OPTIMISATION ET CONTRÔLE

Grégoire Allaire
Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique

1. Contrôle optimal
2. Le système linéaire quadratique (ou système LQ)
3. Hamiltonien et principe du minimum
4. Equation de Ricatti

Quand le contrôle rencontre l'optimisation !

I - Contrôle optimal

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où A est une matrice $d \times d$ et B $d \times k$.

Supposons que la condition de Kalman soit satisfaite et que ce système soit contrôlable. Autrement dit, $\forall T > 0$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}^d$, il existe un contrôle $u(t) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^k)$ tel que

$$x_1 = x_u(T).$$

En général, il existe une infinité de tels contrôles !
Y a-t-il un "meilleur" contrôle que les autres ?

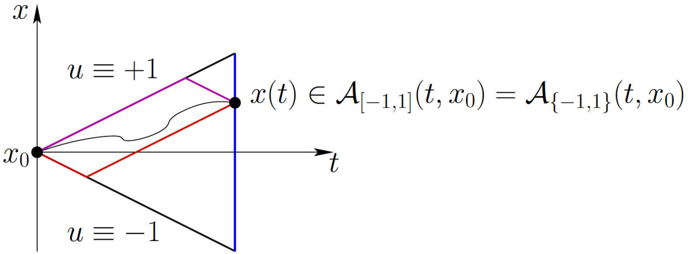
Contrôle optimal $=$ on optimise le choix du contrôle.

Exemple d'une infinité de contrôles possibles

On contrôle un point matériel par sa vitesse $u(t) \in U = [-1, 1]$

$$\dot{x}(t) = u(t), \ \forall t \in [0, T], \quad x(0) = 0.$$

L'ensemble atteignable est $\mathcal{A}(t, 0) = [-t, t]$.
Si $-t < x_1 < +t$, il existe une infinité de contrôles qui conduisent en $x_1 = x(t)$, y compris parmi les contrôles bang-bang $u(t) \in \partial U = \{-1; +1\}$.



Quel critère d'optimisation du contrôle ?

- Temps minimal T.
- Coût minimal de u, par exemple en norme $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$.
- Nombre minimal de commutations pour un contrôle bang-bang.
- Trajectoire x_u la plus régulière possible.
- S'approcher d'une trajectoire idéale.
- Etc.

Le critère de Kalman n'est pas constructif: aucun indice sur un contrôle possible.

Au contraire, la méthode du contrôle optimal est constructive et fournit des algorithmes de calcul du contrôle.

Le prix à payer est la perte de l'atteignabilité exacte, en général.

II - Le système linéaire-quadratique (LQ)

Pour $T > 0$ fixé, il s'agit du système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t) & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $f(t) \in L^1([0,T]; \mathbb{R}^d)$ et les matrices A $d \times d$ et B $d \times k$.

On y associe une fonction objectif quadratique

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u(t)^* R u(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T e_{x_u}(t)^* Q e_{x_u}(t)\, dt + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^* D e_{x_u}(T)$$

où R, Q, D sont des matrices symétriques positives et $e_{x_u} = x_u - \xi$ est l'écart avec une trajectoire cible $\xi \in C^0([0,T]; \mathbb{R}^d)$.

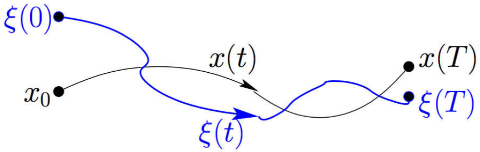
$$\text{On cherche } \overline{u} \in V = L^2([0,T]; \mathbb{R}^k) \text{ tel que } J(\overline{u}) = \inf_{u \in V} J(u).$$

Ici V est un espace de Hilbert et on peut appliquer les résultats du cours en optimisation.

Remarques sur la modélisation

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^* R u(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^* Q e_{x_u}(t)\, dt + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^* D e_{x_u}(T)$$

- Critère de type "moindres carrés".
- On agrège un coût du contrôle ($R \geq 0$), un suivi de trajectoire ($Q \geq 0$) et l'atteinte d'une cible finale ($D \geq 0$).
- C'est une méthode de pénalisation pour la cible.
- Aucun des 3 termes ne sera nul au minimum, en général !
- On pourrait avoir une cible discontinue $\xi \in L^2([0,T];\mathbb{R}^d)$
- On pourrait limiter les contrôles $u \in L^2([0,T];U)$ avec U convexe de $\mathbb{R}^k$.



Existence et unicité du contrôle optimal

Théorème. On suppose que R est définie positive et Q, D positives. Il existe un unique contrôle optimal $\overline{u} \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$.

Preuve. On montre que $J(u)$ est fortement convexe dans l'espace de Hilbert $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et on applique le Théorème 2.3.8 du cours. En effet, l'application de $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ dans $\mathbb{R}$

$$u \ \mapsto \ \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^* R u(t)\, dt \geq \frac{\alpha}{2}\|u\|_V^2$$

est fortement convexe avec $\alpha > 0$ la plus petite valeur propre de R. Par ailleurs, l'application de $AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$

$$x \ \mapsto \ \frac{1}{2}\int_0^T e_x(t)^* Q e_x(t)\, dt + \frac{1}{2} e_x(T)^* D e_x(T),$$

avec $e_x = x - \xi$, est convexe car quadratique et positive.

Existence et unicité du contrôle optimal (2)

Preuve (fin). Or l'application $u \to x_u$ est affine de $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ dans $AC([0,T];\mathbb{R}^d)$. Donc

$$u \ \to \ \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^* Q e_{x_u}(t)\,dt + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^* D e_{x_u}(T)$$

est convexe car quadratique et positive.

Ainsi $J(u)$ est fortement convexe comme somme de fonctions convexes dont une l'est fortement.

Remarque. L'équation d'Euler $J'(\overline{u}) = 0$ caractérise l'unique contrôle optimal (CNS).

Dérivée de la fonction objectif

Lemme. La fonction objectif est dérivable au sens de Fréchet sur $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et sa dérivée directionnelle vaut

$$\langle J'(u), \delta u\rangle = \int_0^T u(t)^* R\delta u(t)\, dt + \int_0^T e_{x_u}(t)^* Q\delta x(t)\, dt + e_{x_u}(T)^* D\delta x(T)$$

pour tout $\delta u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et avec δx la solution unique dans $AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ de

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) & \forall t \in [0,T], \\ \delta x(0) = 0. \end{cases}$$

Remarque. La formule de dérivée ci-dessus est inutilisable en pratique ! Pour chaque δu il faut calculer δx pour obtenir une seule dérivée directionnelle. On n'a pas une formule pour $J'(u)$.

Preuve. On pose $J(u) = J_R(u) + J_{QD}(u)$ avec

$$J_R(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^* R u(t)\, dt,$$

$$J_{QD}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^* Q e_{x_u}(t)\, dt + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^* D e_{x_u}(T).$$

$V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^T f(t)^* g(t)\, dt.$$

Donc $J_R'(u) = Ru(t)$ et, par composition des dérivations,

$$\langle J_{QD}'(u), \delta u\rangle = \int_0^T e_{x_u}(t)^* Q \delta x(t)\, dt + e_{x_u}(T)^* D \delta x(T)$$

où $\delta x = \langle x_u', \delta u\rangle$ avec x_u' la dérivée de x_u par rapport à u.

Preuve (fin). Le calcul de x'_u est très simple dans le cas d'un système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) + f(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ x_u(0) = x_0. \end{array} \right.$$

Par soustraction des équation pour u et $u + \delta u$ on obtient

$$x_{u+\delta u} = x_u + \delta x$$

qui est un développement de Taylor à l'ordre 1 (sans reste !) avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ \delta x(0) = 0. \end{array} \right.$$

La formule explicite de la solution montre que $\delta x \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ varie linéairement et continûment par rapport à $\delta u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, donc δx est bien la dérivée directionnelle $\langle x'_u, \delta u \rangle$.

Formule explicite pour la dérivée

On définit l'état adjoint p solution unique dans $AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ de

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -A^* p(t) - Qe_{x_u}(t) & \forall t \in [0,T], \\ p(T) = De_{x_u}(T). \end{cases}$$

Proposition. La fonction objectif $J(u)$ est différentiable sur V et on a, pour tout $u \in V$,

$$J'(u) = Ru + B^* p$$

qui appartient bien à $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$.

Remarque. On parle d'adjoint car l'équation adjointe est l'opérateur adjoint (pour le produit scalaire L^2) de l'équation de l'état x (A^* est la matrice adjointe de A). L'équation adjointe est rétrograde en temps. L'adjoint permet d'obtenir une formule explicite sans δx.

Preuve de la formule avec l'adjoint

Preuve. On rappelle que

$$\langle J'(u), \delta u\rangle = \int_0^T u(t)^* R\delta u(t)\, dt + \int_0^T e_{x_u}(t)^* Q\delta x(t)\, dt + e_{x_u}(T)^* D\delta x(T)$$

avec δx la solution unique de

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ \delta x(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}(t) = -A^* p(t) - Qe_{x_u}(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ p(T) = De_{x_u}(T). \end{array} \right.$$

On multiplie (1) par p et (2) par δx et on additionne

$$\frac{d}{dt}(p^*\delta x) = p^* A\delta x - \delta x^* A^* p + p^* B\delta u - \delta x^* Qe_{x_u}$$

$$= p^* B\delta u - e_{x_u}^* Q\delta x$$

Preuve de la formule avec l'adjoint (2)

Preuve (fin). On intègre en temps et, comme $\delta x(0) = 0$,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(p^* \delta x)\, dt = p^*(T)\delta x(T) = (De_{x_u}(T))^* \delta x(T)$$

Par conséquent

$$e_{x_u}(T)^* D\delta x(T) + \int_0^T e_{x_u}(t)^* Q\delta x(t)\, dt = \int_0^T p(t)^* B\delta u(t)\, dt$$

donc la formule pour $J'(u)$ se simplifie en

$$\langle J'(u), \delta u\rangle = \int_0^T u^* R\delta u\, dt + \int_0^T p^* B\delta u\, dt \qquad \forall\, \delta u \in V.$$

On conclut alors

$$J'(u) = Ru + B^* p$$

car R est symétrique mais pas B.

Commentaires sur l'adjoint

- Grâce à l'adjoint on peut calculer $J'(u)$ avec une seule ODE à résoudre en plus.
- Grâce à l'adjoint et la formule $J'(u) = Ru + B^* p$, on peut calculer numériquement un contrôle optimal par un algorithme d'optimisation.
- A l'optimum, on a $J'(\overline{u}) = 0$ et donc $\overline{u} = -R^{-1} B^* p$.
- Le calcul de l'adjoint p est rétrograde en temps: il faut avoir stocké x qui sert de "terme source".
- L'adjoint semble être une "astuce"...

Comment a-t-on deviné l'adjoint ?

En fait, l'adjoint est un multiplicateur de Lagrange !
(Voir amphi 5 du cours d'optimisation.)

Lagrangien et adjoint

On réécrit le problème de contrôle optimal comme

$$\min_{u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k),\, x \in L^2([0,T];\mathbb{R}^d)} \tilde{J}(u,x)$$

avec $e_x = x - \xi$ et

$$\tilde{J}(u,x) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^* R u(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T e_x(t)^* Q e_x(t)\, dt + \frac{1}{2} e_x(T)^* D e_x(T)$$

sous la contrainte qui relie x à u

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t) & \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On introduit un multiplicateur de Lagrange $p(t)$ et un Lagrangien

$$\mathcal{L}(u,x,p) = \tilde{J}(u,x) - \int_0^T p^* \left(\dot{x} - Ax - Bu - f\right) dt - p(0)^* \left(x(0) - x_0\right)$$

Lagrangien et adjoint (2)

On vérifie facilement que

$$\max_p \mathcal{L}(u,x,p) = \begin{cases} \tilde{J}(u,x_u) = J(u) & \text{si } x = x_u \\ +\infty & \text{si } x \neq x_u \end{cases}$$

Les conditions d'optimalité pour un problème de minimisation avec contraintes d'égalité sont

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0.$$

1. Par construction, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0$ donne la contrainte, i.e. $x = x_u$.
2. On va voir que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = Ru + B^* p$. On retrouve $J'(u)$!
3. On va voir que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ redonne la définition de l'adjoint p !

Lagrangien et adjoint (3)

Calcul de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$. On rappelle que

$$\mathcal{L}(u,x,p) = \tilde{J}(u,x) - \int_0^T p^* \left(\dot{x} - Ax - Bu - f\right) dt - p(0)^* \left(x(0) - x_0\right)$$

avec $e_x = x - \xi$ et

$$\tilde{J}(u,x) = \frac{1}{2}\int_0^T u^* R u \, dt + \frac{1}{2}\int_0^T e_x^* Q e_x \, dt + \frac{1}{2} e_x(T)^* D e_x(T)$$

Donc

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, \delta u \rangle = \int_0^T u^* R \delta u \, dt + \int_0^T p^* B \delta u \, dt,$$

d'où la formule

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = Ru + B^* p.$$

Lagrangien et adjoint (4)

Calcul de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$. Par intégration par parties

$$\mathcal{L}(u,x,p) = \tilde{J}(u,x) - \int_0^T p^* \left(\dot{x} - Ax - Bu - f\right) dt - p(0)^* \left(x(0) - x_0\right)$$

$$\Rightarrow \;\; \mathcal{L}(u,x,p) = \tilde{J}(u,x) + \int_0^T x^* \left(\dot{p} + A^* p\right) dt - p(T)^* x(T)$$

$$+ \int_0^T p^* \left(Bu + f\right) dt + p(0)^* x_0$$

Donc

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \delta x \rangle = \int_0^T \delta x^* \left(\dot{p} + A^* p + Q e_x\right) dt + \left(D e_x(T) - p(T)\right)^* \delta x(T)$$

Lagrangien et adjoint (4)

On a calculé

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \delta x \rangle = \int_0^T \delta x^* \left(\dot{p} + A^* p + Q e_x \right) dt + (D e_x(T) - p(T))^* \delta x(T)$$

Donc, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ implique que

$$\dot{p} + A^* p + Q e_x = 0 \quad \forall t \in (0, T)$$

et

$$p(T) = D e_x(T)$$

ce qui est bien la définition de l'état adjoint.

Remarque. Cette façon de trouver l'adjoint à partir du Lagrangien est un résultat profond (mais délicat) qui se généralise dans de nombreuses situations.
On peut considérer que c'est à la limite du "programme"...

Condition d'optimalité

Théorème. Le contrôle $\overline{u} \in V$ est optimal pour le système LQ **si et seulement si** on a

$$\overline{u}(t) = -R^{-1}B^*\overline{p}(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

où $\overline{p}$ est l'état adjoint solution de

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^*\overline{p}(t) - Q(\overline{x}-\xi)(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad \overline{p}(T) = D(\overline{x}-\xi)(T),$$

et $\overline{x} = x_{\overline{u}}$ est l'état associé à $\overline{u}$,

$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) + B\overline{u}(t) + f(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad \overline{x}(0) = x_0.$$

Le triplet $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$ satisfaisant les conditions ci-dessus est appelé une extrémale.

Condition d'optimalité (2)

Preuve. La fonction objectif $J(u)$ est fortement convexe, donc son unique point de minimum $\overline{u}$ est caractérisé par $J'(\overline{u}) = 0$ qui est une condition nécessaire et suffisante.

Remarque. On sait déjà que $\overline{u}$ est unique mais on peut le retrouver en faisant la différence (notée Δ) entre 2 extrémales et en calculant

$$\int_0^T \left(\Delta\overline{x}(t)^* \frac{d\Delta\overline{p}}{dt}(t) + \Delta\overline{p}(t)^* \frac{d\Delta\overline{x}}{dt}(t) \right) dt$$

qui conduit à $B^*\Delta\overline{p} = 0$, puis $\Delta\overline{u} = 0$, $\Delta\overline{x} = 0$ et $\Delta\overline{p} = 0$.

Mouvement d'un point matériel controlé par sa vitesse

$$\dot{x}_u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0.$$

On minimise dans $V = L^2([0,T];\mathbb{R})$ le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T x_u(t)^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2\,dt.$$

Ce problème rentre dans le cadre du système LQ en posant

$$A = 0, \quad B = 1, \quad R = 1, \quad Q = 1, \quad D = 0, \quad \xi \equiv 0.$$

En appliquant le Théorème, on déduit que le contrôle optimal est $\overline{u}(t) = -\overline{p}(t)$, avec l'état adjoint solution de

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\overline{x}(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad \overline{p}(T) = 0.$$

Exemple: contrôle d'un point matériel (2)

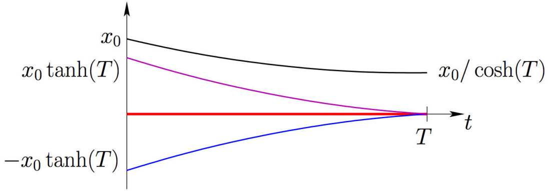
On a donc

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\overline{x}(t)\\ \overline{p}(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{=Z}\begin{pmatrix}\overline{x}(t)\\ \overline{p}(t)\end{pmatrix}, \qquad e^{tZ} = \begin{pmatrix}\cosh(t) & -\sinh(t)\\ -\sinh(t) & \cosh(t)\end{pmatrix},$$

si bien que
$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= x_0\cosh(t) - \overline{p}(0)\sinh(t),\\ \overline{p}(t) &= -x_0\sinh(t) + \overline{p}(0)\cosh(t).\end{aligned}$$

On utilise la condition $\overline{p}(T) = 0$ pour trouver $\overline{p}(0) = x_0\tanh(T)$.

Donc, l'extrémale s'écrit
$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= \frac{x_0}{\cosh(T)}\cosh(T-t),\\ -\overline{u}(t) = \overline{p}(t) &= \frac{x_0}{\cosh(T)}\sinh(T-t).\end{aligned}$$



Calcul numérique d'un contrôle optimal

En pratique, pour calculer un contrôle optimal on utilise un algorithme de gradient.

$$\min_{u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)} J(u)$$

avec

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^* R u \, dt + \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}^* Q e_{x_u} \, dt + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^* D e_{x_u}(T)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t) & \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Algorithme de gradient à pas fixe:

1. Initialisation: $u_0 \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, par exemple $u_0 = 0$.
2. Itérations $k \geq 0$:
   1. calculer x_k en fonction de u_k
   2. calculer p_k en fonction de x_k et u_k
   3. mise à jour du contrôle avec un pas $\delta > 0$

$$u_{k+1} = u_k - \delta J'(u_k) \quad \text{avec} \quad J'(u_k) = Ru_k + B^* p_k$$

Calcul numérique d'un contrôle optimal (2)

Schéma d'Euler implicite (par exemple) pour résoudre les EDO:
$\Delta t = \frac{T}{N}$, $t_n = n\Delta t$ et $x_k^n \approx x_k(t_n)$, $p_k^n \approx p_k(t_n)$, $u_k^n \approx u_k(t_n)$.

Résolution séquentielle:

- $x_k^0 = x_0$ et pour n croissant

$$\frac{x_k^n - x_k^{n-1}}{\Delta t} = Ax_k^n + Bu_k^n + f^n \qquad 1 \leq n \leq N$$

On stocke la solution $(x_k^n)_n$.

- $p_k^N = D(x_k^N - \xi^N)$ et pour n décroissant (équation rétrograde)

$$\frac{p_k^{n+1} - p_k^n}{\Delta t} = -A^* p_k^n - Q(x_k^n - \xi^n) \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

On en déduit le nouveau contrôle $u_{k+1}^n = u_k^n - \delta(Ru_k^n + B^* p_k^n)$.

On reformule les conditions d'optimalité du système LQ afin de préparer le terrain pour le prochain cours sur le principe du minimum de Pontryaguine.

Définition. Le Hamiltonien associé au système LQ est l'application $H : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(t,x,p,u) = p^*(Ax+Bu+f(t))+\frac{1}{2}u^*Ru+\frac{1}{2}(x-\xi(t))^*Q(x-\xi(t)).$$

Attention ! Ici, (x,p,u) est un vecteur de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$, indépendant du temps t, et pas les solutions d'EDO.

Structure Hamiltonienne

$$H(t,x,p,u) = p^*(Ax+Bu+f(t))+\frac{1}{2}u^*Ru+\frac{1}{2}(x-\xi(t))^*Q(x-\xi(t)).$$

On vérifie que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = A^*p+Q(x-\xi(t)),\ \frac{\partial H}{\partial p} = Ax+Bu+f(t),\ \frac{\partial H}{\partial u} = B^*p+Ru.$$

Par conséquent, l'extrémale $(\overline{x},\overline{p},\overline{u})$ donnée par les conditions d'optimalité vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{dt}(t) &= A\overline{x}(t)+B\overline{u}(t)+f(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),\overline{u}(t)), \\ \frac{d\overline{p}}{dt}(t) &= -A^*\overline{p}(t)-Q(\overline{x}(t)-\xi(t)) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),\overline{u}(t)), \end{aligned}$$

et, puisque $\overline{u}(t) = -R^{-1}B^*\overline{p}(t)$,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),\overline{u}(t)) = 0.$$

Principe du minimum de Pontryaguine

A cause de la structure Hamiltonienne du système LQ, la condition d'optimalité est aussi donnée par le résultat suivant.

Proposition. Le contrôle $\overline{u} \in V$ est optimal pour le système LQ **si et seulement si**

$$\overline{u}(t) = \underset{v \in \mathbb{R}^k}{arg\ min}\, H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), v), \quad \forall t \in [0, T],$$

avec $\overline{x}$ et $\overline{p}$ solutions des EDO ci-dessus.

Preuve. Comme $H = \frac{1}{2} u^* R u + p^* B u + \mathrm{reste}$, la fonction $u \mapsto H$ est fortement convexe, admet un unique point de minimum, caractérisé par la condition nécessaire et suffisante d'optimalité $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, qui est justement $\overline{u}(t) = -R^{-1} B^* \overline{p}(t)$.

Remarque. On généralisera ce principe du minimum à d'autres systèmes...

Exemple: amortissement de l'oscillateur harmonique

Pour une fréquence $\omega > 0$ on considère

$$\ddot{X}(t) + \omega^2 X(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad X(0) = X_0, \ \dot{X}(0) = V_0.$$

Si $u(t) \equiv 0$, la solution est $X(t) = X_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$.

On introduit la vitesse $V(t) = \dot{X}(t)$ pour réécrire

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:B} u(t), \quad \text{avec } x(t) := \begin{pmatrix} X(t) \\ V(t) \end{pmatrix}.$$

Il y a $d = 2$ degrés de liberté et $k = 1$ variable de contrôle. La matrice de Kalman $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rg}(C) = 2.$$

L'oscillateur harmonique est donc contrôlable en tout temps T à partir de toutes position et vitesse initiales $x_0 = (X_0, V_0)^*$.

Exemple: amortissement de l'oscillateur harmonique (suite)

On minimise dans $V = L^2([0,T];\mathbb{R})$ le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\|x_u(T)\|^2 + \frac{R}{2}\int_0^T u(t)^2\,dt.$$

Ce problème rentre dans le cadre du système LQ avec $R \in \mathbb{R}^+$, $Q = 0$, $\xi = 0$ et $D = \mathrm{Id}$.
L'état adjoint $p = (p_1, p_2)^*$ est solution de

$$\dot{p}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:-A^*} p(t), \quad \text{avec } p(T) := x_u(T).$$

On vérifie $\ddot{p}_1(t) + \omega^2 p_1(t) = \ddot{p}_2(t) + \omega^2 p_2(t) = 0$. Donc

$$\begin{cases} p_1(t) = X(T)\cos\omega(t-T) + \omega V(T)\sin\omega(t-T) \\ p_2(t) = V(T)\cos\omega(t-T) - \dfrac{X(T)}{\omega}\sin\omega(t-T) \end{cases}$$

Exemple: amortissement de l'oscillateur harmonique (suite)

En appliquant le Théorème, on obtient le contrôle optimal qui est $u(t) = -R^{-1}B^*p(t) = -R^{-1}p_2(t)$.
On calcule alors l'état optimal $x_u = (X, Y)^*$ pour ce contrôle

$$X(t) = \alpha(t)\cos\omega t + \beta(t)\sin\omega t, \quad V(t) = -\omega\alpha(t)\sin\omega t + \omega\beta(t)\cos\omega t$$

avec (après un peu de calcul)

$$\alpha(t) = X_0 + \frac{V(T)}{\omega R}\left(\cos\omega T\frac{(1-\cos 2\omega t)}{4\omega} + \sin\omega T\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right)\right)$$
$$- \frac{X(T)}{\omega^2 R}\left(\cos\omega T\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right) - \sin\omega T\frac{(1-\cos 2\omega t)}{4\omega}\right)$$

$$\beta(t) = \frac{V_0}{\omega} - \frac{V(T)}{\omega R}\left(\cos\omega T\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right) + \sin\omega T\frac{(1-\cos 2\omega t)}{4\omega}\right)$$
$$+ \frac{X(T)}{\omega^2 R}\left(\cos\omega T\frac{(1-\cos 2\omega t)}{4\omega} - \sin\omega T\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right)\right)$$

Exemple: amortissement de l'oscillateur harmonique (fin)

On calcule $X(T), V(T)$ en fonction de X_0, V_0 grâce au système

$$X(T) = \alpha(T)\cos\omega T + \beta(T)\sin\omega T,$$
$$V(T) = -\omega\alpha(T)\sin\omega T + \omega\beta(T)\cos\omega T.$$

Pour T grand on trouve

$$X(T) = \frac{2\omega^2 R}{T}\left(X_0\cos\omega T + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega T + o(1)\right),$$
$$V(T) = \frac{2R}{T}\left(-\omega X_0\sin\omega T + V_0\cos\omega T + o(1)\right).$$

Effectivement, l'oscillateur harmonique est amorti par un facteur R/T grâce au contrôle optimal

$$u(t) = -\frac{V(T)}{R}\cos\omega(t-T) + \frac{X(T)}{R\omega}\sin\omega(t-T)$$

IV - Equation de Ricatti

La condition d'optimalité sur l'extrémale ne permet pas toujours de calculer facilement le contrôle optimal.
En effet, l'extrémale $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$ vérifie, $\forall t \in [0, T]$,

$$
\begin{aligned}
\overline{u}(t) &= -R^{-1}B^*\overline{p}(t), \\
\frac{d\overline{p}}{dt}(t) &= -A^*\overline{p}(t) - Q(\overline{x} - \xi)(t), \\
\frac{d\overline{x}}{dt}(t) &= A\overline{x}(t) + B\overline{u}(t) + f(t).
\end{aligned}
$$

On élimine $\overline{u}$ pour obtenir un système linéaire couplé en $(\overline{x}, \overline{p})$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{p}}{dt}(t) &= -A^*\overline{p}(t) - Q(\overline{x} - \xi)(t), \\
\frac{d\overline{x}}{dt}(t) &= A\overline{x}(t) - BR^{-1}B^*\overline{p}(t) + f(t).
\end{aligned}
$$

Malheureusement, c'est un problème "aux deux bouts" car

$$\overline{x}(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \overline{p}(T) = D(\overline{x} - \xi)(T)$$

donc difficile à résoudre numériquement.

Equation de Ricatti (2)

L'équation de Ricatti permet de calculer le contrôle optimal $\overline{u}(t)$ explicitement par rétroaction (ou feedback) à partir de l'état $\overline{x}(t)$. **Dans un premier temps,** on suppose que $f(t) = 0$ et $\xi(t) = 0$.

Théorème. Il existe une unique matrice $P \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ solution de l'équation de Riccati

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}(t) = -A^* P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^* P(t) - Q, \quad \forall t \in [0,T], \\ P(T) = D. \end{array} \right.$$

L'adjoint est $\overline{p}(t) = P(t)\overline{x}(t)$ et le contrôle optimal s'écrit sous forme de boucle fermée

$$\overline{u}(t) = K(t)\overline{x}(t), \quad K(t) = -R^{-1}B^* P(t), \quad \forall t \in [0,T].$$

De plus, $P(t)$ est symétrique positive (et définie positive si D l'est).

Equation de Ricatti (3)

Remarques.

- L'équation de Ricatti permet non seulement de calculer facilement le contrôle optimal mais aussi de l'écrire comme une rétroaction (ou feedback) $\overline{u}(t) = K(t)\overline{x}(t)$.
- On parle de contrôle en boucle fermée quand le contrôle dépend de l'état (c'est plus robuste en pratique).
- Au contraire, un contrôle en boucle ouverte est calculé à l'avance, indépendamment de l'état.
- L'équation de Ricatti est une EDO non-linéaire avec une condition finale (c'est un problème de Cauchy).
- Comme la matrice $P(t)$ est symétrique, il y a $d(d+1)/2$ inconnues dans l'équation de Ricatti.
- Il existe de très bonnes méthodes numériques pour résoudre l'équation de Ricatti.

Equation de Ricatti (4)

Preuve. Une fois éliminé $\overline{u}$, une extrémale vérifie

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^*\overline{p}(t) - Q\overline{x}(t),$$
$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) - BR^{-1}B^*\overline{p}(t),$$
$$\overline{x}(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \overline{p}(T) = D\overline{x}(T)$$

Donc $(\overline{x}, \overline{p})$ dépend linéairement de $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Il existe des matrices $\mathcal{X}, \mathcal{P}$ dans $C^1([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$ telles que

$$\overline{x}(t) = \mathcal{X}(t)x_0, \quad \overline{p}(t) = \mathcal{P}(t)x_0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \mathcal{X}(0) = I_d.$$

Montrons que $\mathcal{X}(t)$ est inversible pour tout $t \in [0,T]$.
Si c'est faux, il existe $s \in]0, T]$ et $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^d$ tels que $\overline{x}(s) = \mathcal{X}(s)x_0 = 0$.

Soit $s \in]0, T]$ et $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^d$ tels que $\overline{x}(s) = \mathcal{X}(s)x_0 = 0$. On a

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{p}(t)^*\overline{x}(t)\right) = -\overline{x}(t)^* Q\overline{x}(t) - (B^*\overline{p}(t))^* R^{-1} B^*\overline{p}(t).$$

En intégrant de s à T, et comme $\overline{x}(s) = 0$, il vient

$$0 = (D\overline{x}(T))^*\overline{x}(T) + \int_s^T \left(\overline{x}(t)^* Q\overline{x}(t) + (B^*\overline{p}(t))^* R^{-1} B^*\overline{p}(t)\right) dt \geq 0.$$

Les matrices D, Q, R étant positives, on en déduit que

$$B^*\overline{p}(t) = 0 \qquad \forall t \in [s, T],$$

et donc $\overline{u}(t) = -R^{-1}B^*\overline{p}(t) = 0$, pour $t \in [s, T]$.
L'équation pour $\overline{x}$ se simplifie alors en

$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) \quad \text{sur } [s, T] \quad \text{et } \overline{x}(s) = 0,$$

d'où l'on déduit $\overline{x}(t) = 0$ sur $[s, T]$.

Equation de Ricatti (6)

L'équation pour $\overline{p}$ se simplifie alors en

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^*\overline{p}(t) \quad \text{sur} \ \ [s, T] \quad \text{et} \ \ \overline{p}(T) = D\overline{x}(T) = 0,$$

d'où l'on déduit $\overline{p}(t) = 0$ sur $[s, T]$.

Par conséquent, $(\overline{x}, \overline{p})$ vérifie une EDO avec conditions finales $\overline{x}(T) = \overline{p}(T) = 0$. On en déduit que $\overline{x}(t) = \overline{p}(t) = 0$ sur $[0, T]$.

En particulier, on obtient $x(0) = x_0 = 0$, d'où la contradiction. La matrice $\mathcal{X}(t)$ est donc inversible

Equation de Ricatti (7)

On pose

$$P(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{X}(t)^{-1}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Par construction, $\overline{p}(t) = \mathcal{P}(t)x_0 = P(t)\overline{x}(t)$. En dérivant, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{p}}{dt}(t) &= \frac{dP}{dt}(t)\overline{x}(t) + P(t)\frac{d\overline{x}}{dt}(t) \\ &= \left(\frac{dP}{dt}(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^*P(t)\right)\overline{x}(t)\end{aligned}$$

Or $\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^*\overline{p}(t) - Q\overline{x}(t)$. Donc, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\Bigg(\underbrace{\frac{dP}{dt}(t) + P(t)A + A^*P(t) - P(t)BR^{-1}B^*P(t) + Q}_{\text{équation de Riccati}}\Bigg)\overline{x}(t) = 0.$$

Comme $\mathcal{X}(t)$ est inversible, le vecteur $\overline{x}(t)$ décrit $\mathbb{R}^d$ lorsque x_0 décrit $\mathbb{R}^d$. Ainsi $P(t)$ vérifie l'équation de Riccati.

Equation de Ricatti (8)

De même $\overline{p}(T) = D\overline{x}(T) = P(T)\overline{x}(T)$ et $\overline{x}(T)$ décrit $\mathbb{R}^d$ quand x_0 varie. Donc $P(T) = D$ est la condition finale de Riccati.

On a montré que $P(t)$ est solution globale de l'équation de Ricatti. Pour l'unicité, on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz (l'EDO est quadratique, donc la condition de Lipschitz locale est vérifiée). Pas symétrie de R et Q, si on transpose l'équation de Ricatti,

$$\dot{P}(t) = -A^* P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^* P(t) - Q,$$

on obtient la même équation pour P^* et la même donnée initiale $P(T) = D = D^* = P(T)^*$. Donc l'unicité de la solution implique la symétrie $P(t) = P(t)^*$.

Equation de Ricatti (9)

Montrons que $P(t)$ est positive. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $x_0 = \mathcal{X}(t)^{-1}x$ de sorte que $x = \overline{x}(t)$ où $\overline{x}$ est la trajectoire optimale issue de x_0. La fonction $t \mapsto \overline{p}(t)^*\overline{x}(t)$ est décroissante car

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{p}(t)^*\overline{x}(t)\right) = -\overline{x}(t)^* Q\overline{x}(t) - (B^*\overline{p}(t))^* R^{-1} B^*\overline{p}(t) \leq 0.$$

Donc

$$x^* P(t)x = \overline{x}(t)^* P(t)\overline{x}(t) \geq \overline{x}(T)^* D\overline{x}(T) \geq 0,$$

ce qui montre que $P(t)$ est positive.

Si D est définie positive, $x^* P(t)x = 0$ implique $\overline{x}(T) = 0$, d'où $x = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}(T)^{-1}\overline{x}(T) = 0$, i.e., $P(t)$ est définie positive.

Application à l'asservissement ou à la poursuite

On revient au cas général, $f(t) \neq 0$ et $\xi(t) \neq 0$. On suppose que $\xi(t)$ est une trajectoire, donnée par

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + f(t) & \forall t \in [0,T], \\ \xi(0) = \xi_0. \end{cases}$$

On note la différence $z(t) = x(t) - \xi(t)$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) & \forall t \in [0,T], \\ z(0) = z_0 = x_0 - \xi_0. \end{cases}$$

La fonction objectif est

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^* R u(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T z_u(t)^* Q z_u(t)\, dt + \frac{1}{2} z_u(T)^* D z_u(T)$$

Application à l'asservissement ou à la poursuite (2)

On peut appliquer les résultats précédents à $z(t)$.

- L'équation de Ricatti permet de calculer le contrôle optimal comme une rétroaction (ou feedback)

$$\overline{u}(t) = K(t)\big(\overline{x}(t) - \xi(t)\big).$$

- On corrige selon l'erreur sur la trajectoire.
- C'est un contrôle en boucle fermée qui est plus **robuste** en pratique.
- La robustesse vient de ce que $K(t)$ (donné par Ricatti) ne dépend pas du passé (voir transparent suivant).
- Ca se généralise au cas d'erreurs sur l'évaluation de $x(t)$.

Robustesse du feedback et de Ricatti

Contrôle optimal “classique”:

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^*\overline{p}(t) - Q\overline{x}(t) \qquad \overline{p}(T) = D\overline{x}(T)$$
$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) + B\overline{u}(t) \qquad \overline{x}(0) = x_0$$

avec $\overline{u}(t) = -R^{-1}B^*\overline{p}(t)$.
Ce contrôle optimal dépend de x_0 et de l'historique !

Contrôle optimal en “boucle fermée” (feedback):

$\overline{u}(t) = K(t)\overline{x}(t), \quad K(t) = -R^{-1}B^*P(t)$ avec l'équation de Ricatti:

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = -A^*P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^*P(t) - Q \\ P(T) = D \end{cases}$$

Ricatti et $K(t)$ ne dépendent pas de x_0 et de l'historique !
Si on se trompe au début, on peut se corriger après !

Exemple: contrôle d'un point matériel

Mouvement d'un point matériel controlé par sa vitesse

$$\dot{x}_u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0.$$

On minimise dans $V = L^2([0,T];\mathbb{R})$ le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T x_u(t)^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2\,dt.$$

Ce problème rentre dans le cadre du système LQ en posant

$$A = 0, \quad B = 1, \quad R = 1, \quad Q = 1, \quad D = 0, \quad \xi \equiv 0.$$

L'équation de Riccati pour $P(t)$, ici à valeurs scalaires, s'écrit

$$\dot{P}(t) = P(t)^2 - 1, \quad \forall t \in [0,T], \qquad P(T) = 0.$$

On obtient $P(t) = \tanh(T-t)$. Le contrôle optimal se met alors sous forme de boucle fermée

$$\overline{u}(t) = K(t)\overline{x}(t), \quad K(t) = -P(t) = -\tanh(T-t).$$