OPTIMISATION ET CONTRÔLE

Grégoire Allaire
Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique

1. Contrôle optimal de systèmes non-linéaires
2. Principe du minimum de Pontryaguine (PMP)
3. Exemple d'une épidémie
4. Exemple de la ruche d'abeille

I - Contrôle optimal de systèmes non-linéaires

Considérons le système non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)), & \forall t \in [0, T], \\ x_u(0) = x_0, \end{cases}$$

où $f(t, x, u)$ est une fonction de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^d$. On limite la valeur des contrôles à un fermé non-vide $U \subset \mathbb{R}^k$

On cherche un contrôle optimal $\overline{u} \in \mathcal{U} = L^1([0, T]; U)$ tel que

$$J(\overline{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ J(u) = \int_0^T g(t, x_u(t), u(t))\, dt + h(x_u(T)) \right\}$$

avec des fonctions $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Hypothèses sur la dynamique

On suppose que la fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$ vérifie:

(a) f C^0 en (t,x,u) et f C^1 par rapport à x,

(b) $\exists C$ tel que, $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\forall v \in U$,

$$|f(t,y,v)| \leq C(1+|y|+|v|),$$

(c) $\forall R > 0$, $\exists C_R$ tel que, $\forall t \in [0,T]$, $\forall y \in \overline{B}(0,R)$, $\forall v \in U$,

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y,v)| \leq C_R(1+|v|).$$

L'objectif des trois hypothèses est de pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et assurer que la solution est globale en temps.

Lemme. Sous les hypothèses (a), (b), (c), pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}$, il existe une unique trajectoire associée $x_u \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ solution du système non-linéaire.

Preuve. On applique le Théorème 8.3.6 de Cauchy-Lipschitz pour

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $F(t, x) = f(t, x, u(t))$ qui est localement lipschitzienne par rapport à x car, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x_1, x_2 \in \overline{B}(0, R)$,

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq C_0(t)|x_1 - x_2|, \quad C_0(t) = \sup_{y \in \overline{B}(0,R)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, y, u(t)) \right|.$$

On a $C_0(t) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+$ grâce à (c).

On a $|F(t, x)| \leq \beta(t) \in L^1([0, T])$ grâce à (b).

Il existe donc une unique solution sur un intervalle maximal $[0, T^*[$.

Rappel du Théorème 8.3.6

Théorème de Cauchy–Lipschitz. On suppose que :
(i) $F(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est mesurable en t et continue en x
(ii) $F(t,x)$ est intégrable en t

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \exists \beta \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+), \quad \forall t \in [0,T], \quad |F(t,x)| \leq \beta(t)$$

(iii) $F(t,x)$ est localement Lipschitzienne en x

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \exists r > 0, \quad \exists C_0 \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+), \\ &\forall x_1, x_2 \in B(x,r), \quad |F(t,x_1) - F(t,x_2)| \leq C_0(t)|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Alors, il existe une unique solution maximale $x \in AC(J;\mathbb{R}^d)$ au problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t)), \quad \text{p.p. } t \in J, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Soit $J = [0,T]$, soit $J = [0,T_*[$ avec $T_* < T$ et $\lim_{t \uparrow T_*} |x(t)| = +\infty$.

Existence d'une trajectoire globale en temps (2)

Fin de la preuve. Le Théorème 8.3.6 de Cauchy-Lipschitz donne donc l'existence et l'unicité d'une solution sur un intervalle maximal $[0, T^*[$.

Pour montrer que $T^* > T$, on va utiliser le lemme de Gronwall qui montre que la solution $x(t)$ reste bornée sur $[0, T]$ (pas d'explosion en $T_* \leq T$).

Lemme de Gronwall. Soit $\psi, z : [0,T] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\psi(t) \geq 0$ et

$$\exists \alpha \geq 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad z(t) \leq \alpha + \int_0^t \psi(s) z(s)\, ds.$$

Alors, on a $z(t) \leq \alpha e^{\int_0^t \psi(s)\, ds}$ pour tout $t \in [0,T]$.

Remarque. On utilise parfois l'hypothèse (plus forte)

$$\dot{z}(t) \leq \psi(t) z(t).$$

On obtient alors la même conclusion avec $\alpha = z(0)$.

Notez que si $\dot{z}(t) = \psi(t) z(t)$, alors la conclusion est facile avec une égalité. Toute la difficulté vient donc de l'inégalité...

Preuve. Posons

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)\,ds \quad \text{et} \quad v(t) = e^{-\Psi(t)} \int_0^t \psi(s)z(s)\,ds.$$

En utilisant l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}(t) &= -\psi(t)e^{-\Psi(t)} \int_0^t \psi(s)z(s)\,ds + e^{-\Psi(t)}\psi(t)z(t) \\ &= \psi(t)e^{-\Psi(t)}\left(z(t) - \int_0^t \psi(s)z(s)\,ds\right) \le \alpha\psi(t)e^{-\Psi(t)}.\end{aligned}$$

Comme $v(0) = 0$, $\Psi' = \psi$ et $\Psi(0) = 0$, intégrer de 0 à t donne

$$e^{-\Psi(t)} \int_0^t \psi(s)z(s)\,ds = v(t) \le \alpha \int_0^t \psi(s)e^{-\Psi(s)}\,ds = \alpha(1-e^{-\Psi(t)}).$$

En multipliant par $e^{\Psi(t)}$, on obtient

$$z(t) \le \alpha + \int_0^t \psi(s)z(s)\,ds \le \alpha e^{\Psi(t)}.$$

Retour à la preuve. Comme

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, ds,$$

on applique le lemme de Gronwall avec $z(t) = |x(t)|$ et $\psi(t) \equiv C_b$ où C_b est la constante de l'hypothèse (b), i.e.

$$|f(t, x, u)| \leq C_b(1 + |x| + |u|),$$

on a

$$\int_0^t |f(s, x(s), u(s))|\, ds \leq C_b(t + \|u\|_{L^1([0,t];\mathbb{R}^k)}) + \int_0^t C_b|x(s)|\, ds$$

et l'hypothèse du lemme de Gronwall est vérifiée avec

$$\alpha = |x_0| + C_b(T + \|u\|_{L^1([0,T];\mathbb{R}^k)}).$$

Donc la trajectoire reste bornée sur $[0, T]$ car Gronwall donne

$$|x(t)| \leq \alpha e^{C_b t}.$$

Hypothèses sur la fonction objectif

On suppose que $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vérifient:

(d) $g(t, y, v)$ est C^0, $y \to g(t, y, v)$ est C^1 et $h(y)$ est C^1.

(e) $\forall R > 0$, $\exists C_R$ tel que $\forall t \in [0, T]$, $\forall y \in \overline{B}(0, R)$, $\forall v \in U$

$$|g(t, y, v)| \leq C_R(1 + |v|),$$

(f) $\forall R > 0$, $\exists C_R$ tel que $\forall t \in [0, T]$, $\forall y \in \overline{B}(0, R)$, $\forall v \in U$

$$|\frac{\partial g}{\partial x}(t, y, v)| \leq C_R(1 + |v|),$$

(g) Les fonctions g et h sont minorées.

Lemme. Pour tout $u \in \mathcal{U}$, comme $x_u \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$, le critère

$$J(u) = \int_0^T g(t, x_u(t), u(t))\, dt + h(x_u(T))$$

est bien défini, fini et minoré.

Preuve. Grâce à l'hypothèse (e), la fonction $t \mapsto g(t, x(t), u(t))$ est bien intégrable.

Existence d'un contrôle optimal

Le but du cours n'est pas de démontrer (en toute généralité) l'existence d'un contrôle optimal. C'est parfois délicat...

Néanmoins, comme on l'a déjà fait pour le système LQ, donnons une généralisation de ce résultat.

On suppose que la dynamique est linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t) \quad \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $f(t) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$ et des matrices A, $d \times d$, et B, $d \times k$.

Existence d'un contrôle optimal (2)

Théorème. On suppose que les fonctions $(x, u) \mapsto g(t, x, u)$ et $x \mapsto h(x)$ sont convexes de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^d$, respectivement, et que $u \mapsto J(u)$ est infinie à l'infini sur $\mathcal{U} = L^2([0, T]; U)$. Sous les hypothèses précédentes, il existe au moins un contrôle optimal $\overline{u} \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(\overline{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ J(u) = \int_0^T g(t, x_u(t), u(t))\, dt + h(x_u(T)) \right\}.$$

Remarque. L'hypothèse "infinie à l'infini" est vérifiée si U est borné dans $\mathbb{R}^k$ ou bien s'il existe $C > 0$ et $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que $C|u|^2 + C_0 \leq g(t, x, u)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$.

Existence d'un contrôle optimal (3)

Preuve. L'application $u(t) \mapsto x_u(t)$ est affine de $L^2([0,T];U)$ dans $AC([0,T];\mathbb{R}^d)$, donc

$$x_{\theta u+(1-\theta)v} = \theta x_u + (1-\theta)x_v$$

et $J(u)$ est une fonction convexe puisque $(x,u) \mapsto g(t,x,u)$ et $x \mapsto h(x)$ sont convexes. Donc $u \mapsto g(t,x_u,u)$ et $u \mapsto h(x_u)$ sont aussi convexes.

Comme en plus $J(u)$ est infinie à l'infini dans l'espace de Hilbert $\mathcal{U} = L^2([0,T];U)$, on peut appliquer le Théorème 2.3.9 du cours qui donne l'existence d'un point de minimum.

II - Principe du minimum de Pontryaguine (PMP)

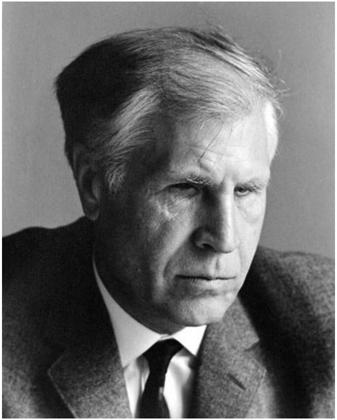
Pour énoncer le principe du minimum de Pontryaguine (PMP) nous allons avoir besoin de deux notions importantes:

1. l'Hamiltonien,
2. l'état adjoint.

On a déjà vu ces notions dans le cas du système linéaire-quadratique. On les généralise au cas d'un système non-linéaire.

Après l'énoncé du PMP on l'appliquera à plusieurs exemples.
On verra sa démonstration au cours suivant.

Attention ! Certain auteurs parlent du principe du **maximum** de Pontryaguine (changement de signe...).



Lev Pontryaguine (1908-1988)

Un des pères fondateurs de la théorie du contrôle avec Richard Bellman (1920-1984) aux USA.

Définition. Le Hamiltonien associé au système de contrôle non-linéaire est l'application $H : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(t,x,p,u) = p^* f(t,x,u) + g(t,x,u).$$

Attention ! Ici, (x,p,u) est un vecteur de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$, indépendant du temps t, et pas les solutions d'EDO.

Remarque. On retrouve l'Hamiltonien du système LQ si $f(t,x,u) = Ax + Bu$ et si $g(t,x,u) = \frac{1}{2}(u^* R u + (x-\xi)^* Q(x-\xi))$.

Définition de l'état adjoint

L'état adjoint $\overline{p} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ est la solution de l'EDO linéaire

$$\begin{cases} \frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\overline{A}(t)^*\overline{p}(t) - \overline{b}(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ \overline{p}(T) = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T)) \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où pour tout $t \in [0,T]$,

$$\overline{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad \overline{b}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^d.$$

Remarques.
Les hypothèses (c) et (f) assurent que $\overline{A}(t)$ et $\overline{b}(t)$ sont dans $L^1([0,T])$ et donc qu'il existe une solution unique de l'équation adjointe.
Si $f(t,x,u) = Ax + Bu$, $g(t,x,u) = \frac{1}{2}(u^*Ru + (x-\xi)^*Q(x-\xi))$ et $h(x) = \frac{1}{2}(x-\xi)^*D(x-\xi)$, on retrouve l'état adjoint du système LQ.

Définition de matrice Jacobienne

Rappel sur la notation:

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^d$$

La matrice Jacobienne dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1\leq i,j\leq d}.$$

Les gradients des composantes de f sont rangés en ligne.

Si $f(x) = Ax$, on retrouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = A$.

Principe du minimum de Pontryaguine (PMP)

Théorème. Sous les hypothèses (a)-(g), si $\overline{u} \in \mathcal{U}$ est un contrôle optimal, alors en notant $\overline{x} = x_{\overline{u}} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ la trajectoire associée et $\overline{p} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ l'état adjoint, on a, p.p. $t \in [0,T]$,

$$\overline{u}(t) \in \underset{v\in U}{arg\ min}\, H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),v),$$

où H est le Hamiltonien.

Remarques.

1. Le principe du minimum ne dit rien sur l'existence d'un contrôle optimal.
2. Il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante en général.
3. Dans l'Hamiltonien on ne voit pas la fonction h du critère au temps final T mais elle est cachée dans l'adjoint $\overline{p}$ en T.
4. Une fois trouvé $\overline{u}$, il faut résoudre les deux EDO pour $\overline{x}$ et $\overline{p}$.

Principe du minimum de Pontryaguine, PMP (2)

On verra la démonstration du PMP lors du prochain cours.

On a déjà démontré le PMP dans le cas (très particulier) du système linéaire quadratique (LQ). D'ailleurs, pour le système LQ, on avait démontré que cette condition était nécessaire et suffisante.

Le reste de ce cours est consacré à des exemples d'application du PMP et... des contre-exemples !

Exemple du système linéaire quadratique (LQ)

Pour $f(t) \in L^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ et des matrices A $d \times d$ et B $d \times k$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

on minimise pour $u \in L^2([0,T];U)$, avec $U \subset \mathbb{R}^k$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^* R u(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^* Q e_{x_u}(t)\,dt + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^* D e_{x_u}(T)$$

où $e_{x_u} = x_u - \xi$ est l'écart avec une trajectoire cible $\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$.

Lemme. Si $U = \mathbb{R}^k$ et si la matrice R est symétrique définie positive, alors l'Hamiltonien admet un unique point de minimum qui est précisément le contrôle optimal

$$\overline{u} = -R^{-1}B^*\overline{p}.$$

Exemple du système linéaire quadratique (fin)

Preuve. Comme R est définie positive, l'Hamiltonien est fortement convexe en u

$$H(t,x,p,u) = p^*(Ax+Bu+f(t))+\frac{1}{2}u^*Ru+\frac{1}{2}(x-\xi(t))^*Q(x-\xi(t)).$$

Pour calculer le minimum de H quand $U=\mathbb{R}^k$, on calcule $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ et on trouve une unique solution

$$\overline{u} = -R^{-1}B^*\overline{p}.$$

Remarque. Si $U \subset \mathbb{R}^k$ est convexe, la conclusion reste vraie mais $\overline{u}$ est donné par l'inéquation d'Euler

$$(B^*\overline{p}+R\overline{u})^*(v-\overline{u}) \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Remarque. Une fois trouvé $\overline{u}(t)$ pour $t \in [0,T]$, il faut résoudre les deux EDO pour $\overline{x}$ et $\overline{p}$ (qui dépendent de $\overline{u}$).

Contre-exemple de non-existence de contrôle optimal

On contrôle un point matériel par sa vitesse $u(t) \in U = [-1, 1]$

$$\dot{x}(t) = u(t), \ \forall t \in [0, T], \quad x(0) = 0.$$

Pour $T = 1$, le critère à minimiser sur $\mathcal{U} = L^2([0, T]; U)$ est

$$J(u) = \int_0^1 x_u(t)^2 \, dt + \int_0^1 \left(u(t)^2 - 1\right)^2 \, dt \, .$$

Lemme. On a $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) = 0$ et il n'existe pas de contrôle optimal.

Remarques.
La raison de la non-existence est le caractère non convexe de $J(u)$ (même phénomène qu'en optimisation).
Le deuxième terme de $J(u)$ peut s'interpréter comme une pénalisation pour obtenir des contrôles "bang-bang".

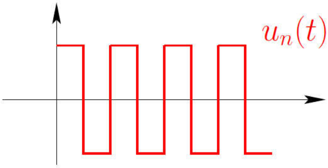
Contre-exemple de non-existence de contrôle optimal (2)

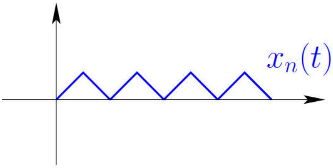
Preuve. On a toujours $J(u) > 0$. On construit une suite minimisante de contrôles (de type bang-bang), pour $n \in \mathbb{N}_*$,

$$u_n(t) = (-1)^k, \quad t \in [\tfrac{k}{2n}, \tfrac{k+1}{2n}[, \quad k \in \{0, \ldots, 2n-1\}.$$

On a $\|x_{u_n}\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{2n}$ et $J(u_n) \leq \frac{1}{4n^2}$, donc $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) = 0$.

Si $\exists \overline{u} \in \mathcal{U}$ tel que $J(\overline{u}) = 0$, alors $x_{\overline{u}}(t) = 0$ et $\overline{u}(t) = \pm 1$, mais $\overline{u}(t) = \dot{x_{\overline{u}}}(t) = 0 \Rightarrow$ contradiction !

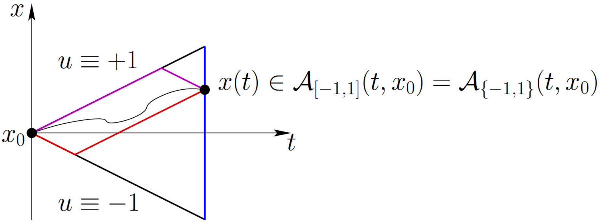




Le contre-exemple “tombe” si on change la fonction objectif en

$$J(u) = |x_u(1) - \xi|^2 \, dt + \int_0^1 \left(u(t)^2 - 1 \right)^2 \, dt \, ,$$

pour n’importe quel point cible $\xi \in \mathbb{R}$. Il existe même une infinité de contrôle optimaux si $-1 < \xi < 1$.



L’existence ou non d’un contrôle optimal est donc très délicate.

Contre-exemple du caractère non suffisant du PMP

On considère encore le contrôle d'un point matériel par sa vitesse $u(t) \in U = [-1, 1]$ avec $x_0 = 0$ et $T = 1$

$$\dot{x}(t) = u(t), \ \forall t \in [0, 1], \quad x(0) = 0.$$

On minimise sur $\mathcal{U} = L^2([0, 1]; U)$

$$J(u) = \int_0^1 (x_u(t)^2 - 1)^2 \, dt \, .$$

Lemme. Il existe un contrôle qui vérifie le PMP mais qui n'est pas optimal.

Preuve. Minimiser $J(u)$ revient à minimiser la distance de $x(t)$ à l'ensemble $\{-1, 1\}$. Comme $\dot{x}(t) = u(t) \in U$, on a $x(t) \in [-t, t]$, $\forall t \in [0, 1]$. Il y a donc deux contrôles optimaux, qui sont :

- $\overline{u}_+(t) \equiv +1$ avec $\overline{x}_+(t) = t$,
- $\overline{u}_-(t) \equiv -1$ avec $\overline{x}_-(t) = -t$.

Contre-exemple du caractère non suffisant du PMP (2)

On calcule la valeur du minimum

$$\min_{u\in\mathcal{U}} J(u) = J(u_+) = J(u_-) = \int_0^1 (t^2-1)^2\,dt = \frac{8}{15}.$$

Soit $\overline{u}$ un contrôle qui vérifie le PMP. Le Hamiltonien à minimiser est convexe en v (affine !)

$$H(t,x,p,v) = pv + (x^2-1)^2$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial v}(t,x,p,v) = p.$$

Donc $\overline{u}$ est un minimiseur de H sur U, si et seulement il vérifie l'inéquation d'Euler

$$\overline{p}(v-\overline{u}) \geq 0 \quad \forall v \in U = [-1,1]$$

où $\overline{p}$ est l'adjoint associé à $\overline{u}$.

Contre-exemple du caractère non suffisant du PMP (3)

Montrons que $\overline{u}_+$ et $\overline{u}_-$ vérifient le PMP qui est équivalent à

$$\overline{p}(v - \overline{u}) \geq 0 \quad \forall v \in U = [-1, 1]$$

L'état adjoint est solution de

$$\dot{p}(t) = -4x(x^2 - 1) \ \ \forall t \in [0, 1], \quad p(1) = 0.$$

On vérifie que pour $\overline{u}_+$ on a $\overline{p}_+ \leq 0$ car $\overline{x}_+(t) = t$ et $\dot{p}_+(t) \geq 0$, tandis que pour $\overline{u}_-$ on a $\overline{p}_- \geq 0$ car $\overline{x}_-(t) = -t$ et $\dot{p}_-(t) \leq 0$.

On a donc $\overline{p}_+(v - \overline{u}_+) \geq 0$ et $\overline{p}_-(v - \overline{u}_-) \geq 0$, $\forall v \in U = [-1, 1]$.

Donc $\overline{u}_+$ et $\overline{u}_-$ vérifient bien le PMP !

Mais $\overline{u}_0(t) \equiv 0$ vérifie aussi le PMP !

En effet, $\overline{x}_0(t) \equiv 0$, donc $\overline{p}_0(t) \equiv 0$ et l'Hamiltonien devient

$$H(t, \overline{x}_0, \overline{p}_0, v) = \overline{p}_0 v + (\overline{x}_0^2 - 1)^2 = 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

qui admet bien $v = 0$ comme minimiseur (entre autres).

Or $\overline{u}_0(t) \equiv 0$ n'est pas un contrôle optimal car $J(0) = 1 > \frac{8}{15}$.

Le PMP n'est donc pas une condition suffisante.

On modélise une épidémie avec le modèle SIR, complété par un contrôle ("vaccination") $0 \leq u(t) \leq m$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{S}(t) & = & -\alpha S(t)I(t) + u(t) \\ \dot{I}(t) & = & \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) - u(t) \\ \dot{R}(t) & = & \beta I(t) \end{array} \right.$$

avec $\alpha > 0$ le taux d'infection, $\beta > 0$ le taux de guérison.

- $S =$ individus susceptibles d'être infectés.
- $I =$ individus infectés.
- $R =$ individus retirés par guérison définitive ou... disparition.

On vérifie que la population totale est constante

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Pour $u \in L^2([0,T];[0,m])$, avec $\gamma > 0$, on minimise

$$J(u) = \gamma I(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2 dt.$$

Modèle SIR (sans contrôle)

Données initiales: $S_0 \geq 0, I_0 \geq 0, R_0 \geq 0$ avec $S_0 + I_0 + R_0 = N$.

Lemme. Si $u(t) = 0$, alors $S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0$ et la solution (unique) existe pour tout temps.

Remarque. Si $I_0 = 0$, alors $S(t) = S_0, I(t) = I_0, R(t) = R_0$.
Si $S_0 = 0$, alors $S(t) = 0$.

Preuve. Si $I_0 > 0$ et $S_0 > 0$, alors, au moins pour un petit intervalle de temps, la solution est strictement positive. Soit $\tau > 0$ le premier temps où soit $I(\tau)$, soit $S(\tau)$ s'annule ($R(t)$ est croissante). Alors soit $I(t)$, soit $S(t)$ vérifie une ODE du premier ordre avec donnée nulle en τ. Donc soit $I(t)$, soit $S(t)$ est nulle sur $[0, \tau]$, ce qui n'est pas possible.
L'existence est globale pour tout temps car $N = S(t) + I(t) + R(t)$.

Détermination de l'adjoint

On note $x = (S, I, R)^*$ et on a

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} -\alpha SI + u \\ \alpha SI - \beta I - u \\ \beta I \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S & 0 \\ \alpha I & \alpha S - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

L'adjoint est $p = (p_S, p_I, p_R)^*$, solution de

$$\dot{p}(t) = -\begin{pmatrix} -\alpha I & \alpha I & 0 \\ -\alpha S & \alpha S - \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

avec $p(T) = (0, \gamma, 0)^*$. Donc $p_R(t) = 0$ et

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_S(t) \\ \dot{p}_I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha I(p_S(t) - p_I(t)) \\ \alpha S(p_S(t) - p_I(t)) + \beta p_I(t) \end{pmatrix}.$$

Exemple d'une épidémie

L'Hamiltonien est strictement convexe en u et vaut

$$H(x, p, u) = p_S(-\alpha SI + u) + p_I(\alpha SI - \beta I - u) + p_R \beta I + \frac{1}{2}u^2.$$

Le point de minimum sur $\mathbb{R}$ est atteint en $u_{\min} = p_I - p_S$.
On en déduit la valeur du contrôle optimal

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_I(t) - p_S(t) \leq 0, \\ p_I(t) - p_S(t) & \text{si } 0 < p_I(t) - p_S(t) < m, \\ m & \text{si } p_I(t) - p_S(t) \geq m. \end{cases}$$

En particulier, au temps final $p_I(T) - p_S(T) = \gamma$. Donc, si $\gamma > m$, on vaccine au maximum au temps final.

Modèle simple de dynamique de populations: population d'abeilles $a(t)$ et de reines $r(t)$ qui évolue selon l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u(t))a(t) \\ \gamma u(t)a(t) \end{pmatrix} & \forall t \in [0,T], \\ x(0) = \begin{pmatrix} a(0) > 0 \\ r(0) \geq 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $\varphi(u) = \alpha(1-u) - \beta$ et des paramètres $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $\alpha > \beta$.

Modélisation. Le contrôle $u(t) \in U = [0,1]$ représente l'effort des abeilles pour fournir des reines, tandis que $\varphi(u)$ est le taux de reproduction des abeilles.

Comme $\varphi(u) = \alpha(1-u) - \beta$ est décroissante, produire des reines coûte aux abeilles !

- Si $u(t) \equiv 1$, on a $\dot{a}(t) = -\beta a(t) < 0$: la population d'abeilles décroît (exponentiellement).
- Si $u(t) \equiv 0$, on a $\dot{a}(t) = (\alpha - \beta)a(t) > 0$: la population d'abeilles croît (exponentiellement).

Ruche d'abeilles (2)

On veut maximiser la population de reines au temps T.

Le problème de contrôle optimal est donc de trouver $\overline{u} \in \mathcal{U} = L^\infty([0,T];U)$, avec $U = [0,1]$, tel que

$$J(\overline{u}) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ J(u) = -r(T) \right\}.$$

On va appliquer le PMP pour résoudre ce problème.

Tout d'abord, on vérifie que a et r, représentant des populations, restent positifs.

Lemme. Pour tout $t \in [0,T]$, on a $a(t) > 0$ et $r(t) \geq 0$.
Preuve. On intègre

$$a(t) = a(0) e^{\int_0^t \varphi(u(s))ds} > 0,$$

donc $\dot{r}(t) = \gamma u(t) a(t) \geq 0$ et $r(t) \geq r(0) \geq 0$.

Ruche d'abeilles (3)

Définissons l'état adjoint. On note $x = (a, r)^*$ et

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} \varphi(u)a \\ \gamma ua \end{pmatrix}, \quad g(x,u) = 0, \quad h(x) = -r.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{pmatrix} \varphi(u) & 0 \\ \gamma u & 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,u) = 0$, l'état adjoint $p = (p_a, p_r)^*$ est solution de

$$\begin{cases} \dot{p}_a(t) = -\varphi(u(t))p_a(t) - \gamma u(t)p_r(t), \\ \dot{p}_r(t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T],$$

avec la condition finale $(p_a(T), p_r(T))^* = \frac{\partial h}{\partial x}(x(T)) = (0, -1)^*$. Donc

$$\dot{p}_a(t) = -\varphi(u(t))p_a(t) + \gamma u(t), \quad p_r(t) \equiv -1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ruche d'abeilles (4)

Définissons le Hamiltonien:

$$H(x, p, u) = p^* f(x, u) + g(x, u) = p_a \varphi(u) a + \gamma p_r u a.$$

Comme $a(t) > 0$, $p_r(t) = -1$ et $\varphi(u) = \alpha(1-u) - \beta$, le PMP s'écrit

$$\overline{u}(t) \in \underset{u \in [0,1]}{arg\ min}\, \psi(t) u \quad \forall t \in [0, T],$$

avec ψ, appelée fonction de commutation, définie par

$$\psi(t) = -\overline{p}_a(t)\alpha - \gamma.$$

La minimisation est simple: pour tout $t \in [0, T]$, on a

- si $\psi(t) > 0$, $\overline{u}(t) = 0$;
- si $\psi(t) = 0$, $\overline{u}(t) \in [0, 1]$ quelconque;
- si $\psi(t) < 0$, $\overline{u}(t) = 1$.

Le contrôle optimal est donc bang-bang, sauf si $\overline{p}_a(t) = -\gamma/\alpha$ sur un intervalle de temps de mesure non nulle.

Ruche d'abeilles (5)

Reprenons alors l'équation de l'état adjoint :

$$\dot{\overline{p}}_a(t) = -(\alpha(1-\overline{u}(t)) - \beta)\overline{p}_a(t) + \gamma\overline{u}(t) \quad \forall t \in [0,T].$$

- si $\overline{p}_a(t) > -\frac{\gamma}{\alpha}$ ($\Leftrightarrow \psi(t) < 0$), alors $\overline{u}(t) = 1$ et on a

$$\dot{\overline{p}}_a(t) = \beta\overline{p}_a(t) + \gamma > \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha} > 0;$$

- si $\overline{p}_a(t) < -\frac{\gamma}{\alpha}$ ($\Leftrightarrow \psi(t) > 0$), alors $\overline{u} = 0$ et on a

$$\dot{\overline{p}}_a(t) = (\beta-\alpha)\overline{p}_a(t) > 0;$$

- si $\overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}$ ($\Leftrightarrow \psi(t) = 0$), alors

$$\dot{\overline{p}}_a(t) = \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha} > 0.$$

Donc $t \mapsto \overline{p}_a(t)$ est toujours strictement croissante, et $\overline{p}_a$ ne peut pas être égal à $-\gamma/\alpha$ sur un intervalle de mesure non nulle.

Ruche d'abeilles (6)

Comme $\overline{p}_a(t)$ est strictement croissante, la fonction de commutation $\psi(t) = -\overline{p}_a(t)\alpha - \gamma$ est strictement décroissante. Au temps final, $\overline{p}_a(T) = 0$ donc $\psi(T) = -\gamma < 0$ et $\overline{u}(T) = 1$. L'adjoint $\overline{p}_a$ est continu, donc il existe au plus un temps $t_* < T$ (de commutation) tel que $\psi(t_*) = 0$:

$$\psi(t) > 0 \text{ et } \overline{u}(t) = 0 \text{ si } t < t_*, \quad \psi(t) < 0 \text{ et } \overline{u}(t) = 1 \text{ si } t > t_*.$$

Ainsi, sur $[t_*, T]$, le contrôle optimal fournit des reines.

Sur $[t_*, T]$ on peut résoudre l'équation adjointe

$$\dot{\overline{p}}_a(t) = \beta\overline{p}_a(t) + \gamma, \qquad \overline{p}_a(T) = 0,$$

ce qui donne

$$\overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\beta}\left(1 - e^{\beta(t-T)}\right), \quad \forall t \in [t_*, T].$$

Ruche d'abeilles (7)

De la formule

$$\overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\beta}\left(1 - e^{\beta(t-T)}\right), \quad \forall t \in [t_*, T],$$

comme $\overline{p}_a(t_*) = -\gamma/\alpha$, on déduit

$$t_* = \frac{1}{\beta}\ln(1 - \frac{\beta}{\alpha}) + T > -\infty.$$

Conclusion. Deux cas peuvent se produire.

- **Cas 1:** $t_* < 0$ (cas d'un horizon temporel T petit). Le contrôle optimal est alors $\overline{u} \equiv 1$ sur $[0, T]$, ce qui signifie que l'on fournit des reines en continu de $t = 0$ jusqu'à $t = T$.
- **Cas 2:** $t_* > 0$ (cas d'un horizon temporel T grand). Le contrôle optimal est $\overline{u} \equiv 0$ sur $[0, t_*[$ et $\overline{u} \equiv 1$ sur $]t_*, T]$, ce qui signifie que la population d'abeille grandit jusqu'à t_* puis ensuite elle produit des reines.

Ruche d'abeilles (8)

Si $t_* > 0$ on peut calculer l'adjoint sur l'intervalle de temps $[0, t_*]$

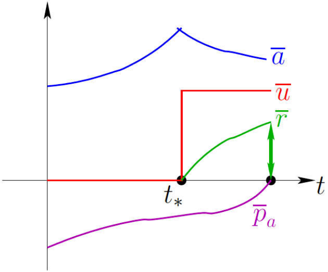
$$\dot{\overline{p}}_a(t) = (\beta - \alpha)\overline{p}_a(t) \;\Rightarrow\; \overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha} e^{(\beta-\alpha)(t-t_*)}$$

Sur $[0, t_*[$ on a $\dot{\overline{a}}(t) = (\alpha - \beta)\overline{a}(t)$ et $\dot{\overline{r}}(t) = 0$, donc

$$\overline{a}(t) = a(0)e^{(\alpha-\beta)t} \quad \text{et} \quad \overline{r}(t) = 0.$$

Sur $[t_*, T]$ on a $\dot{\overline{a}}(t) = -\beta\overline{a}(t)$ et $\dot{\overline{r}}(t) = \gamma\overline{a}(t)$, donc

$$\overline{a}(t) = a(0)e^{\alpha t_*} e^{-\beta t} \quad \text{et} \quad \overline{r}(t) = \frac{\gamma a(0) e^{\alpha t_*}}{\beta}\left(e^{-\beta t_*} - e^{-\beta t}\right).$$



Ruche d'abeilles (9)

Le principe du minimum de Pontryaguine (PMP) a permis de calculer explicitement le contrôle optimal (s'il existe !) qui est unique et de type bang-bang.

Il faut un autre argument pour démontrer qu'effectivement il existe un contrôle optimal et donc que le contrôle donné par le PMP est bien optimal.

Ruche d'abeilles (10)

Lemme. Il existe au moins un contrôle optimal pour le problème de la ruche d'abeilles.

Preuve. Le Lemme 5.2.4 du polycopié assure que l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, x_0)$ est compact. On minimise une fonction continue, $-r(T)$, sur un ensemble compact, donc le minimum est atteint en un point de $\mathcal{A}(T, x_0)$. Le contrôle correspondant est un contrôle optimal.

Les hypothèses du Lemme 5.2.4 sont bien vérifiées:
(i) $f(x, u)$ est de classe C^1;
(ii) $U = [0, 1]$ est compact dans $\mathbb{R}$;
(iii) les trajectoires sont uniformément bornées;
(iv) l'ensemble des vecteurs vitesse $\{f(x, u) \mid u \in U\}$ est convexe car $f(x, u)$ est affine en u et U est convexe.