

STAGE DE RECHERCHE DE PREMIÈRE ANNÉE

29 MAI - 28 JUILLET

CALCUL DE FORMES OPTIMALES



CHLOÉ DOUSSET

Maître de stage : GRÉGOIRE ALLAIRE
Professeur de Mathématiques Appliquées à l'École Polytechnique
Président du Département de Mathématiques Appliquées



Je tiens à remercier sincèrement GRÉGOIRE ALLAIRE pour sa patience, sa bonne humeur et surtout pour le temps qu'il m'a consacré. Il m'a fait découvrir un domaine de la recherche auquel je ne pensais pas me destiner. Ce stage aura sans aucun doute une influence importante sur mon orientation.

Résumé

De nombreuses formes dans la nature ont été optimisées par une longue évolution (structure en nid d'abeille, toile d'araignée...). De même, dans l'industrie mécanique, les ingénieurs cherchent à optimiser la formes des systèmes qu'ils conçoivent ; ils ne se contentent pas d'améliorer les performances mécaniques mais ils veulent également diminuer le poids, l'encombrement, le coût de réalisation. Traditionnellement, on procède par essais successifs en testant des prototypes dont le design relève de savoir-faire et de l'intuition du concepteur. Cette façon de faire est très coûteuse et imprécise.

Nous allons présenter des méthodes mathématiques ainsi que des programmes qui permettent de rendre cette recherche de formes optimales automatique. Le principe est le suivant : à une forme initiale Ω , on associe une valeur $J(\Omega)$ qui rend compte de sa performance, puis une dérivée de forme $J'(\Omega)$ qui permet d'obtenir un champ de vitesse selon lequel on aimerait faire évoluer Ω . Pour cela on utilise la méthode des lignes de niveau puis on résoud une équation de transport qui nous permet d'obtenir une nouvelle forme qui se rapproche de la forme optimale recherchée. On réitère le procédé jusqu'à obtention d'un optimum.

Table des matières

1	Déformation du plan	5
1.1	Notion de déformation	5
1.2	Le tenseur de déformation	5
1.3	Signification physique des coefficients de e	7
2	Fonction objectif et dérivée de forme	9
2.1	Fonction objectif	9
2.2	Justification mathématique	10
2.3	Dérivée de forme	12
3	Méthode des lignes de niveaux	14
3.1	Principe	14
3.2	Etude de l'équation de transport	14
3.3	Convect	15
3.4	Réinitialisation	15
4	Algorithme utilisé	17
5	Résultats, améliorations et comparaisons	22
5.1	Amélioration	22
5.2	Résultats	22
5.3	Utilisation de l'opérateur convect	27
5.4	Lissage	28
6	Conclusion	30
7	Annexe : Justification physique du modèle d'élasticité linéaire	31
7.1	Equations d'équilibre	31
7.2	Lois de comportement	32
7.3	Notion d'isotropie et d'élasticité	33
7.4	Justification de la loi de comportement utilisée	34
7.5	Signification physique des coefficients de Lamé	36
7.6	Conclusion	37

1 Déformation du plan

1.1 Notion de déformation

On considère un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 , Ω , dont la frontière délimite les bords d'un corps que l'on souhaite déformer afin de déterminer la configuration optimale, c'est-à-dire celle qui, sous les contraintes imposées, minimise une fonction objectif.

Un point de Ω initialement situé en x se retrouvera après transformation en $y = \psi(x)$ où l'application $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ représente la déformation du corps. On utilisera aussi l'application déplacement $U = (u, v) = \psi - Id$.

On se limitera aux transformations C^1 conservant l'orientation, c'est-à-dire aux déformations ψ vérifiant $\det(\nabla\psi) > 0$.

On va introduire le tenseur de Cauchy-Green qui mènera au tenseur de déformation linéarisé qui sera fréquemment utilisé par la suite.

1.2 Le tenseur de déformation

On s'intéresse à l'évolution de la longueur d'une courbe C^1 notée γ_1 à support dans Ω lors de la déformation. La courbe déformée est $\gamma_2 = \psi \circ \gamma_1$. Comme sa dérivée est $\gamma_2' = \nabla\psi(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)$, sa longueur est $l_2 = \int \sqrt{{}^t\gamma_1'(t)C(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)}$, où $C = {}^t\nabla\psi \nabla\psi$ est le tenseur de Cauchy-Green. Ainsi C gouverne les variations de longueurs dues à la transformation.

Parmi les transformations, certaines conservent la forme du corps, il s'agit des rotations et des translations.

Définition 1.1 : On appelle déformation rigide, une déformation de la forme $\psi : x \mapsto a + Qx$, avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $Q \in SO_2$.

La propriété suivante permet de les caractériser.

Propriété 1.1 : Une déformation de classe C^1 est rigide si et seulement si $C = I$.

Démonstration : Si ψ est rigide alors $\nabla\psi = Q$ donc $C = {}^tQQ = I$ car $Q \in SO_2$.

Réciproquement, considérons une déformation de classe C^1 telle que $C = I$, alors en tout point $\nabla\psi$ est une matrice orthogonale. Comme $\det(\nabla\psi) > 0$, $\nabla\psi$ est à valeurs dans SO_2 . D'autre part, $\nabla\psi$ est inversible en tout point. Soit $x_0 \in \Omega$, d'après le théorème d'inversion locale, il existe une boule ouverte B de centre x_0 incluse dans Ω telle que la restriction de ψ à cet ouvert soit un C^1 -difféomorphisme et telle que son image soit un ouvert. Soit x et x' deux

points de B . Comme B est convexe, il contient le segment qui les relie. Soit $\gamma(t) = (1-t)x + tx'$, comme ψ est C^1 on a $\psi(x') - \psi(x) = \int_0^1 \nabla \psi(\gamma(t))(x' - x) dt$. D'où, $\|\psi(x') - \psi(x)\| \leq \int_0^1 \|\nabla \psi(\gamma(t))(x' - x)\| dt \leq \|x' - x\|$.

En appliquant le même raisonnement à ψ^{-1} et à une boule B' centrée en $\psi(x_0)$ incluse dans $\psi(B)$, on obtient l'inégalité inverse. Donc, $\|\psi(x') - \psi(x)\| = \|x' - x\|$ pour tout couple de points x, x' appartenant à $U = \psi^{-1}(B')$ i.e. ψ conserve les distances au voisinage de x_0 .

Quitte à changer l'origine du repère, on peut supposer que 0 appartient à U et on considère la base (f_i) telle que les (f_i) soient dans U .

On pose $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \psi(0)$, $\tilde{\psi}$ conserve les distances donc conserve le produit scalaire grâce à l'identité de polarisation. $(\tilde{\psi}(f_i))$ est donc une base orthogonale et on a :

$$(\tilde{\psi}(\lambda x + \mu y) - \lambda \tilde{\psi}(x) - \mu \tilde{\psi}(y)) \cdot \tilde{\psi}(f_i) = (\lambda x + \mu y) \cdot f_i - \lambda x \cdot f_i - \mu y \cdot f_i = 0.$$

Ainsi $\tilde{\psi}$ est linéaire, d'où $\psi(x) = a + Qx$ au voisinage de x_0 avec $Q \in SO_2$. Donc ψ est rigide au voisinage de x_0 .

Comme $x \mapsto \nabla \psi(x)$ est continue, l'image réciproque de Q est un fermé mais aussi un ouvert grâce à ce qui précède. Par connexité, l'image réciproque de Q par ψ est donc égale à Ω . De même $x \mapsto \psi(x) - Qx$ est continue est localement constante donc constante sur Ω .

Cette propriété permet de montrer que le tenseur de Cauchy-Green caractérise la forme du corps.

Propriété 1.2 : si ψ et $\tilde{\psi}$ sont deux déformations de Ω , alors elles ont le même tenseur de Cauchy-Green si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ et $Q \in SO_2$ tels que $\tilde{\psi} = Q\psi + a$.

Démonstration : s'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ et $Q \in SO_2$ tels que $\tilde{\psi} = Q\psi + a$ alors $\nabla \psi = Q \nabla \tilde{\psi}$ donc ${}^t \nabla \tilde{\psi} \nabla \tilde{\psi} = {}^t \nabla \psi \nabla \psi$.

Réciproquement, si ψ et $\tilde{\psi}$ ont le même tenseur de Cauchy-Green alors $C = {}^t \nabla \tilde{\psi} \nabla \tilde{\psi} = {}^t \nabla \psi \nabla \psi$. Comme ψ est localement un C^1 -difféomorphisme, au voisinage de tout point de Ω , $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ est définie. Le tenseur de Cauchy-Green associé à cette déformation est :

$$\begin{aligned} {}^t \nabla (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \nabla (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) &= {}^t (\nabla \tilde{\psi} \circ \psi^{-1} \nabla \psi^{-1}) \nabla \tilde{\psi} \circ \psi^{-1} \nabla \psi^{-1} \\ &= {}^t \nabla \psi^{-1} C \circ \psi^{-1} \nabla \psi^{-1} \\ &= {}^t \nabla \psi^{-1} {}^t (\nabla \psi \circ \psi^{-1}) \nabla \psi \circ \psi^{-1} \nabla \psi^{-1} = I \end{aligned}$$

Donc, d'après la propriété 1.1, il existe $Q \in SO_2$ et $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1} = Qx + a$ localement. Comme précédemment, on passe du local au global par connexité.

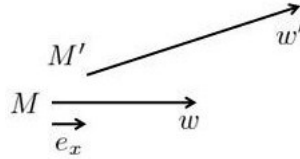
Afin de faire apparaître les variations par rapport aux déformations rigides, on introduit le tenseur de déformation de Green-Saint Venant : $E = \frac{1}{2}(C - I)$. En terme de déplacements, $E = \frac{1}{2}(\nabla U + {}^t \nabla U) + \frac{1}{2} \nabla U {}^t \nabla U$. On s'intéresse

particulièrement à la partie linearisée de E : $e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$,
 appelé tenseur de déformation linearisé. En effet, pour de petits déplacements on peut substituer e à E .

1.3 Signification physique des coefficients de e

Signification des coefficients diagonaux :

On considère un vecteur w parallèle à e_x d'origine M et w' son image après déformation. L'élongation unitaire dans la direction e_x due à la déformation est $\frac{w'.e_x - w.e_x}{w.e_x}$. Comme U est un petit déplacement, $w' \simeq w + \nabla U(M) w$,
 $w'.e_x = w.e_x + \frac{\partial u}{\partial x}(M) w.e_x$.

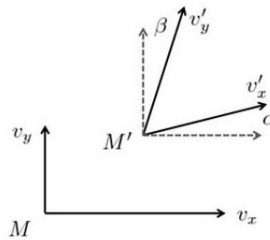


On raisonne de même selon e_y . Ainsi les composantes diagonales de e caractérise l'élongation unitaire d'un vecteur parallèle à e_x ou e_y .

Signification des coefficients extra diagonaux :

On considère deux vecteurs v_x et v_y , respectivement parallèles à e_x et e_y , issus d'un même point M . Après déformation le point M devient le point M' et les vecteurs v_x et v_y deviennent respectivement les vecteurs v'_x et v'_y . On considère le glissement défini la différence entre les angles formés par les vecteurs v_x et v_y d'une part, et les vecteurs v'_x et v'_y d'autre part.

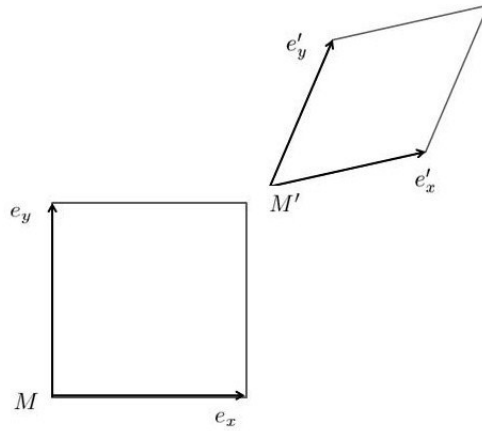
Ce glissement est donc égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, où α est l'angle formé par les vecteurs v_x et v'_x et β l'angle formé par les vecteurs v_y et v'_y . Comme la déformation considérée est petite, $\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{(v'_x - v_x).e_y}{v_x.e_x} \simeq \frac{\partial v}{\partial x}(M)$ et de même $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}(M)$.



Ainsi la composante extra diagonale du tenseur e est égale à la moitié du taux de glissement d'un couple de vecteurs élémentaires respectivement parallèles aux directions e_x et e_y .

Taux de dilatation surfacique :

Si on considère comme domaine élémentaire un parallélogramme formé par les vecteurs e_x et e_y , il subit, du fait de la déformation, une dilatation surfacique égale à $\frac{S'-S}{S} = \frac{\det(e'_x, e'_y) - \det(e_x, e_y)}{\det(e_x, e_y)} = \frac{\partial u}{\partial x}(M) + \frac{\partial v}{\partial y}(M)$.



Ainsi la trace de e caractérise la dilatation surfacique.

Décomposition de la déformation :

Le déplacement U étant petit, un vecteur \vec{w} issu de M est déformé en : $\vec{w}' \simeq \nabla U(M) \vec{w} = e(M) \vec{w} + \frac{1}{2}(\nabla U(M) - {}^t \nabla U(M)) \vec{w}$

La partie antisymétrique du gradient de U représente une rotation car il existe

un vecteur rotation $\vec{r}(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(M) & -\frac{\partial v}{\partial x}(M) \end{pmatrix}$ tel que

$$\frac{1}{2}(\nabla U(M) - {}^t \nabla U(M)) \vec{w} = \vec{r}(M) \wedge \vec{w}.$$

Ainsi, le déplacement dû à la déformation se décompose en une rotation, des élongations dans les directions e_x et e_y d'allongement unitaire respectifs e_{xx} et e_{yy} et des glissements associés aux directions e_x et e_y d'intensité $2e_{xy}$. Comme la partie rotation n'a pas d'influence sur la forme, cela justifie aussi le fait que l'on ne garde que la partie symétrique de ∇U c'est à dire e .

2 Fonction objectif et dérivée de forme

2.1 Fonction objectif

Une des qualités les plus fréquemment recherchées est la rigidité. Pour connaître la rigidité d'une forme Ω , on calcule la forme $(Id + U)\Omega$ qu'elle deviendra sous l'action des contraintes qu'elle va subir.

Si on se limite à des forces surfaciques dont on notera g la densité et Γ_N la partie du bord sur laquelle elles s'appliquent, à des forces volumiques dont on notera f la densité et à des conditions de Dirichlet homogènes (pas de déplacement) sur la partie du bord Γ_D , alors, sous des conditions détaillées en annexe, le déplacement U est solution sur Ω du système suivant, dit d'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} -div \sigma(U) = f & \text{sur } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma(U)n = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad \text{où } \sigma(U) = 2\mu e(U) + \lambda tr(e(U)) I$$

Pour maximiser la rigidité de la forme Ω , on minimisera le travail que les forces extérieures exercent sur cette forme pendant le déplacement U qui l'amène à l'équilibre. Ce travail est appelé compliance. Néanmoins, si l'on ne prend en compte qu'une contrainte de rigidité, la solution est une forme pleine, ce qui ne présente que peu d'intérêt. C'est pourquoi on prendra comme fonction objectif à minimiser une combinaison linéaire de la compliance et du poids.

La fonction objectif associée à la compliance est $J_1(\Omega) = \int_{\Omega} f.U + \int_{\Gamma_N} g.U$.

Propriété : $J_1(\Omega) = \int_{\Omega} \sigma(U).e(U)$ où le produit scalaire entre deux matrices est défini par $A.B = tr({}^tAB)$.

Démonstration : $\int_{\Omega} f.U = - \int_{\Omega} \left(\begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\ 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \end{array} \right) . U$

Donc, $-\int_{\Omega} f.U = (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} u + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u$
 $+ (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} v + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} v + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} v$

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f.U &= (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - (2\mu + \lambda) \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} u n_1 + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} u n_2 \\
&+ \lambda \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} u n_1 + \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \mu \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} u n_2 \\
&+ (2\mu + \lambda) \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - (2\mu + \lambda) \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} v n_2 + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v n_1 \\
&+ \lambda \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v n_2 + \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \mu \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} v n_1
\end{aligned}$$

où n_1 et n_2 sont les composantes du vecteur normal à la surface.

$$\text{D'autre part, } \sigma(U) = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\int_{\Omega} \sigma(U).e(U) = (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] + 2\lambda \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right].$$

$$\text{De plus, } \sigma(U)n = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} n_1 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_1 \\ (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} n_2 + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} n_2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_2 \end{pmatrix}.$$

Donc, $\int_{\Omega} f.U = \int_{\Omega} \sigma(U).e(U) - \oint_{\partial\Omega} (\sigma(U)n).U$. D'où le résultat.

Pour le poids, il suffit de minimiser la fonction objectif $J_2(\Omega) = \int_{\Omega} 1$. Dans le programme, pour intégrer 1 sur Ω qui est un domaine de \mathbb{R}^2 qui varie, on intègre la fonction indicatrice de Ω .

En pratique la fonction objectif est donc égale à $J(\Omega) = \int_{\Omega} f.U + \int_{\Gamma_N} g.U + lag \int_{\Omega} 1 = \int_{\Omega} \sigma(U).e(U) + lag \int_{\Omega} 1$ où lag est un coefficient que l'on adapte suivant la situation.

2.2 Justification mathématique

Pour calculer $J(\Omega)$, il faut connaître le champs de déplacement U et donc résoudre le modèle d'élasticité linéaire. Justifions mathématiquement que dans des conditions raisonnables de régularité, ce modèle admet une solution unique.

Théorème : Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de \mathbb{R}^2 . Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_N)$. On note V l'espace $\{U \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } U = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$. Alors il existe une unique solution $U \in V$ du système d'élasticité linéaire.

Démonstration : Pour trouver la formulation variationnelle de $div \sigma(U) = -f$ i.e. de

$$\begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix} = -f.$$

on fait le produit scalaire des deux membres avec une fonction test $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$. Cette fonction test est prise de sorte qu'elle s'annule sur $\partial\Omega_D$ pour prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet.

On intègre le tout pour obtenir :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} f.t &= (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} t_1 + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} t_1 + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} t_1 \\ &\quad + (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} t_2 + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} t_2 + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} t_2 \end{aligned}$$

Puis une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} f.t &= -(2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} t_1 n_1 \\ &\quad - \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial y} + \mu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} t_1 n_2 - \lambda \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial t_1}{\partial x} - \lambda \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} t_1 n_1 \\ &\quad - \mu \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial t_1}{\partial y} + \mu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} t_1 n_2 \\ &\quad - (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial t_2}{\partial y} + (2\mu + \lambda) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} t_2 n_2 \\ &\quad - \mu \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial t_2}{\partial x} + \mu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} t_2 n_1 - \lambda \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t_2}{\partial y} - \lambda \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} t_2 n_2 \\ &\quad - \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial t_2}{\partial x} + \mu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} t_2 n_1 \end{aligned}$$

D'autre part, $\sigma n = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} n_1 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_1 \\ (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} n_2 + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} n_2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_2 \end{pmatrix}$.

Donc, la partie composée d'intégrale portant sur $\partial\Omega$ correspond à $\int_{\Gamma_N} g.t$.

De plus, $2e(U).e(t) = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial t_2}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial t_2}{\partial x}$.

On cherche donc $U \in V$ tel que pour tout $t \in V$.

$$2\mu \int_{\Omega} e(U).e(t) + \lambda \int_{\Omega} div U div t = \int_{\Omega} f.t + \int_{\Gamma_N} g.t \quad (1)$$

On veut appliquer le théorème de Lax-Milgram dont on rappelle l'énoncé :
Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle $a(U, t) = L(t)$ pour tout $t \in V$ admet une unique solution dans V .

$$\text{Ici } L(t) = \int_{\Omega} f.t + \int_{\Gamma_N} g.t \text{ et } a(U, t) = 2\mu \int_{\Omega} e(U).e(t) + \lambda \int_{\Omega} \text{div } U \text{ div } t$$

L'hypothèse la plus difficile à vérifier est celle qui concerne la coercivité de la forme bilinéaire.

On cherche une constante $C > 0$ telle que $a(t, t) \geq C \|t\|^2$. Montrons d'abord qu'il existe une constante C' telle que : $2\mu \int_{\Omega} \|e(t)\|^2 + \lambda \int_{\Omega} (\text{div } t)^2 \geq C' \int_{\Omega} \|e(t)\|^2$. Pour cela on utilise une décomposition orthogonale de $e(t)$:

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) \text{ avec } e_1(t) = e(t) - \frac{1}{2} \text{tr}(e(t)) I \text{ et } e_2(t) = \frac{1}{2} \text{tr}(e(t)) I.$$

On a $e_1(t).e_2(t) = 0$ donc $\|e(t)\|^2 = \|e_1(t)\|^2 + \|e_2(t)\|^2$. Comme $\text{tr}(e(t)) = \text{div } t$, $2\mu \|e(t)\|^2 + \lambda (\text{div } t)^2 = 2\mu \|e_1(t)\|^2 + (2\mu + 2\lambda) \|e_2(t)\|^2 \geq C' \|e(t)\|^2$ avec $C' = \min(2\mu, 2\mu + 2\lambda)$.

Puis on utilise le lemme de Korn que nous admettons :

Soit Ω un ouvert borné connexe et régulier de \mathbb{R}^2 . On suppose que $\partial\Omega_D$ est de mesure non nulle. Alors, il existe une constante $C'' > 0$ telle que :

$$\forall t \in V = \{U \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } U = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}, \int_{\Omega} \|e(t)\|^2 \geq C'' \|t\|_{H^1(\Omega)^2}^2.$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram, ce qui nous donne l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle.

Il reste à vérifier que l'unique solution de la formulation variationnelle est bien une solution du problème aux limites initial. Cette démonstration se trouve dans [2].

2.3 Dérivée de forme

A chaque domaine Ω , on associe une valeur $J(\Omega)$ que l'on souhaite rendre la plus petite possible, on aimerait donc dériver J afin de déplacer Ω dans la direction opposée au gradient. Pour cela, on se limite à certaines formes dites formes admissibles, on se donne un domaine initial Ω_0 et à un déplacement $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)^2$, on associe le domaine $\Omega = (Id + \theta)(\Omega_0)$. Contrairement à U , ce déplacement n'a pas de sens physique c'est juste un objet mathématique. Grâce à cette paramétrisation des formes Ω , dériver J par rapport à Ω revient à dériver par rapport à θ . Ainsi, on peut définir une notion de différentiabilité en Ω_0 en utilisant la dérivation par rapport à θ .

Lemme : *Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 , $F \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ et J l'application des formes admissibles dans \mathbb{R} définie par $J(\Omega) = \int_{\Omega} F$. alors*

J est différentiable en Ω_0 et $J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \text{div}(\theta F) = \oint_{\partial\Omega_0} F \theta \cdot n$ pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$

Démonstration : $J((Id + \theta)(\Omega_0)) = \int_{\Omega_0} F \circ (Id + \theta) |det(I + \nabla\theta)|$.
 Comme $det(I + \nabla\theta) = 1 + \text{div}\theta + o(\theta)$ et $F \circ (Id + \theta) = F + \nabla F \cdot \theta + o(\theta)$, par composition des deux développements limités, on obtient le résultat.

Pour dériver $\int_{\Omega} \sigma(U) \cdot e(U)$ par rapport à Ω il faut prendre en compte le fait que le champ U dépend de Ω . On peut montrer, voir [3], que la dérivée de $J(\Omega)$ dite dérivée de forme est égale à : $J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega} (-\sigma(U) \cdot e(U) + lag) n \cdot \theta$ où n est la normale extérieure.

Ainsi, pour déformer Ω de manière à diminuer $J(\Omega)$, il faut que le déplacement se fasse selon la normale à la courbe $\partial\Omega$ et avec une intensité $\sigma \cdot e(U) - lag$.

3 Méthode des lignes de niveaux

3.1 Principe

Afin de transformer le corps on va considérer son bord Γ et chercher une fonction ϕ telle que Γ soit égale à $\{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) = 0\}$. Ainsi, au lieu de déformer le corps en étudiant l'évolution de Γ , on va transformer la fonction ϕ en $\tilde{\phi}$ puis prendre comme nouveau contour du corps l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 : \tilde{\phi}(x) = 0\}$. L'avantage étant que de nombreuses propriétés géométriques de Γ s'expriment plus facilement à l'aide de ϕ . Par exemple, le vecteur normal à Γ est égal à $n = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}$.

De nombreuses fonctions ϕ conviennent, on va donc imposer des conditions qui sans conduire à l'unicité de ϕ , nous permettrons de travailler avec des fonctions ϕ plus agréables. Ainsi on demande à ϕ d'être négative à l'intérieur de Γ et positive à l'extérieur. En pratique, on prend une fonction dont le gradient ne s'annule pas sur Γ . En fait, on cherche à travailler avec une fonction proche de la fonction distance signée à Γ .

On veut faire évoluer le corps Ω_0 de frontière $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_0(x) = 0\}$, suivant le champs de vecteurs $\vec{V} = (\sigma(U).e(U) - lag) \frac{\nabla \phi_0}{\|\nabla \phi_0\|}$.

Pour cela on va résoudre le système :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \vec{V} \cdot \nabla \Phi = 0 \\ \Phi(t_0, \cdot) = \phi_0 \end{cases}$$

Comme nouvelle frontière on prendra $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) = 0\}$, où $\phi = \Phi(t_0 + \Delta t, \cdot)$

3.2 Etude de l'équation de transport

On considère l'équation linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \vec{V} \cdot \nabla \Phi = 0 \\ \Phi(t_0, \cdot) = \phi_0 \end{cases} \text{ où } \vec{V} = V \nabla \phi_0$$

Si on note $\phi = \Phi(t_0 + \Delta t, \cdot)$, alors, en approximant $\partial_t \Phi$ par $\frac{\phi - \phi_0}{\Delta t}$ et $\nabla \Phi$ par $\nabla \phi_0$, $\phi = \phi_0 - \Delta t V \|\nabla \phi_0\|$. Donc si V est positif au voisinage d'un point alors $\phi \leq \phi_0$ ce qui fait que localement la forme initiale définie par ϕ_0 s'agrandit pour devenir celle définie par ϕ . Pour que l'amplitude du déplacement soit proportionnelle à V , il est préférable que la norme de $\nabla \phi_0$ soit à peu près constante au moins au voisinage du bord de la forme, ce qui explique que l'on souhaite travailler avec une fonction ϕ_0 proche de la distance signée à Γ_0 .

En cherchant les courbes $(t, s(t))$ sur lesquelles Φ est constante on constate qu'elles sont définies par : $s'(t) = \vec{V}(t, s(t))$. Ainsi, si on connaît ϕ à l'instant t on peut approcher sa transformée en discrétisant l'équation en temps :

$$\Phi(t, x) = \Phi(t + \Delta t, x + \vec{V}(t, x))$$

On peut ainsi connaître l'évolution de ϕ dans le temps. En pratique, le problème réside dans le fait que si x est un noeud du maillage, $x + \vec{V}(t, x)$ n'en est pas forcément un. Or, on préfère travailler avec un maillage fixe. C'est pourquoi on utilisera l'opérateur `Convect`.

3.3 Convect

Avec `FreeFem++`, il est très facile d'effectuer cette opération car un opérateur s'en charge. Considérons une équation de transport du type :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \vec{V} \cdot \nabla \Phi = 0 \\ \Phi(t_0, \cdot) = \phi_0 \end{cases}$$

Si la solution est ϕ_0 à l'instant t_0 , alors on obtient $\phi = \Phi(t_0 + \Delta t, \cdot)$ par :

$$\phi = \text{convect}([-\vec{V}.e_x, -\vec{V}.e_y], \Delta t, \phi_0)$$

Cette technique sera aussi utilisée dans le programme présenté afin de réinitialiser la fonction délimitant le domaine Ω .

3.4 Réinitialisation

Lorsque l'on modifie une fonction ϕ qui ne sert qu'à délimiter la courbe $\{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) = 0\}$, celle-ci peut devenir moins adaptée que d'autres fonctions délimitant elles aussi le même contour. En pratique, on souhaite que le gradient de ϕ soit de norme à peu près constante au voisinage de la courbe Γ . C'est pour cette raison que l'on réinitialise la fonction ϕ , c'est à dire qu'on substitue à ϕ une fonction plus intéressante qui délimite la même courbe Γ mais qui s'approche de la fonction idéale : la distance signée à Γ .

On note ϕ_{old} la fonction que l'on souhaite améliorer et on résoud l'équation dont la solution stationnaire est la distance signée à Γ :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \text{sign}(\phi_{old}) (\|\nabla \Phi\| - 1) = 0 \\ \Phi(t_0, \cdot) = \phi_{old} \end{cases}$$

Puis on remplace ϕ_{old} par $\phi = \Phi(t_0 + \Delta t, \cdot)$. Ainsi sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_{old}(x) = 0\}$ comme $\text{sign}(\phi_{old}) = 0$, l'équation se réduit à $\partial_t \Phi = 0$ et la courbe $\{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) = 0\}$ est donc égale à $\{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_{old}(x) = 0\}$, le bord de la forme reste donc inchangé par cette modification. De plus, au voisinage de cette courbe, $\partial_t \Phi$ est faible donc le gradient de Φ est presque unitaire.

Pour résoudre ce système, on commence par linéariser l'équation en l'approximant par :

$$\partial_t \Phi + \text{sign}(\phi_{old}) \left(\frac{\nabla \phi_{old}}{\|\nabla \phi_{old}\|} \cdot \nabla \Phi - 1 \right) = 0$$

Ensuite on procède en deux étapes, on résoud l'équation sans le terme source puis on rajoute $dt \times \text{sign}(\phi_{old})$ à la solution trouvée.

En réitérant ce procédé, on obtient une fonction ϕ plus proche de la distance signée à Γ .

Du fait des nombreuses approximations qui conduisent de ϕ_0 à ϕ , on effectue un test afin de vérifier si l'objectif a bien diminué. Si ce n'est pas le cas, on diminue le pas de temps Δt .

4 Algorithme utilisé

```
int n=6;           // nombre de noeuds par dixième d'unité d'espace //
real mu=8;        //coefficients de Lamé //
real lambda=1;
real g1=0;       // composantes de la force surfacique appliquée //
real g2=-5;
real lag=0.5;    // coefficient modulant la prise en compte du poids //
real e=.01;      // pas de securité pour ne pas diviser par zéro //
real T=.1;       // pas de temps initial //
real TT=0.01;   // pas de temps pour la réinitialisation//
real D0=0.0001; // coefficient correspondant à l'absence de matière //
real D1=1;      // coefficient correspondant à la présence de matière //
real compliance;
real poids;
real objectif;
real objectifinitial;
real compliancem;
real poids;
real objectifm;
int kx=7;        // nombre de bandes verticales //
int ky=5;        // nombre de bandes horizontales//
real l=1;        // largeur de la plaque //
real L=2;        // longueur de la plaque //
int N=100;       // nombre d'itération effectuées //
int iter;
int iterinit;
real norme;
real p=0.01;     // pas d'espace //
string legende;
string sauve="illustration+7.5";
real epsilon=0.0001;
real tt=0.001;  // tolérance du test //

// définiton des bords et du maillage //

border bd1(t=-0.5,-0.05) { x=+1; y=t;label=1; };
border bd2(t=-0.05,0.05) { x=1; y=t;label=5; };
border bd3(t=0.05,0.5) { x=1; y=t; label=1; };
border bg(t=0.5,-0.5) { x=-1; y=t;label=6; };
border bs(t=1,-1) { x=t; y=0.5;label=1; };
border bi(t=-1,1) { x=t; y=-0.5;label=1; };
// on note 5 la partie du bord où la force surfacique s'applique et 6 celle où on
```

```

impose des conditions de Dirichlet //

mesh Th= buildmesh (bd1(9*n)+bd2(2*n)+bd3(9*n)+ bg(20*n)+bs(40*n)+bi(40*n));
fespace Vh(Th,[P1,P1]);
fespace Vh1(Th,P1);
Vh [u,v],[w,s],[a,b],[z,t];
Vh1 N0, N1, N2, phi, V, phim, M1, M2, S, phiinit, Sg, nabla, Dapprox, X, V1,
V2, Vm, vv, Dapproxm, Xm;

// définition de la fonction initiale //

func phi0=-.1-sin(pi*kx*(.95*x-1)/L)*sin(pi*ky*(1.05*y-0.5)/l);
phi=phi0;
plot(phi,wait=1,fill=1,value=1);

// réinitialisation de phi //

for (iterinit=1;iterinit< 5;iterinit=iterinit+1)
{
nabla=( (phi(x+p,y)-phi(x,y))^2 + (phi(x-p,y)-phi(x,y))^2
+(phi(x,y+p)-phi(x,y))^2 + (phi(x,y-p)-phi(x,y))^2 ) / (p*p);
S=phi/(sqrt(phi^2+p*p*nabla));
M1=dx(phi)/(sqrt((dx(phi))^2+(dy(phi))^2)+e);
M2=dy(phi)/(sqrt((dx(phi))^2+(dy(phi))^2)+e);
phiinit=convect([-S*M1,-S*M2],TT,phi);
phiinit=phiinit+TT*S;
phi=phiinit;
};

// calcul du déplacement associé //

X= (phi<0);
Dapprox = D1*X + (1-X)*D0;

solve elasticite([u,v],[w,s]) =
int2d(Th)(
2*mu*Dapprox*(dx(u)*dx(w)+dy(v)*dy(s) + ((dx(v)+dy(u))*(dx(s)+dy(w)))/2)
+ lambda*Dapprox* (dx(u)+dy(v))*(dx(w)+dy(s)) )
-int1d(Th,5)(g1*w+g2*s) +on(6,u=0,v=0);

// calcul de l'objectif //

```

```

compliance=int1d(Th,5)(g1*u+g2*v);
poids=int2d(Th)(X);
objectif=compliance+lag*poids;
objectifinitial=objectif;
cout<<"objectif initial="<<objectifinitial<<endl;

    // calcul du champ de vitesse //

V=2*mu*Dapprox*((dx(u))^2+(dy(v))^2)+lambda*Dapprox*(dx(u)+dy(v))^2
+mu*Dapprox*(dy(u)+dx(v))^2;
V=V-lag*Dapprox;

    // amélioration de V //

solve lissage (Vm,vv)= int2d(Th)( epsilon* (dx(Vm)*dx(vv)+dy(Vm)*dy(vv))
+ Vm*vv)- int2d(Th)(V*vv);
V=Vm;

N0=sqrt((dx(phi))^2+(dy(phi))^2)+e;
N1=dx(phi)/N0; N2=dy(phi)/N0;

Sg=(phi>0)-(phi<0);
plot(Sg,fill=1,value=1);

    // itération du processus //

for (iter=1 ;iter< N ;iter=iter+1)
{
cout << "iter= " << iter << endl;
cout << "T= " << T << endl;
cout<<"objectif="<<objectif<<endl;

    // on déplace phi selon le champ de vitesse //

phim=convect([-V*N1,-V*N2],T,phi);

    // réinitialisation de phim //

for (iterinit=1 ;iterinit< 5 ;iterinit=iterinit+1)

```

```

{
  nabra=( (phim(x+p,y)-phim(x,y))^2 + (phim(x-p,y)-phim(x,y))^2
+ (phim(x,y+p)-phim(x,y))^2 + (phim(x,y-p)-phim(x,y))^2 )/ (p*p);
  S=phim/(sqrt(phim^2+p*p*nabra));
  M1=dx(phim)/(sqrt((dx(phim))^2+(dy(phim))^2)+e);
  M2=dy(phim)/(sqrt((dx(phim))^2+(dy(phim))^2)+e);
  phiinit=convect([-S*M1,-S*M2],TT,phim); phiinit=phiinit+TT*S;
  phim=phiinit;
};

  // calcul du déplacement associé à la nouvelle forme //

Xm= (phim<0);
Dapproxm = D1*Xm + (1-Xm)*D0;

solve elasticitemodifiee([a,b],[z,t]) =
int2d(Th)(2*Dapproxm*mu*(dx(a)*dx(z)+dy(b)*dy(t) + ((dx(b)+dy(a))*(dx(t)+dy(z)))/2)
+ lambda*Dapproxm*( (dx(a)+dy(b))*(dx(z)+dy(t)) ))
-int1d(Th,5)(g1*z+g2*t) +on(6,a=0,b=0);

  // calcul de l'objectif associé à la nouvelle forme //

compliancem=int1d(Th,5)(g1*a+g2*b);
poidsm=int2d(Th)(Xm);
objectifm=compliancem+lag*poidsm;
cout <<"objectifm="<<objectifm<<endl;

  // test : on vérifie que la fonction objectif a bien diminué //

if (objectifm<=objectif*(1+tt))
// si c'est le cas on accepte la nouvelle forme //
{
  compliance=compliancem;
  poidsm=poidsm;
  objectif=objectifm;
  phi=phim;
  Sg=(phi>0)-(phi<0);
  plot(Sg,fill=1,value=1);
  [u,v]=[a,b];
  X=Xm;
  Dapprox=Dapproxm;
  if (T<0.05)
  {

```

```

    T=T*1.5;
};

    // calcul du nouveau champ de vitesse //

V=2*mu*Dapprox*((dx(u))^2+(dy(v))^2)+lambda*Dapprox*(dx(u)+dy(v))^2
+mu*Dapprox*(dy(u)+dx(v))^2;
V=V-lag*Dapprox;

    // amélioration de V //
solve lissage (Vm,vv)=int2d(Th)( epsilon* (dx(Vm)*dx(vv)+dy(Vm)*dy(vv))
+ Vm*vv ) - int2d(Th)(V*vv);
V=Vm;
N0=sqrt((dx(phi))^2+(dy(phi))^2)+e;
N1=dx(phi)/N0; N2=dy(phi)/N0;
cout <<" "<<endl;
};

if (objectifm>objectif*(1+tt))
// sinon on n'accepte pas la nouvelle forme et on diminue le pas de temps//
{
    T=T/2; cout <<" "<<endl;
};
};

Sg=(phi>0)-(phi<0);
plot(Sg,fill=1,value=1);
legende="Forme finale, N= "+N+", Kx= "+kx+", Ky= "+ky+", Iteration=
"+iter+", Objectif initial= "+objectifinitial+", Objectif= "+objectif+", Com-
pliance finale= "+compliance+", Lagrangien="+lag;
plot(Th,Sg,fill=1,cmm=legende,ps=sauve+".eps");

```

5 Résultats, améliorations et comparaisons

5.1 Amélioration

Sur Ω , on veut que le champ de vitesse soit égal à $\vec{V} = (\sigma(U).e(U) - lag) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$. Il existe plusieurs façons de prolonger ce champs de vecteurs sur le domaine de travail. On peut par exemple prendre comme champ de vitesse

$\vec{V} = (\sigma(U).e(U) - lag) \times D_{approx} \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$, où D_{approx} approxime la fonction indicatrice de Ω , ou bien prendre $\vec{V} = (\sigma(U).e(U) - lag) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$ en laissant FreeFem prolonger le champ de vitesse. Il est néanmoins nécessaire de ne pas prolonger la partie du champ de vitesse en dehors de Ω utilisant $\sigma(U).e(U)$ car U n'a de sens que sur Ω .

La solution choisie était de prendre $\vec{V} = (\sigma(U).e(U) \times D_{approx} - lag) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$. J'ai donc voulu comparer les résultats avec ceux trouvés avec $\vec{V} = (\sigma(U).e(U) - lag) \times D_{approx} \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$.

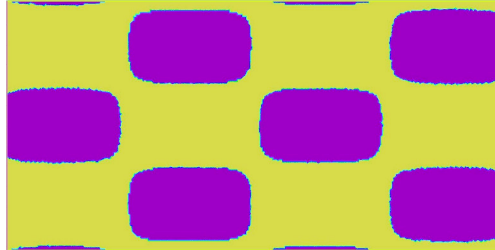
Les résultats obtenus sont très intéressants : avec ce nouveau champ de vitesse les formes finales se ressemblent mais, en moyenne, la fonction objectif diminue de 4% de plus tandis que la compliance chute de 13% de plus.

5.2 Résultats

On teste le programme sur un modèle simple celui d'une plaque horizontale fixée à gauche et sur laquelle s'exerce une force verticale dirigée vers le bas, au milieu du bord droit. Comme la méthode utilisée peut conduire à un minimum local, on prend différentes formes initiales, c'est-à-dire avec des trous placés différemment. Néanmoins, on s'arrange pour qu'il y est de la matière (en clair) là où la force s'applique (au milieu à droite).

Ce modèle étant connu, on commence par des formes initiales pas trop éloignées de la forme finale par exemple avec des trous dans les coins à droite.

Pour $k_x=4$ et $k_y=3$, la forme initiale est :



La forme obtenue sans modification est :



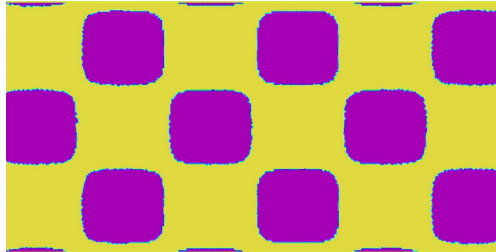
Celle obtenue après modification est :



Les résultats obtenus sont :

Objectif initial	Objectif final	%	Objectif final +	%
2,11435	1,43883	31,95	1,35946	35,70
Compliance initiale	Compliance finale	%	Compliance finale +	%
1,51691	1,01943	32,7	0,795745	47,54

Pour $k_x=6$ et $k_y=3$, la forme initiale est :



La forme obtenue sans modification est :



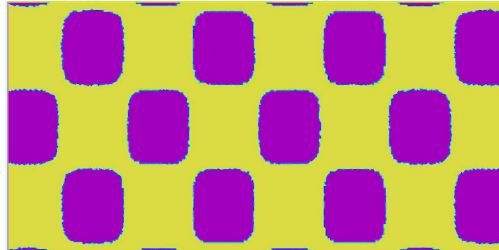
Celle obtenue après modification est :



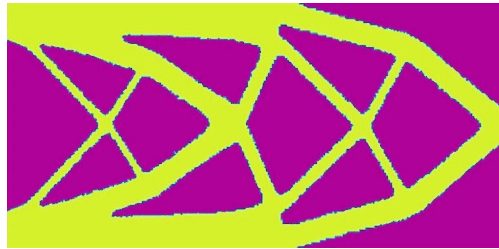
Les résultats obtenus sont :

Objectif initial	Objectif final	%	Objectif final +	%
2,28331	1,44213	36,84	1,35425	40,69
Compliance initiale	Compliance finale	%	Compliance finale +	%
1,68282	1,01924	39,43	0,799269	52,50

Pour $k_x=8$ et $k_y=3$, la forme initiale est :



La forme obtenue sans modification est :



Celle obtenue après modification est :

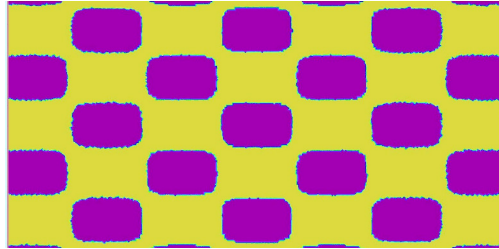


Les résultats obtenus sont :

Objectif initial	Objectif final	%	Objectif final +	%
2,50368	1,43957	42,43	1,35326	45,95
Compliance initiale	Compliance finale	%	Compliance finale +	%
1,90092	1,01763	46,47	0,802037	57,81

Même si la forme initiale n'a pas de matière dans les coins à droite, le programme fonctionne toujours :

Pour $k_x=7$ et $k_y=5$, la forme initiale est :



La forme obtenue sans modification est :



Celle obtenue après modification est :



Les résultats obtenus sont :

Objectif initial	Objectif final	%	Objectif final +	%
2,29973	1,48211	35,55	1,35284	41,17
Compliance initiale	Compliance finale	%	Compliance finale +	%
1,69463	1,03089	39,17	0,802044	52,67

Comme on a obtenu des résultats en accord avec l'article [3], on a ensuite testé le programme sur un exemple plus concret celui d'un pont.



5.3 Utilisation de l'opérateur convect

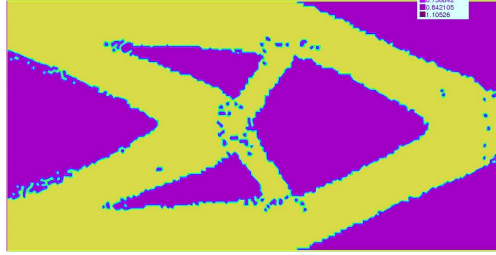
Enfin, on a cherché à s'affranchir de l'opérateur Convect. En effet, l'utilisation de convect, même si elle a de nombreux avantages, cache ce qui se passe réellement .

Supposons que l'on veuille s'en passer, le transport de ϕ ne se ferait plus par convect mais par la résolution de $\partial_t \phi + V \cdot \nabla \phi_0. \nabla \phi = 0$ avec $V = \sigma.e(U) - lag$. Dans le programme précédent, il faudrait donc changer `phim=convect([-V*N1,-V*N2],T,phi);`
 en : `solve transport(phim,w)=`
`int2d(Th)(phim*w + T*V*(N1*dx(phim)+N2*dy(phim))*w) - int2d(Th)(phi*w);`

Avec l'opérateur convect, on obtient :



Sans l'opérateur convect, on obtient :



Les résultats obtenus sont :

<i>Objectif initial</i>	<i>Objectif final avec convect</i>	%	<i>Objectif final sans convect</i>	%
2.16565	1.3627	37,08	1.3633	37,05
<i>Compliance initiale</i>	<i>Compliance finale avec convect</i>	%	<i>Compliance finale sans convect</i>	%
1.56972	0.808407	48,50	0.799009	49,04

Ce qui prouve tout l'intérêt du programme utilisant l'opérateur convect : celui-ci est plus rapide, conduit à des formes exploitables car il a été conçu de façon à être inconditionnellement stable, néanmoins les formes sont semblables.

5.4 Lissage

Comme la non utilisation de l'opérateur convect induit la création de tâches, on va pénaliser le périmètre ce qui rendra les formes obtenues plus exploitables car plus lisses. Dans ce cas, la fonction objectif est :

$J(\Omega) = \int_{\Omega} f.U + \int_{\Gamma_N} g.U + lag \int_{\Omega} 1 + c \oint_{\partial\Omega} 1$ où lag et c sont des coefficients que l'on adapte suivant la situation. Alors, la dérivée de forme devient : $J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} (-\sigma(U).e(U) + lag + cH) \theta.n$ où n est la normale extérieur et H la courbure moyenne définie par $H = divn$. Pour accéder au périmètre, la technique employée est la suivante :

On pose $s = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \epsilon^2}}$ où ϵ est un coefficient proche de 0, cette fonction approxime la fonction signe, puis on définit $\delta_{\Gamma} = \frac{\|\nabla s\|}{2}$. On prend comme périmètre $P = \int_{\Omega} \delta_{\Gamma}$.

L'équation que l'on souhaite résoudre est

$$\partial_t \Phi + \tilde{V} \|\nabla \Phi\| = 0 \text{ avec } \tilde{V} = V - cH = \sigma(U).e(U) - lag - cH.$$

Mais $H = \text{div} n = \text{div}(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|}) = \frac{1}{\|\nabla \Phi\|} \text{div}(\nabla \Phi) + \nabla(\frac{1}{\|\nabla \Phi\|}) \cdot \nabla \Phi$.
 On approxime H par $\frac{1}{\|\nabla \Phi\|} \text{div}(\nabla \Phi) = \frac{1}{\|\nabla \Phi\|} \Delta \Phi$.

L'équation devient donc : $\partial_t \Phi + V \|\nabla \Phi\| - c \Delta \Phi = 0$ et est approchée par :

$$\phi - \phi_{old} + TV \frac{\nabla \phi_{old}}{\|\nabla \phi_{old}\|} \cdot \nabla \phi - Tc \Delta \phi = 0.$$

Le résultat obtenu en prenant en compte le périmètre est :



Il est possible d'allier cette technique à l'utilisation de l'opérateur convect dans des cas où les formes obtenues nécessitent un lissage. Il suffit pour cela de changer la vitesse en $V = \sigma(U) \cdot e(U) - lag - cH$ et de changer la fonction objectif. Toute la subtilité résidant dans le choix des paramètres lag et c , qu'il faut adapter à la situation modélisée.

6 Conclusion

Ce stage s'est principalement concentré sur l'étude de l'article [3]. Il m'a fallu mener de front deux buts complémentaires : d'une part, me familiariser avec le logiciel FreeFem++ que je ne connaissais pas et dont la particularité est de résoudre les problèmes sous forme variationnelle; d'autre part, comprendre les différentes étapes du programme que je devais implémenter.

Au début, je me suis donc laissée guidée par l'article [3] et les livres [1] et [2] pour obtenir un programme qui fonctionne même si je ne maîtrisais pas toutes les notions utilisées et, en parallèle, j'ai commencé à les étudier. Enfin, une fois assimilées la compliance, le système d'élasticité linéaire et la méthode des niveaux, j'ai pu tester quelques modifications et chercher à m'affranchir de l'opérateur Convect.

J'ai vraiment apprécié ce stage qui lie les mathématiques et la physique dans un but très concret. De plus, outre les connaissances nécessaires à sa compréhension, ce stage m'a beaucoup apporté sur le plan informatique.

7 Annexe : Justification physique du modèle d'élasticité linéaire

7.1 Equations d'équilibre

On considère un corps $\psi(\Omega)$ obtenu en appliquant la déformation ψ à l'ouvert de départ Ω et les forces qui s'exercent sur lui. On se limite aux forces volumiques dont on notera la densité f et aux forces surfaciques dont on notera g la densité et Γ_N la partie du bord sur laquelle elles s'appliquent. On note Γ_D la partie du bord sur laquelle on impose des conditions de Dirichlet.

On cherche à déterminer les équations que ce corps doit vérifier pour être en équilibre. En effet, lorsque l'on transforme un objet mathématiquement en lui appliquant une déformation, la forme obtenue n'a pas de sens physique. Sous l'effet des forces extérieures, l'ouvert Ω obtenu mathématiquement va se déformer pour arriver à un état d'équilibre $\psi(\Omega)$.

Le déplacement U associé à cette déformation ψ est très utile car le travail des forces pendant celui-ci, appelé compliance, permet de caractériser la rigidité de la forme mathématique Ω .

Définition 6.1 : On appelle vecteur de contrainte de Cauchy une application $t : \bar{\psi(\Omega)} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ où S^2 est la sphère unité de \mathbb{R}^3 , ce qui traduit simplement que t est une application qui à tout un point de $\bar{\psi(\Omega)}$ et à toute direction associe un vecteur qui, d'un point physique, permettra de décrire des forces de surfaces.

Axiome de Cauchy : Si ψ est une configuration d'équilibre sous l'action des forces f et g , alors il existe un vecteur de contraintes de Cauchy t^ψ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout ouvert rgulier } A \text{ tel que } \bar{A} \subset \psi(\Omega) \\ \int_A f(y)dy + \int_{\partial A} t^\psi(y, n_A(y))ds = 0 \\ \int_A Oy \wedge f(y)dy + \int_{\partial A} Oy \wedge t^\psi(y, n_A(y))ds = 0 \\ \text{Sur } \Gamma_N, t^\psi(y, n_{\Gamma_N}(y)) = g(y) \end{array} \right.$$

Interprétation : Soit A tel que $\bar{A} \subset \psi(\Omega)$, alors les seules forces extérieures agissant sur A sont les forces volumiques dont la résultante est $\int_A f$. Pour que A soit en équilibre, il faut que cette résultante soit contrée par d'autres forces. C'est le vecteur de contrainte de Cauchy qui joue ce rôle. Ce vecteur s'interprète donc comme une densité de forces surfaciques que le reste du corps $\psi(\Omega) \setminus A$ exerce sur la frontière de A de façon à équilibrer les forces appliquées.

La deuxième équation s'interprète de façon similaire non plus en termes de forces mais en termes de moments. Cette fois, le reste du corps empêche A de se mettre en rotation.

La dernière équation traduit la même idée mais pour des parties de $\psi(\Omega)$ dont la frontière rencontre la partie du bord qui subit les forces surfaciques. En ces points, le vecteur de contrainte de Cauchy est égal aux forces surfaciques

appliquées.

Théorème de Cauchy : Supposons que f soit continue, que t^ψ soit C^1 par rapport à y et continu par rapport à n . L'axiome de Cauchy implique l'existence d'un tenseur $T^\psi : \psi(\Omega) \rightarrow M_3$ tel que pour tout y et pour tout n , on a : $t^\psi(y, n) = T^\psi(y)n$ et $T^\psi = {}^t T^\psi$. De plus, T^ψ satisfait l'équation d'équilibre : $\text{div}T^\psi = -f$.

La démonstration de ce résultat se trouve dans [8]

Ainsi le tenseur de contraintes de Cauchy est un tenseur symétrique vérifiant le système :
$$\begin{cases} \text{div}T^\psi = -f \\ T^\psi n_{\Gamma_N} = g \quad \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

7.2 Lois de comportement

Définition 6.2 : On appelle loi de comportement, une fonctionnelle $\hat{T} : \Omega \times \{\text{déformations}\} \rightarrow S_3$ où S_3 est l'ensemble des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$, telle que pour toute déformation ψ et tout point x de Ω , on ait : $\hat{T}(x, \psi) = T^\psi(\psi(x))$.

Les lois de comportement doivent respecter l'invariance des formes par une transformation rigide, ce qui justifie l'axiome suivant :

Axiome 1 (Axiome d'indifférence matérielle) : Pour toute déformation ψ , tout vecteur a de \mathbb{R}^3 , toute rotation Q de SO_3 et tout couple $(y, n) \in \psi(\Omega) \times S^2$, le vecteur de contraintes de Cauchy satisfait : $t^{a+Q\psi}(a + Qy, Qn) = Qt^\psi(y, n)$.

Propriété 6.1 : Une loi de comportement satisfait l'axiome d'indifférence matérielle si et seulement si, pour toute déformation ψ , tout vecteur a de \mathbb{R}^3 , toute rotation Q de SO_3 , on a : $\hat{T}(x, a + Q\psi) = Q\hat{T}(x, \psi) {}^t Q$.

Démonstration : Si on a $t^{a+Q\psi}(a + Qy, Qn) = Qt^\psi(y, n)$ alors $T^{a+Q\psi}(a + Qy)Qn = QT^\psi(y)n$.

Donc, $\hat{T}(x, a + Q\psi)Qn = Q\hat{T}(x, \psi)n$ où $y = \psi(x)$ pour tout vecteur unitaire n , d'où $\hat{T}(x, a + Q\psi)Q = Q\hat{T}(x, \psi)$. D'où le résultat. Il suffit de remonter les calculs pour obtenir la réciproque.

Axiome 2 : Pour tout point $x_0 \in \Omega$, pour tout couple de déformations $\psi, \tilde{\psi}$ tel que $\psi = \tilde{\psi}$ au voisinage de x_0 , le vecteur de contrainte de Cauchy doit vérifier $t^\psi(\psi(x_0), n) = t^{\tilde{\psi}}(\tilde{\psi}(x_0), n)$ pour tout vecteur unitaire n , ce qui se traduit en terme de loi de comportement par $\hat{T}(x_0, \psi) = \hat{T}(x_0, \tilde{\psi})$.

Cette propriété traduit que pour connaître la loi de comportement en x_0 , il suffit de connaître la déformation au voisinage de ce point.

Axiome 3 : Soit $A \in M_3^+ = \{M \in M_3(\mathbb{R}) : \det M > 0\}$, $x_0 \in \Omega$, on pose $\Omega_A = A(\Omega - x_0) + x_0$. Ainsi x_0 appartient à l'ouvert $\Omega \cap \Omega_A$, et en travaillant dans un voisinage de x_0 inclus dans $\Omega \cap \Omega_A$ on peut considérer l'application qui à une déformation ψ associe la déformation $\psi_A = \psi(A(\cdot - x_0) + x_0)$.

Soit \hat{T} une loi de comportement par rapport à la configuration de référence Ω et \hat{T}_A la loi de comportement du même matériau par rapport à la configuration Ω_A , alors on doit avoir : $\hat{T}_A(x_0, \psi) = \hat{T}(x_0, \psi_A)$.

Cette propriété traduit simplement que les deux lois de comportement doivent avoir le même tenseur de contrainte de Cauchy pour des déformations décrivant la même configuration même si c'est à partir de deux configurations de référence différentes.

7.3 Notion d'isotropie et d'élasticité

Pour introduire mathématiquement la notion d'isotropie, on pose la définition suivante :

Définition 6.3 : Une matrice A appartient à l'ensemble de symétrie matérielle du matériau en x_0 , noté G_{x_0} , si pour tout couple de déformation ψ sur Ω et $\tilde{\psi}$ sur Ω_A , tel que $\psi = \tilde{\psi}$ au voisinage de x_0 , on a : $\hat{T}_A(x_0, \tilde{\psi}) = \hat{T}(x_0, \psi)$.

Cela traduit le fait, qu'au voisinage de x_0 , on obtient le même tenseur de contrainte que l'on effectue la déformation ψ ou que l'on effectue la déformation $x \mapsto A(x - x_0) + x_0$ puis ψ et ce pour toute déformation ψ .

On peut caractériser les matrices appartenant à l'ensemble de symétrie matérielle :

Propriété 6.2 : A appartient à G_{x_0} si pour toute déformation ψ sur Ω , on a : $\hat{T}(x_0, \psi_A) = \hat{T}(x_0, \psi)$.

Démonstration : D'après l'axiome 2, si $\psi = \tilde{\psi}$ au voisinage de x_0 , alors $\hat{T}_A(x_0, \tilde{\psi}) = \hat{T}_A(x_0, \psi) = \hat{T}(x_0, \psi_A)$.

Propriété 6.3 : L'ensemble de symétrie matérielle en x_0 est un sous groupe de M_3^+ .

Démonstration : M_3^+ est un groupe pour la multiplication. G_{x_0} contient l'identité d'après l'axiome 2.

Si A et B sont dans G_{x_0} , alors pour toute déformation ψ ,

$\hat{T}(x_0, \psi_{AB}) = \hat{T}(x_0, \psi_A) = \hat{T}(x_0, \psi)$ donc G_{x_0} est stable par produit.

Si A appartient à G_{x_0} alors A est inversible, on peut donc définir

$\psi_{A^{-1}} = \psi(A^{-1}(\cdot - x_0) + x_0)$ et on a : $\hat{T}(x_0, \psi_{A^{-1}}) = \hat{T}(x_0, (\psi_{A^{-1}})_A) = \hat{T}(x_0, \psi)$
donc $A^{-1} \in G_{x_0}$.

Définition 6.4 : Un matériau est dit isotrope en un point x_0 de sa configuration de référence si $SO_3 \subset G_{x_0}$.

Dans un matériau isotrope, toutes les rotations sont des symétries matérielles, donc le matériau possède les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions de l'espace ce qui correspond bien à ce que l'on voulait modéliser.

Afin de simplifier le problème, on se limitera dans la suite à des milieux élastiques, notion que l'on va aussi traduire mathématiquement :

Définition 6.5 : Un matériau est dit élastique si sa loi de comportement ne dépend de la déformation que par l'intermédiaire du gradient de la déformation. Dans ce cas, la loi de comportement est de la forme : $\hat{T} : \Omega \times M_3^+ \rightarrow S_3$ avec $T^\psi(\psi(x)) = \hat{T}(x, \nabla\psi)$.

Propriété 6.4 : La loi de comportement d'un matériau élastique vérifie l'axiome d'indifférence matérielle si et seulement si pour tout $M \in M_3^+$ et pour toute rotation Q de SO_3 on a : $\hat{T}(x, QM) = Q\hat{T}(x, M)^tQ$.

Propriété 6.5 : Pour un matériau élastique, le groupe de symétrie matérielle en x_0 est donné par $G_{x_0} = \{M \in M_3^+ : \hat{T}(x_0, SM) = \hat{T}(x_0, S) \forall S \in M_3^+\}$.

Propriété 6.6 : Un matériau élastique est isotrope en x_0 si et seulement si pour tout $M \in M_3^+$ et pour toute rotation Q de SO_3 on a : $\hat{T}(x_0, MQ) = \hat{T}(x_0, M)$ et dans ce cas il existe une application $\bar{T} : \Omega \times S_3^+ \rightarrow S_3$ telle que : $\hat{T}(x_0, M) = \bar{T}(x_0, M^tM)$.

Démonstration : Il suffit de combiner la propriété 2.5 et la définition de l'isotropie puis d'en déduire que si $M^tM = \widetilde{M}^t\widetilde{M}$ c'est-à-dire si $M^{-1}\widetilde{M} \in SO_3$ alors $\hat{T}(x_0, M) = \hat{T}(x_0, MM^{-1}\widetilde{M}) = \hat{T}(x_0, \widetilde{M})$

7.4 Justification de la loi de comportement utilisée

Théorème de Rivlin-Ericksen : Soit \hat{T} une loi de comportement d'un matériau élastique qui satisfait l'axiome d'indifférence matérielle et est isotrope en x_0 . Alors on a $\hat{T}(x_0, M) = \bar{T}(x_0, M^tM)$ et $\bar{T}(x_0, S) = \alpha_0 I + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2$ où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des fonctions scalaires des invariants principaux de S . Réciproquement, toute loi vérifiant $\hat{T}(x_0, M) = \bar{T}(x_0, M^tM)$ et $\bar{T}(x_0, S) = \alpha_0 I + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2$ satisfait l'axiome d'indifférence matérielle et est isotrope en x_0 .

Démonstration : Pour alléger l'écriture on n'écrira pas la dépendance en x_0 .

Vérifions déjà la réciproque : Si on a $\hat{T}(M) = \bar{T}(M^t M)$ et $\bar{T}(S) = \alpha_0 I + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2$ alors pour tout $M \in M_3^+$ et pour toute rotation Q de SO_3 on a : $\hat{T}(QM) = Q\hat{T}(M)^t Q$ et $\hat{T}(MQ) = \hat{T}(M)$. Donc, d'après la propriété 6.4, la loi de comportement satisfait l'axiome d'indifférence matérielle et, d'après la propriété 6.6, le matériau est isotrope en x_0 .

Passons à la partie directe : Soit \hat{T} une loi de comportement élastique satisfaisant l'axiome d'indifférence matérielle et l'isotropie. Comme elle est isotrope, on sait qu'il existe une application telle que : $\hat{T}(x_0, M) = \bar{T}(x_0, M^t M)$. On va montrer que toute rotation diagonalisant S diagonalise $\bar{T}(S)$.

Comme S est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée. Soit Q_0 une rotation telle que : ${}^t Q_0 S Q_0$ soit diagonale.

On considère les deux matrices suivantes : $Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q_2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elles permettent de caractériser les matrices diagonales, en effet : M est diagonale si et seulement si ${}^t Q_1 M Q_1 = M$ et ${}^t Q_2 M Q_2 = M$. Or pour $i = 1, 2$ on a grâce à l'axiome d'indifférence matérielle :

$${}^t Q_i {}^t Q_0 \bar{T}(S) Q_0 Q_i = \bar{T}({}^t(Q_0 Q_i) S Q_0 Q_i) = \bar{T}({}^t Q_0 S Q_0) = {}^t Q_0 \bar{T}(S) Q_0.$$

Donc $\bar{T}(S)$ est diagonale. Ainsi, on a montré que toute rotation diagonalisant S diagonalise $\bar{T}(S)$.

Montrons maintenant que : $\bar{T}(S) = \alpha_0 I + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2$ où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des scalaires (dépendant de S). On vient de voir que S et $\bar{T}(S)$ sont diagonalisées par une même matrice donc elles ont les mêmes espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes. Soit k ce nombre ($k \leq 3$). On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les k valeurs propres distinctes de S et μ_1, \dots, μ_k celles de $\bar{T}(S)$. On a $S = \sum_1^k \lambda_i E_i$ et $\bar{T}(S) = \sum_1^k \mu_i E_i$. Donc S et $\bar{T}(S)$ appartiennent au sous espace vectoriel V engendré par les E_i . Il en est de même pour les puissances de S .

Montrons que la famille $(S^i)_{i=0, k-1}$ est une base de V en montrant qu'elle est libre. Comme $S^j = \sum_1^k \lambda_i^j E_i$, le déterminant associée à cette famille dans la base des E_i est un déterminant de Van der Monde. Il est donc non nul car les λ_i sont distincts. Ainsi, la famille $(S^i)_{i=0, k-1}$ est une base de V . Comme $\bar{T}(S)$ appartient à V , il existe donc, quitte à compléter par des zéros, des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que : $\bar{T}(S) = \alpha_0 I + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2$.

Il reste à montrer que les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ne dépendent que des invariants principaux de S . Pour cela on utilise l'axiome d'indifférence matérielle dans le

quel on reporte le résultat précédent : $\bar{T}(S) = \alpha_0(S)I + \alpha_1(S)S + \alpha_2(S)S^2 = \bar{T}({}^tQSQ) = \alpha_0({}^tQSQ)I + \alpha_1({}^tQSQ)S + \alpha_2({}^tQSQ)S^2$.

Comme $(S^i)_{i=1,k}$ est une base on a donc : $\alpha_i(S) = \alpha_i({}^tQSQ)$. Les fonctions α_i sont donc invariantes par conjugaison par des rotations.

Pour montrer qu'elles sont uniquement fonction des invariants principaux, il suffit de montrer que si deux matrices symétriques S et S' ont les mêmes invariants principaux, alors il existe une rotation Q telle que $S' = {}^tQSQ$. Mais si S et S' ont les mêmes invariants principaux, alors elles ont même polynôme caractéristique. Comme ce sont des matrices symétriques, elles sont diagonalisables en base orthonormée. Une rotation passant d'une telle base pour S à une telle base pour S' convient.

Propriété 6.7 : *Le tenseur des contraintes associé à $\psi = Id$ est en tout point une matrice scalaire appelée pression résiduelle.*

Propriété 6.8 : *Considérons un matériau élastique homogène isotrope alors si on suppose que les fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont différentiables alors il existe trois constantes π, μ et λ telles que : $\bar{T}(S) = -\pi I + 2\mu E + \lambda tr(E)I + o(E)$. où $E = \frac{1}{2}(S - I)$.*

Démonstration : $\bar{T}(S) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)I + (2\alpha_1 + 4\alpha_2)E + 4\alpha_2 E^2$.

On développe les invariants principaux de C :

$$x_1 = tr(S) = tr(I + 2E) = 3 + 2tr(E)$$

$$x_2 = tr(cof(S)) = \frac{1}{2}((trS)^2 - tr(S^2)) = \frac{1}{2}((3 + 2trE)^2 - tr(I + 4E + 4E^2)) = \frac{1}{2}(9 + 12trE - 3 - trE + o(E)) = 3 + 4trE + o(E).$$

$$x_3 = det(S) = det(I + 2E) = 1 + 2tr(E) + o(E).$$

$$\bar{T}(S) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)(3, 3, 1)I + \sum_{i=0}^2 (2\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_1} + 4\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_2} + 2\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_3})(3, 3, 1) trE + ((2\alpha_1 + 4\alpha_2)E + o(E))$$

Propriété 6.9 : *Dans une configuration de référence naturelle, c'est-à-dire sans pression résiduelle, on peut donc approximer $\bar{T}(S)$ par $2\mu E + \lambda tr(E)I$.*

7.5 Signification physique des coefficients de Lamé

Si on considère la transformation $\phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \varepsilon x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\varepsilon \\ 0 & \mu\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

En considérant la normale $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t.n}{\varepsilon}$. μ représente

donc la résistance du matériau au cisaillement : plus μ est grand et plus il faut tirer fort sur les faces du cube pour obtenir une même déformation. C'est la raison pour laquelle μ est appelé module de cisaillement du matériau.

Si on considère la transformation $\phi = (1 - \varepsilon)Id$ qui correspond à une compression (ou à une dilatation suivant le signe de ε), alors $E = (\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2)I$ et $\bar{T} = (2\mu + 3\lambda)\varepsilon I$. Donc, pour toute normale, on a : $2\mu + 3\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t.n}{\varepsilon}$. Comme la variation du volume au premier ordre est 3ε , le coefficient $\frac{2\mu+3\lambda}{3}$ mesure la résistance du matériau à la compression et est appelé module de compressibilité.

7.6 Conclusion

Ainsi, si on part d'une configuration Ω , celle-ci évolue afin d'atteindre l'équilibre en $\psi(\Omega)$, où le déplacement $U = \psi - Id$ est solution du système approché

$$\begin{cases} -div T = f & sur \Omega \\ U = 0 & sur \Gamma_D \text{ où } T = 2\mu E + \lambda tr(E)I \\ Tn = g & sur \Gamma_N \end{cases}$$

En pratique on linéarise le système en remplaçant E par sa partie linéarisée $e = \frac{1}{2}({}^t\nabla U + \nabla U)$. Ainsi, on considérera le champ U solution sur Ω du système suivant, dit d'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} -div \sigma = f & sur \Omega \\ U = 0 & sur \Gamma_D \text{ } \sigma = 2\mu e(U) + \lambda tr(e(U)) I \\ \sigma n = g & sur \Gamma_N \end{cases}$$

Références

- [1] GRÉGOIRE ALLAIRE, *Analyse numérique et optimisation*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2006)
- [2] GRÉGOIRE ALLAIRE, *Conception optimale de structures*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2006)
- [3] GRÉGOIRE ALLAIRE et FRANÇOIS JOUVE, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method* dans Journal of computational Physics (2004)
- [4] JOHN STRAIN, *Semi-Lagrangian Methods for Level Set Equations* de dans Journal of computational Physics (1999)
- [5] F.HECHT, O.PIRONNEAU, A.LE HYARIC, K.OHTSUKA, *Freefem++*
- [6] PATRICK LE TALLEC, *Mécanique des milieux continus*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2005)
- [7] PATRICK HUERRE, *Mécanique des fluides*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2004)
- [8] HERVÉ LE DRET, *Méthodes mathématiques en élasticité*, Notes de cours de DEA (2003-2004)