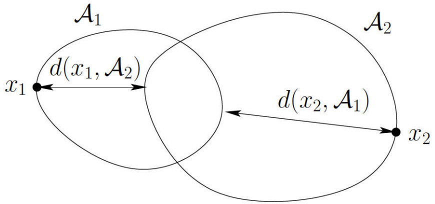
Définition de la continuité en temps de $\mathcal{A}(t, x_0)$ au sens de la distance de Hausdorff: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T], \quad |t_1 - t_2| \leq \delta \implies d(\mathcal{A}(t_1, x_0), \mathcal{A}(t_2, x_0)) \leq \epsilon,$$

où d est la distance de Hausdorff définie, pour $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathbb{R}^d$, par

$$d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \max\left(\sup_{x_1 \in \mathcal{A}_1} d(x_1, \mathcal{A}_2), \sup_{x_2 \in \mathcal{A}_2} d(x_2, \mathcal{A}_1) \right)$$

$$= \max\left(\sup_{x_1 \in \mathcal{A}_1} \inf_{y_2 \in \mathcal{A}_2} |x_1 - y_2|, \sup_{x_2 \in \mathcal{A}_2} \inf_{y_1 \in \mathcal{A}_1} |x_2 - y_1| \right).$$



Preuve de la convexité de $\mathcal{A}(t, x_0)$ quand U est convexe.
Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{A}(t, x_0)$ et $\theta \in [0, 1]$. Montrons que

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathcal{A}(t, x_0).$$

Par définition, il existe $u_i \in L^\infty([0, T]; U)$, $i = 1, 2$, tel que

$$x_i = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u_i(s)\, ds.$$

Par convexité de U, $\theta u_1 + (1 - \theta)u_2 \in L^\infty([0, T]; U)$ et

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(\theta u_1 + (1 - \theta)u_2)(s)\, ds.$$

Quand U n'est pas convexe, voir le polycopié.

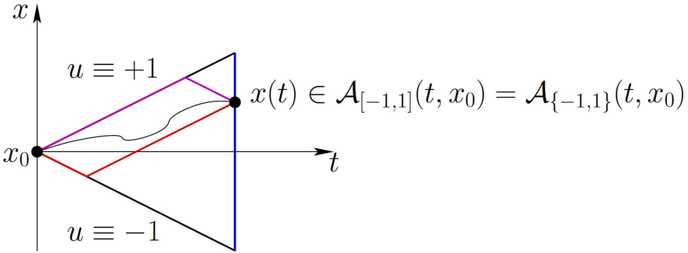
Pour le reste de la preuve du théorème, voir plus loin (cas non-linéaire).

Exemple: mouvement d'un point matériel

On contrôle un point matériel par sa vitesse $u(t) \in U = [-1, 1]$

$$\dot{x}(t) = u(t),\ \forall t \in [0, T], \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U = [-1, 1].$$

L'ensemble atteignable est $\mathcal{A}(t, 0) = [-t, t]$.
On constate qu'on obtient le même ensemble atteignable en se restreignant à des contrôles $u(t) \in \partial U = \{-1; +1\}$. On les appelle des contrôles bang-bang.



Pour un horizon temporel $T > 0$ on considère le système de contrôle non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

Le cas non-linéaire est beaucoup plus difficile que le cas linéaire !

But de ce cours: donner un aperçu de ce qu'on peut faire dans le cas non-linéaire avec l'idée de linéarisation.

Dans ce cas, on démontrera une propriété de contrôlabilité locale autour d'un contrôle $\bar{u}$ et d'une trajectoire de référence $x_{\bar{u}}$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un sous-ensemble compact non-vide.

Définition. Pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble atteignable en temps t à partir de x_0 est défini par

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in L^\infty([0, T]; U) \text{ tel que } x_u(t) = x_1 \right\}.$$

Remarque. Comme le système est non-linéaire, il peut ne pas exister de solution x_u sur tout $[0, T]$ pour tous les contrôles u. On note $\mathcal{U}_{T,x_0} \subset L^\infty([0, T]; U)$ le sous-ensemble des contrôles $u(t)$ tels que la trajectoire x_u est bien définie sur $[0, T]$.

Propriétés de l'ensemble atteignable

Théorème. On suppose que f est continue et C^1 par rapport à x, U est compact non-vide, les trajectoires sont uniformément bornées

$$\exists M > 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{T,x_0} \subset L^\infty([0,T];U), \qquad \sup_{t\in[0,T]} |x_u(t)| \le M,$$

et, $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, l'ensemble $K(t,x) = \{f(t,x,u) \mid u \in U\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $t \in [0,T]$, l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t,x_0)$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ et il varie continûment en temps.

Remarque. Même résultat que pour un système linéaire (sauf pour le caractère convexe de $\mathcal{A}(t,x_0)$).

Preuve: décomposée en deux lemmes.

Continuité en temps de l'ensemble atteignable

Lemme 1. On suppose que f est continue, U est compact non-vide et les trajectoires sont uniformément bornées

$$\exists M > 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{T,x_0} \subset L^\infty([0,T];U), \qquad \sup_{t\in[0,T]} |x_u(t)| \leq M.$$

Alors, l'ensemble $\mathcal{A}(t,x_0)$ varie continûment et uniformément en temps: pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t_1, t_2 \in [0,T], \quad |t_1 - t_2| \leq \delta \implies d(\mathcal{A}(t_1,x_0), \mathcal{A}(t_2,x_0)) \leq \epsilon,$$

où d est la distance de Hausdorff.

Idée clé de la preuve: écrire une solution de l'EDO comme

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s),u(s))\, ds.$$

Continuité en temps de l'ensemble atteignable (2)

Preuve. On pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(t_1, x_0)$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(t_2, x_0)$ avec $t_2 > t_1$. Soit $x_2 \in \mathcal{A}_2$. Il existe un contrôle $u \in L^\infty([0,t_2]; U)$ tel que

$$x_2 = x_0 + \int_0^{t_2} f(s, x(s), u(s))\, ds.$$

Avec ce même contrôle, on définit

$$x_1 = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s), u(s))\, ds \in \mathcal{A}(t_1, x_0).$$

D'après les hypothèses sur f, x et u, on a

$$|x_2 - x_1| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s), u(s))|\, ds \leq C|t_2 - t_1|.$$

Ceci montre que $d(x_2, \mathcal{A}_1) \leq |x_2 - x_1| \leq C|t_2 - t_1|$. On raisonne de même pour $x_1 \in \mathcal{A}_1$, ce qui conclut la preuve.

Lemme 2. Sous les hypothèses du théorème, pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t, x_0)$ est un compact de $\mathbb{R}^d$.

Idée de la preuve.
On montre d'abord que $\mathcal{A}(t, x_0)$ est borné car f est continue, U est bornée ainsi que toutes les trajectoires, donc

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, ds$$

implique que $|x(t) - x_0| \leq C\, t$.

Pour montrer que $\mathcal{A}(t, x_0)$ est fermé, on prend une suite $y_n \in \mathcal{A}(t, x_0)$, qui correspond à une suite de contrôles u_n et de trajectoires x_n, et on passe à la limite dans l'EDO

$$y_n = x_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s), u_n(s))\, ds.$$

Compacité de l'ensemble atteignable (suite)

Si l'on pouvait remplacer l'intégrale par une somme discrète

$$y_n = x_n(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{i_{max}} f(t_i, x_n(t_i), u_n(t_i)) \, \Delta t,$$

alors il est facile de passer à la limite car l'ensemble (fini) des suites $y_n, x_n(t_i), u_n(t_i)$ est borné et on peut en extraire une sous-suite convergente et passer à la limite pour obtenir

$$y_\infty = x_\infty(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{i_{max}} f(t_i, x_\infty(t_i), u_\infty(t_i)) \, \Delta t,$$

ce qui prouve que $y_\infty \in \mathcal{A}(t, x_0)$.

Compacité de l'ensemble atteignable (fin)

Malheureusement $u(t)$ et $x(t)$ sont des fonctions sur $[0, T]$ et on est donc en dimension infini: **c'est plus compliqué !**

Comme U est supposé compact, $L^\infty([0,T];U) = L^2([0,T];U)$ qui est un Hilbert, ce qui permet d'utiliser la notion de convergence faible pour passer à la limite.

L'hypothèse $K(t,x) = \{f(t,x,u) \mid u \in U\}$ convexe est cruciale.

Pour les détails (techniques !): voir le polycopié.

Contrôlabilité locale

But de ce cours: donner un aperçu de ce qu'on peut faire dans le cas non-linéaire avec l'idée de linéarisation.

Définition. On dit que le système non-linéaire est contrôlable localement en un point $y \in \mathcal{A}(T, x_0)$ s'il existe un voisinage V_y de y dans $\mathbb{R}^d$ tel que $V_y \subset \mathcal{A}(T, x_0)$, i.e., pour tout $y' \in V_y$, il existe un contrôle $u_{y'} \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ amenant l'état de x_0 à y' en temps T.

Explication. Par définition, il existe $u \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ tel que $y = x_u(T)$. La contrôlabilité locale veut dire que pour tout y' proche de y, il existe un autre contrôle $u_{y'} \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ tel que $x_{u_{y'}}(T) = y'$.

Système linéarisé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

On fixe u qui donne une trajectoire x_u. Si on varie le contrôle $u + \delta u$, comment varie la trajectoire $x_{u+\delta u}$?

Lemme (formel). Si δu est "petit", alors $x_{u+\delta u} \approx x_u + \delta x$ et δx est solution du système linéarisé

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A_u(t)\delta x(t) + B_u(t)\delta u(t) \quad \forall t \in [0, T], \\ \delta x(0) = 0, \end{cases}$$

où pour tout $t \in [0, T]$,

$$A_u(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad B_u(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{d\times k}.$$

Remarque. Pour rendre le lemme rigoureux, il faut préciser les espaces et la notion de dérivation.

Système linéarisé (preuve)

Preuve. On fait un développement de Taylor de f

$$f(t,x+\delta x,u+\delta u)=f(t,x,u)+\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u)\delta x+\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u)\delta u$$
$$+\,o(\delta x)+o(\delta u)$$

On soustrait
$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_{u+\delta u}(t) & = & f(t,x_{u+\delta u}(t),u(t)+\delta u(t)) \\ \dot{x}_u(t) & = & f(t,x_u(t)\quad\;\;,u(t)) \end{array}$$

pour obtenir, en supposant que $x_{u+\delta u}=x_u+\delta x+o(\delta x)$,

$$\dot{\delta x}(t)=A_u(t)\delta x(t)+B_u(t)\delta u(t)$$

qui est donc le système linéarisé.

Théorème. Soit $y \in \mathcal{A}(T, x_0)$ et u son contrôle tel que $y = x_u(T)$. Si le système différentiel linéarisé le long de la trajectoire x_u est **contrôlable** au temps T (cf. critère sur l'inversibilité de K_T), alors le système différentiel non-linéaire est localement contrôlable (au temps T à partir de x_0).

Idée de la preuve. On linéarise le problème de contrôle et on applique un théorème de type "fonctions implicites".

Notion clé: application entrée-sortie.

Contrôlabilité locale (3)

Définition. L'application entrée-sortie au temps T à partir de x_0 est l'application E_{T,x_0}

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{T,x_0} & \to & \mathcal{A}(T,x_0) \\ u & \to & x_u(T) \end{array}$$

avec $\mathcal{U}_{T,x_0} \subset L^\infty([0,T];U)$ l'ensemble des contrôles admissibles.

Autrement dit, l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T,x_0)$ est l'image de l'application entrée-sortie E_{T,x_0}.

Contrôlabilité locale (4)

Lemme.
L'application entrée-sortie E_{T,x_0}, définie par $E_{T,x_0}(u) = x_u(T)$, est différentiable par rapport à $u \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ et sa différentielle $E'_{T,x_0}(u)$ est donnée, pour tout $\delta u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$, par

$$\langle E'_{T,x_0}(u), \delta u \rangle = \delta x(T),$$

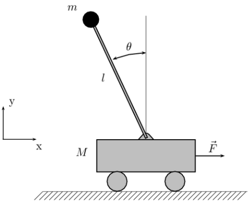
où δx est la solution du système linéarisé.

Remarque. La différentielle $\delta u \mapsto \delta x(T) = \langle E'_{T,x_0}(u), \delta u \rangle$ est l'application entrée-sortie du système linéarisé.

Preuve (formelle). Simple conséquence de la définition du système linéarisé.
Pour être rigoureux il faut préciser les espaces et la notion de dérivation.

Idée de la preuve du théorème.
Si le système différentiel linéarisé est contrôlable, cela veut dire que la différentielle de l'application entrée-sortie E'_{T,x_0} est surjective de $L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$ dans $\mathbb{R}^d$.
On conclut par le théorème de l'application surjective (qui est une variante du théorème des fonctions implicites).

Remarque. On n'a fait que donner un aperçu de la preuve dont les détails sont "hors programme".



Pendule inversé (masse vers le haut) dans le plan, tige faisant un angle θ avec la verticale. Le contrôle est l'accélération horizontale du point inférieur de la tige. La dynamique (adimensionnelle) est

$$\ddot{\theta}(t) = \sin(\theta(t)) - u(t)\cos(\theta(t)).$$

On pose $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$ pour obtenir un système d'ordre un

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) - u\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

Exemple du pendule inversé

On a donc $d = 2$ et $k = 1$. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) + u\sin(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

On considère le point d'équilibre instable $(x_0, u_0) = ((0,0)^*, 0)$. Le système linéarisé autour de ce point s'écrit sous la forme $\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La condition de Kalman est bien satisfaite car

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2.}$$

On a donc montré que le pendule inversé est **localement contrôlable** autour de son point d'équilibre instable.