

# CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

G. ALLAIRE

20 Janvier 2010

CHAPITRE V

## OPTIMISATION PARAMETRIQUE

## Optimisation de l'épaisseur d'une membrane

Membrane occupant un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ . Forces  $f \in L^2(\Omega)$ , déplacement  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution unique de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Paramétrique** car le domaine de calcul  $\Omega$  est fixe. L'épaisseur  $h(x)$  n'est qu'un **paramètre**.

**Ensemble admissible** des épaisseurs  $h$  défini par

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ h \in L^\infty(\Omega), \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega, \int_{\Omega} h(x) dx = h_0 |\Omega| \right\}.$$

## Problème d'optimisation de forme paramétrique

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) = \int_{\Omega} j(u) dx$$

où  $u$  dépend de  $h$  à travers l'équation d'état, et  $j$  fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $|j(u)| \leq C(u^2 + 1)$  et  $|j'(u)| \leq C(|u| + 1)$ .

### Exemples:

☞ Compliance ou travail des forces extérieures (mesure de la rigidité)

$$j(u) = fu$$

☞ Critère de moindres carrés pour atteindre un déplacement cible

$$u_0 \in L^2(\Omega)$$

$$j(u) = |u - u_0|^2$$

## Continuité de la fonction coût

**Proposition 5.1.** L'application

$$h \rightarrow J(h) = \int_{\Omega} j(u) dx$$

est continue de  $\mathcal{U}_{ad}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Preuve.** Par composition des 2 fonctions continues ci-dessous.

**Lemme 5.2.** L'application  $\hat{u} \rightarrow \int_{\Omega} j(\hat{u}) dx$  est continue de  $L^2(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Preuve.** Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

**Lemme 5.3.** L'application  $h \rightarrow u$  est continue de  $\mathcal{U}_{ad}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

### Preuve du Lemme 5.3.

Soit une suite  $h_n \in \mathcal{U}_{ad}$  telle que  $\|h_n - h_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$ . Soit  $u_n$  la solution unique dans  $H_0^1(\Omega)$  de l'équation de membrane associée à  $h_n$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h_n \nabla u_n) = f & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} h_n \nabla u_n \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

On soustrait la formulation variationnelle de  $u_m$  à celle de  $u_n$

$$\int_{\Omega} h_n \nabla(u_n - u_m) \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} (h_m - h_n) \nabla u_m \cdot \nabla \phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

En choisissant  $\phi = u_n - u_m$  on en déduit

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{h_{\min}^2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|h_m - h_n\|_{L^\infty(\Omega)},$$

ce qui prouve que  $u_n$  est une suite de Cauchy dans  $H_0^1(\Omega)$ .

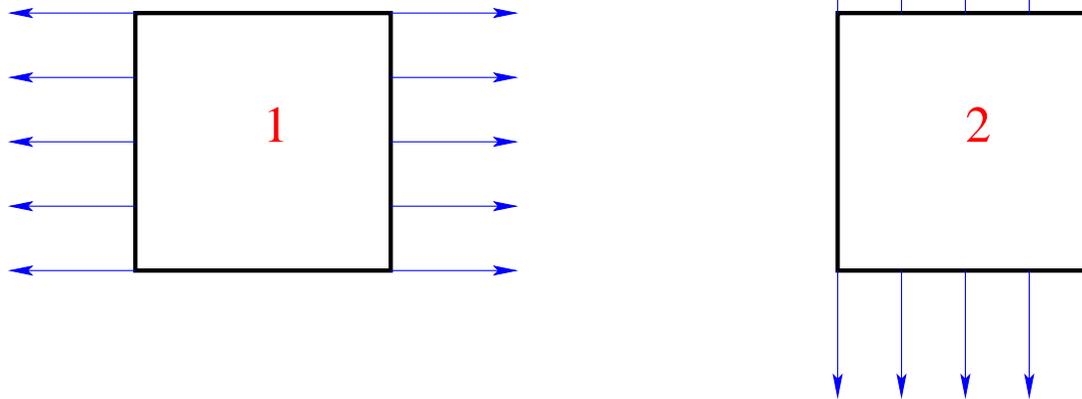
## 5.2 Théories d'existence

- ➡ Aucun des théorèmes du cours ne s'applique en général !
- ➡ **En général il n'existe pas de forme optimale !**
- ➡ C'est une question importante car la non-existence a des conséquences fâcheuses pour les calculs numériques.
- ➡ **Remèdes possibles:** pour obtenir l'existence on modifie la définition de l'ensemble admissible  $\mathcal{U}_{ad}$ .
  1. Discrétisation: ensemble admissible de dimension finie.
  2. Régularisation: ensemble admissible ayant une propriété de compacité.
  3. Cas particulier: “miracle” pour la compliance car le problème est convexe.

## Non-existence de forme optimale en général

- ➡ Il existe des contre-exemples mathématiques (un peu compliqués).
- ➡ Ça se voit numériquement: non convergence, instabilités...

Contre-exemple intuitif (qui peut se justifier) à 2 équations d'état:



On veut que la membrane soit

1. **solide** pour le chargement horizontal 1,
2. **faible** pour le chargement vertical 2.

### Définition du contre-exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(h\nabla u_1) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ h\nabla u_1 \cdot n = e_1 \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(h\nabla u_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ h\nabla u_2 \cdot n = e_2 \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

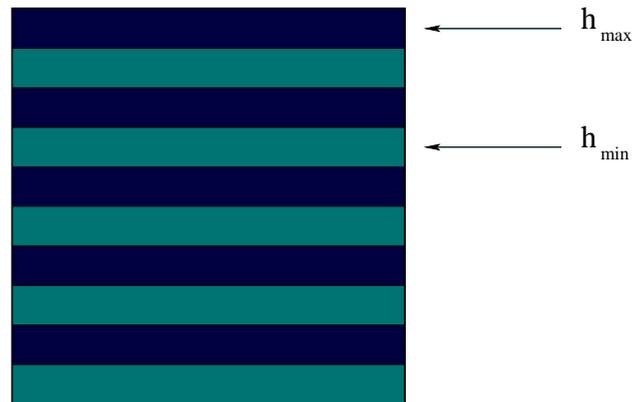
$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) = \int_{\partial\Omega} e_1 \cdot n u_1 ds - \int_{\partial\Omega} e_2 \cdot n u_2 ds$$

On **minimise** la compliance dans la direction  $e_1$ , et on la **maximise** dans la direction  $e_2$ .

Il s'agit de la **même membrane** pour les 2 chargements.

## Raisonnement intuitif

Si  $h$  est uniforme  $\Rightarrow$  matériau isotrope  $\Rightarrow$  même résistance mécanique dans toutes les directions, donc **pas optimal**.



Faisons des couches horizontales de faible et forte épaisseurs alternées:  
 $\Rightarrow$  structure laminée **solide** horizontalement et **faible** verticalement.

### Raisonnement intuitif (suite et fin)

- ✘ **Verticalement**, les lignes de contrainte doivent traverser les couches d'épaisseur minimale: la structure est donc **faible**.
- ✘ **Horizontalement**, les lignes de contrainte suivent les couches d'épaisseur maximale: la structure est donc **forte**.
- ✘ **Cependant**, comme la condition aux limites est uniforme sur le bord, la structure sera plus solide pour le chargement horizontal si les couches **sont de petite taille** (ce qui fait peu dévier les lignes de force de l'horizontale).

Si  $h$  **oscille** à petite échelle, on obtient un **matériau composite anisotrope**.

Pour atteindre le minimum il faut que l'échelle d'oscillations **tende vers 0**.

**Donc il n'existe pas d'épaisseur optimale !**

### 5.2.2 Existence pour un modèle discrétisé

Soit une partition  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  du domaine  $\Omega$ , qui vérifie

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\omega}_i, \quad \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j.$$

On introduit le sous-espace  $\mathcal{U}_{ad}^n$  de  $\mathcal{U}_{ad}$  défini par

$$\mathcal{U}_{ad}^n = \{h \in \mathcal{U}_{ad}, \quad h(x) = h_i \text{ dans } \omega_i, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Toute fonction  $h(x)$  est représentée de manière unique par un vecteur  $(h_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ : on identifie  $\mathcal{U}_{ad}^n$  à un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

On s'est donc ramené en dimension finie. C'est plus facile !

**Théorème 5.9 (dimension finie).** Le problème d'optimisation

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}^n} J(h)$$

admet au moins une solution optimale.

**Preuve.** On remarque que  $\mathcal{U}_{ad}^n$  est un sous-espace compact de  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $J(h)$  est une fonction continue sur  $\mathcal{U}_{ad}^n$  d'après la Proposition 5.1, on peut appliquer le Théorème 3.3 qui donne l'existence d'un point de minimum de  $J$  sur  $\mathcal{U}_{ad}^n$ .

**Remarque.** Que se passe-t-il quand  $n \rightarrow \infty$  ? Numériquement, minima globaux ou locaux ? Conclusion: **théorème d'intérêt très limité.**

### 5.2.3 Existence pour un modèle avec contrainte de régularité

Soit  $W^{1,\infty}(\Omega) = \left\{ \phi \in L^\infty(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i \leq N \right\}$ , où  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables bornées sur  $\Omega$ . L'espace  $W^{1,\infty}(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|\phi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} (|\phi(x)| + |\nabla \phi(x)|).$$

On se fixe a priori une constante  $R > 0$ , et on introduit le sous-espace  $\mathcal{U}_{ad}^{reg}$

$$\mathcal{U}_{ad}^{reg} = \{h \in \mathcal{U}_{ad} \cap W^{1,\infty}(\Omega), \quad \|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R\}.$$

**Interprétation:** contrainte de “faisabilité” pratique car l'épaisseur ne peut pas varier trop vite.

**Théorème 5.12.** Le problème d'optimisation

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}^{reg}} J(h)$$

admet au moins une solution optimale.

**Preuve.** On considère une suite minimisante  $(h_n)_{n \geq 1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(h_n) = \left( \inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}^{reg}} J(h) \right).$$

Par définition, la suite  $h_n$  est bornée (uniformément en  $n$ ) dans l'espace  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . On applique alors une variante du [Théorème de Rellich](#) qui affirme qu'on peut extraire de cette suite une sous-suite (que l'on note toujours  $h_n$  par simplicité) qui converge dans  $L^\infty(\Omega)$  vers une fonction limite  $h_\infty$  (de plus  $h_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ). On sait déjà que l'application  $h \rightarrow J(h)$  est continue de  $\mathcal{U}_{ad}$  dans  $\mathbb{R}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(h_n) = J(h_\infty),$$

ce qui prouve que  $h_\infty$  est un point de minimum global de  $J$  dans  $\mathcal{U}_{ad}^{reg}$ .

## Théorème d'intérêt pratique limité.

- ➡ Comment choisir la constante  $R$  qui intervient dans la définition de  $\mathcal{U}_{ad}^{reg}$  ?
- ➡ En général, pas de convergence quand  $R$  tend vers l'infini.
- ➡ Numériquement, minima globaux ou locaux ?
- ➡ Numériquement on préfère la contrainte de régularité

$$\|h\|_{H^1(\Omega)} \leq R.$$

### 5.3.1 Calcul du gradient continu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{U} = \{h \in L^\infty(\Omega), \exists h_0 > 0 \text{ tel que } h(x) \geq h_0 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

**Lemme 5.15.** L'application  $h \rightarrow u(h)$ , qui à  $h \in \mathcal{U}$  fait correspondre la solution  $u(h) \in H_0^1(\Omega)$ , est **différentiable** et la dérivée directionnelle en  $h$  dans la direction  $k \in L^\infty(\Omega)$  est donnée par

$$\langle u'(h), k \rangle = v,$$

où  $v$  est l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla v) = \operatorname{div}(k\nabla u) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Preuve.** Formellement, il suffit de dériver l'équation par rapport à  $h$ , mais pour donner un sens rigoureux à ce calcul il faut travailler sur la [formulation variationnelle](#) (voir livre).

Pour calculer la dérivée directionnelle, on définit  $h(t) = h + tk$  pour  $t > 0$ . Soit  $u(t)$  la solution pour l'épaisseur  $h(t)$ . On dérive par rapport à  $t$ : formellement, on obtient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h(t)\nabla u'(t)) = \operatorname{div}(h'(t)\nabla u(t)) & \text{dans } \Omega \\ u'(t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et comme  $h'(0) = k$  on a  $u'(0) = v$ .

**Lemme 5.17.** Pour  $h \in \mathcal{U}$ , soit  $u(h)$  l'état dans  $H_0^1(\Omega)$  et

$$J(h) = \int_{\Omega} j(u(h)) \, dx ,$$

où  $j$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $|j(u)| \leq C(u^2 + 1)$  et  $|j'(u)| \leq C(|u| + 1)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ . L'application  $J(h)$ , de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$ , est différentiable et la dérivée directionnelle en  $h$  dans la direction  $k \in L^\infty(\Omega)$  est donnée par

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_{\Omega} j'(u(h))v \, dx ,$$

où  $v = \langle u'(h), k \rangle$  est l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla v) = \operatorname{div}(k\nabla u) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Preuve.** Par simple composition d'applications dérivables.

### Etat adjoint

On introduit un **état adjoint**  $p$  défini comme l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla p) = -j'(u) & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Théorème 5.19.** La fonction coût  $J(h)$  est **dérivable** sur  $\mathcal{U}$  et on a

$$J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p .$$

Si  $h \in \mathcal{U}_{ad}$  est un minimum local de  $J$  sur  $\mathcal{U}_{ad}$ , il vérifie la **condition nécessaire d'optimalité**

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla p (k - h) dx \geq 0$$

pour tout  $k \in \mathcal{U}_{ad}$ .

**Preuve.** Pour rendre explicite  $J'(h)$  à partir du Lemme 5.17, il faut éliminer  $v = \langle u'(h), k \rangle$ . On utilise l'état adjoint pour cela: on multiplie l'équation de  $v$  par  $p$  et celle de  $p$  par  $v$  et on intègre par parties

$$\int_{\Omega} h \nabla p \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} j'(u) v \, dx$$

$$\int_{\Omega} h \nabla v \cdot \nabla p \, dx = - \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla p \, dx$$

Par comparaison de ces deux égalités on en déduit que

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_{\Omega} j'(u) v \, dx = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla p \, dx,$$

et ceci, pour tout  $k \in L^{\infty}(\Omega)$ . Comme  $\nabla u \cdot \nabla p$  appartient à  $L^1(\Omega)$ , on vérifie bien que  $J'(h)$  est continue sur  $L^{\infty}(\Omega)$ .

### Méthode pour trouver l'état adjoint

Pour des variables indépendantes  $(\hat{h}, \hat{u}, \hat{p}) \in L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\hat{h}, \hat{u}, \hat{p}) = \int_{\Omega} j(\hat{u}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{p} \left( -\operatorname{div}(\hat{h} \nabla \hat{u}) - f \right) \, dx,$$

où  $\hat{p}$  est la fonction **multiplicateur de Lagrange** pour la contrainte qui relie  $u$  à  $h$ . Par intégration par parties on a aussi

$$\mathcal{L}(\hat{h}, \hat{u}, \hat{p}) = \int_{\Omega} j(\hat{u}) \, dx + \int_{\Omega} \left( \hat{h} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{u} - f \hat{p} \right) \, dx,$$

La dérivée partielle de  $\mathcal{L}$  par rapport  $u$  dans la direction  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  est

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\hat{h}, \hat{u}, \hat{p}), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} j'(\hat{u}) \phi \, dx + \int_{\Omega} \left( \hat{h} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \phi \right) \, dx,$$

qui, lorsqu'elle s'annule, n'est rien d'autre que la formulation variationnelle de l'équation adjointe.

Formule simple de la dérivée

Le Lagrangien conduit à la formule suivante

$$J'(h) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p)$$

avec  $u$  l'état, et  $p$  l'adjoint.

Cela n'est pas une surprise ! En effet,

$$J(h) = \mathcal{L}(h, u, \hat{p}) \quad \forall \hat{p}$$

car  $u$  est l'état. Donc, si  $u(h)$  est dérivable, on a

$$\langle J'(h), k \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, \hat{p}), k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(h, u, \hat{p}), \frac{\partial u}{\partial h}(k) \right\rangle$$

On prend alors  $\hat{p} = p$ , l'adjoint, pour obtenir

$$\langle J'(h), k \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \right\rangle$$

### 5.3.2 Algorithme numérique

#### Gradient projeté

1. **Initialisation** de l'épaisseur  $h_0 \in \mathcal{U}_{ad}$  (par exemple, une fonction constante qui satisfait les contraintes).
2. **Itérations** jusqu'à convergence, pour  $n \geq 0$ :

$$h_{n+1} = P_{\mathcal{U}_{ad}} \left( h_n - \mu J'(h_n) \right),$$

où  $\mu > 0$  est un pas de descente,  $P_{\mathcal{U}_{ad}}$  est l'opérateur de projection sur le convexe fermé  $\mathcal{U}_{ad}$  et la dérivée est donnée par

$$J'(h_n) = \nabla u_n \cdot \nabla p_n$$

avec  $u_n$  la solution de l'équation d'état et  $p_n$  celle de l'équation adjointe (associées à l'épaisseur  $h_n$ ).

Pour que cet algorithme soit entièrement explicite, il nous faut préciser ce qu'est l'opérateur de projection  $P_{\mathcal{U}_{ad}}$ .

On caractérise l'opérateur de projection  $P_{\mathcal{U}_{ad}}$

$$\left(P_{\mathcal{U}_{ad}}(h)\right)(x) = \max(h_{min}, \min(h_{max}, h(x) + \ell))$$

où  $\ell$  est l'unique multiplicateur de Lagrange tel que

$$\int_{\Omega} P_{\mathcal{U}_{ad}}(h) dx = h_0 |\Omega|.$$

La détermination de la constante  $\ell$  n'est plus explicite: il faut utiliser un algorithme itératif en utilisant la propriété que la fonction

$$\ell \rightarrow F(\ell) = \int_{\Omega} \max(h_{min}, \min(h_{max}, h(x) + \ell)) dx$$

est **strictement croissante** sur l'intervalle  $[\ell^-, \ell^+]$ , image réciproque de  $[h_{min}|\Omega|, h_{max}|\Omega|]$ . Grâce à cette propriété de monotonie, l'algorithme itératif est simple: on commence par déterminer un encadrement  $[\ell^1, \ell^2]$  tel que

$$F(\ell^1) \leq h_0 |\Omega| \leq F(\ell^2),$$

puis on procède par **dichotomie** pour trouver  $\ell$ .

- ➡ En pratique, on utilise plutôt un algorithme de gradient projeté à **pas variable** (mais non optimal) qui garantit la décroissance de la fonctionnelle  $J(h_{n+1}) < J(h_n)$ .
- ➡ L'algorithme est plutôt lent. Accélération possible par une méthode de quasi-Newton.
- ➡ Le surcoût engendré par le calcul de l'état adjoint est très faible : il suffit de calculer un nouveau second membre, en utilisant la solution de l'équation d'état, et de résoudre le système linéaire avec ce nouveau second membre, la matrice de rigidité étant inchangée.
- ➡ On détecte la convergence lorsque la condition d'optimalité est satisfaite à un seuil  $\epsilon > 0$  près

$$|h_n - \max(h_{min}, \min(h_{max}, h_n - \mu_n J'(h_n) + \ell_n))| \leq \epsilon \mu_n h_{max}.$$

## 5.4 Le cas auto-adjoint: la compliance

Lorsque  $j(u) = fu$ , on trouve que  $p = -u$  puisque  $j'(u) = f$ . Ce cas particulier est dit **auto-adjoint**.

On utilise l'énergie duale ou complémentaire

$$\int_{\Omega} f u \, dx = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega)^N \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ dans } \Omega}} \int_{\Omega} h^{-1} |\tau|^2 \, dx .$$

On peut alors réécrire le problème d'optimisation comme une **double minimisation**

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega)^N \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ dans } \Omega}} \int_{\Omega} h^{-1} |\tau|^2 \, dx ,$$

et l'ordre des deux minimisations est sans importance.

### 5.4.1 Un résultat d'existence

On réécrit le problème sous la forme

$$\inf_{(h,\tau) \in \mathcal{U}_{ad} \times H} \int_{\Omega} h^{-1} |\tau|^2 dx .$$

avec  $H = \{\tau \in L^2(\Omega)^N, -\operatorname{div}\tau = f \text{ dans } \Omega\}$ .

**Lemme 5.8.** La fonction  $\phi(a, \sigma) = a^{-1} |\sigma|^2$ , définie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ , est **convexe** et vérifie

$$\phi(a, \sigma) = \phi(a_0, \sigma_0) + \phi'(a_0, \sigma_0) \cdot (a - a_0, \sigma - \sigma_0) + \phi(a, \sigma - \frac{a}{a_0} \sigma_0),$$

où la dérivée est donnée par

$$\phi'(a_0, \sigma_0) \cdot (b, \tau) = -\frac{b}{a_0^2} |\sigma_0|^2 + \frac{2}{a_0} \sigma_0 \cdot \tau.$$

**Théorème 5.23.** Il existe une solution optimale au problème d'optimisation de formes.

### 5.4.2 Conditions d'optimalité

**Lemme 5.25.** Soit  $\tau \in L^2(\Omega)^N$ . Le problème

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \int_{\Omega} h^{-1} |\tau|^2 dx$$

admet un point de minimum  $h(\tau)$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$  qui vaut

$$h(\tau)(x) = \begin{cases} h^*(x) & \text{si } h_{min} < h^*(x) < h_{max} \\ h_{min} & \text{si } h^*(x) \leq h_{min} \\ h_{max} & \text{si } h^*(x) \geq h_{max} \end{cases} \quad \text{avec } h^*(x) = \frac{|\tau(x)|}{\sqrt{\ell}},$$

où  $\ell \in \mathbb{R}^+$  est le multiplicateur de Lagrange tel que  $\int_{\Omega} h(x) dx = h_0 |\Omega|$ .

**Preuve.** La fonction  $h \rightarrow \int_{\Omega} h^{-1} |\tau|^2 dx$  est convexe de  $\mathcal{U}_{ad}$  dans  $\mathbb{R}$  et on calcule facilement sa dérivée.

### 5.4.3 Algorithme numérique

#### Méthode de critère d'optimalité

1. Initialisation de l'épaisseur  $h_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ .
2. Itérations jusqu'à convergence, pour  $n \geq 0$ :

(a) Calcul de l'état  $\tau_n$ , solution unique de

$$\min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega)^N \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ dans } \Omega}} \int_{\Omega} h_n^{-1} |\tau|^2 dx ,$$

à l'aide de l'épaisseur précédente  $h_n$ .

(b) Mise à jour de l'épaisseur :

$$h_{n+1} = h(\tau_n),$$

où  $h(\tau)$  est le minimum défini par la formule d'optimalité. Le multiplicateur de Lagrange est calculé par dichotomie.

Remarquons que la minimisation en  $\tau$  est équivalente à la résolution de l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h_n \nabla u_n) = f & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et que l'on retrouve  $\tau_n$  par la formule

$$\tau_n = h_n \nabla u_n.$$

Cet algorithme s'interprète comme une minimisation alternative en  $\tau$  puis en  $h$  de la fonctionnelle. En particulier, on en déduit que la fonction objectif **décroit toujours** au cours des itérations

$$J(h_{n+1}) = \int_{\Omega} h_{n+1}^{-1} |\tau_{n+1}|^2 dx \leq \int_{\Omega} h_{n+1}^{-1} |\tau_n|^2 dx \leq \int_{\Omega} h_n^{-1} |\tau_n|^2 dx = J(h_n).$$

Cette algorithme s'interprète aussi comme une méthode de **critère d'optimalité**.

## 5.5 Approche discrète

Une discrétisation du problème est-elle plus simple ?

Par application d'une méthode d'éléments finis l'équation devient un système linéaire d'ordre  $n$

$$K(h)y(h) = b$$

où  $K(h)$  est la **matrice de rigidité** de la membrane (qui dépend de  $h$ ),  $b$  le second membre des forces  $f$ ,  $y(h)$  le vecteur des coordonnées de la solution  $u$  dans la base des éléments finis (de dimension  $n$ ). On discrétise aussi  $h$

$$\mathcal{U}_{ad}^{disc} = \left\{ h \in \mathbb{R}^n, \quad h_{max} \geq h_i \geq h_{min} > 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i h_i = h_0 |\Omega| \right\},$$

où  $\sum_{i=1}^n c_i h_i$  est une approximation de  $\int_{\Omega} h(x) dx$ .

Après approximation de la fonction coût, le problème discret est

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}^{disc}} \{ J^{disc}(h) = j^{disc}(y(h)) \},$$

où  $j^{disc}$  est une approximation (régulière) de  $j$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans le cas de la compliance

$$j^{disc}(y(h)) = b \cdot y(h) = K(h)^{-1} b \cdot b.$$

Dans le cas d'un critère quadratique pour approcher un déplacement cible

$$j^{disc}(y(h)) = B(y(h) - y_0) \cdot (y(h) - y_0).$$

**Question pratique:** comment calculer le gradient de  $J^{disc}(h)$  ?

**Applications:** condition d'optimalité, méthode numérique de minimisation.

Une fausse bonne idée

Formule explicite:  $y(h) = K(h)^{-1}b$ , donc

$$(J^{disc})'(h) = y'(h) (j^{disc})'(y(h)) \quad \text{avec} \quad y'(h) = -K(h)^{-1}K(h)'K(h)^{-1}b.$$

**Rappel:**  $f'(h) = (\partial f(h)/\partial h_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

**Inutilisable** car il faut résoudre  $n + 1$  systèmes linéaires de matrice  $K(h)$  pour obtenir toutes les composantes de  $y'(h)$ . Rappelons que  $K(h)$  est une très grande matrice (de taille  $n$ ) dont on ne calcule **jamais** l'inverse.

Par conséquent, **on n'utilise pas** la formule explicite  $y(h) = K(h)^{-1}b$ . On utilise plutôt une **méthode adjointe**.

Etat adjoint

On définit l'état adjoint  $p \in \mathbb{R}^n$  solution de

$$K(h)p(h) = - (j^{disc})' (y(h)).$$

En prenant le produit scalaire de  $K(h)y'(h) = -K'(h)y(h)$  par  $p(h)$  et celui de  $K(h)p(h) = - (j^{disc})' (y(h))$  par  $y'(h)$ , on obtient, pour chaque composante  $i$ ,

$$K(h)p(h) \cdot \frac{\partial y}{\partial h_i}(h) = - \frac{\partial K}{\partial h_i}(h)y(h) \cdot p(h) = - (j^{disc})' (y(h)) \cdot \frac{\partial y}{\partial h_i}(h),$$

d'où l'on déduit

$$(J^{disc})' (h) = K'(h)y(h) \cdot p(h) = \left( \frac{\partial K}{\partial h_i}(h)y(h) \cdot p(h) \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

En pratique, c'est cette formule que l'on utilise pour évaluer le gradient  $(J^{disc})' (h)$  puisqu'elle ne nécessite que deux résolutions de systèmes linéaires.

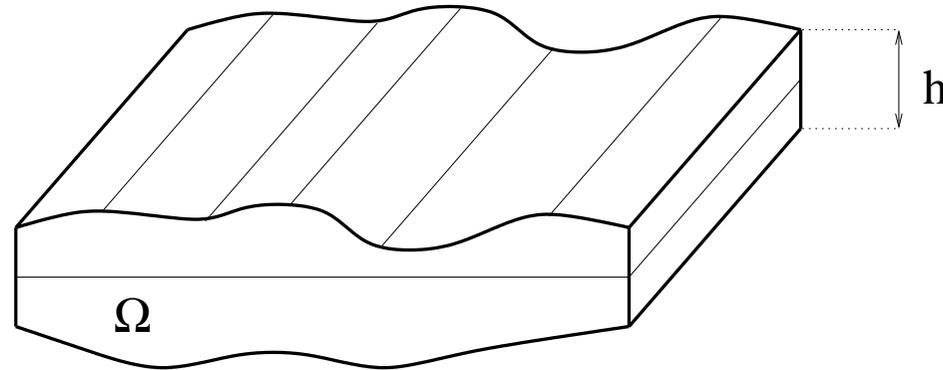
## Conclusion

**Il n'y a pas de simplification à utiliser une approche discrète plutôt que continue.**

Certains auteurs préfèrent **discrétiser d'abord, optimiser ensuite**. Cela garantit une parfaite compatibilité mais cela nécessite une parfaite connaissance du solveur numérique (quasi impossible si on n'a pas écrit soi-même le code !).

Ici, on suit l'autre philosophie **optimiser en continu puis discrétiser**. C'est beaucoup plus simple ! On ne perd rien en précision si on choisit bien ses espaces d'éléments finis.

## 5.6 Optimisation de l'épaisseur d'une plaque élastique



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma = 2\mu h e(u) + \lambda h \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right.$$

avec  $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ , le tenseur des déformations.

Ensemble des épaisseurs admissibles:

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ h \in L^\infty(\Omega) , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega, \int_{\Omega} h(x) dx = h_0 |\Omega| \right\} .$$

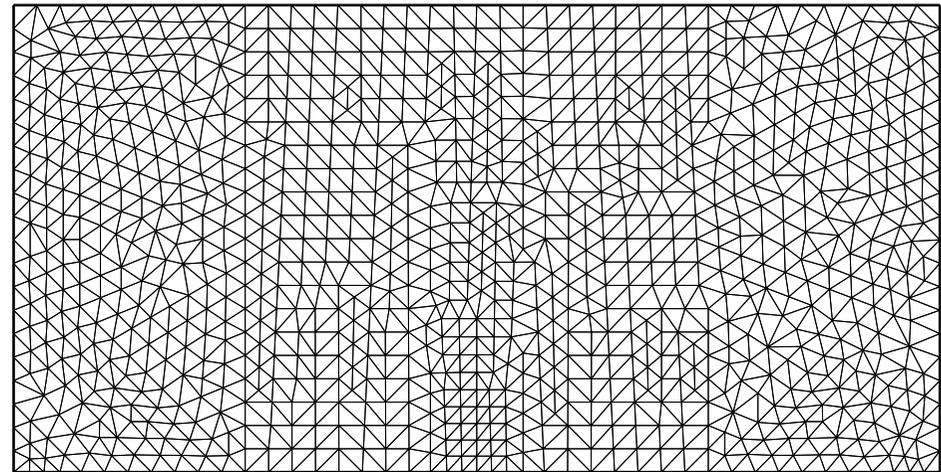
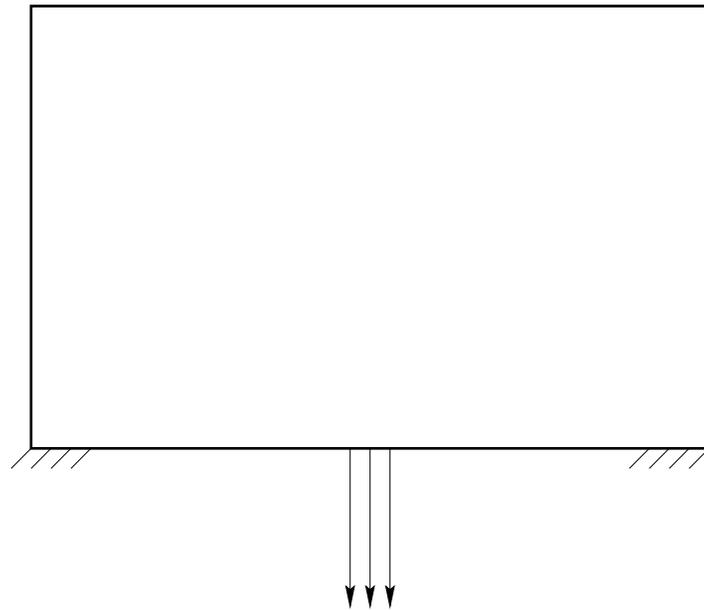
Le problème d'optimisation de la compliance s'écrit

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) = \int_{\Omega} f \cdot u dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds.$$

Les résultats théoriques sont les mêmes.

On applique l'algorithme du critère d'optimalité.

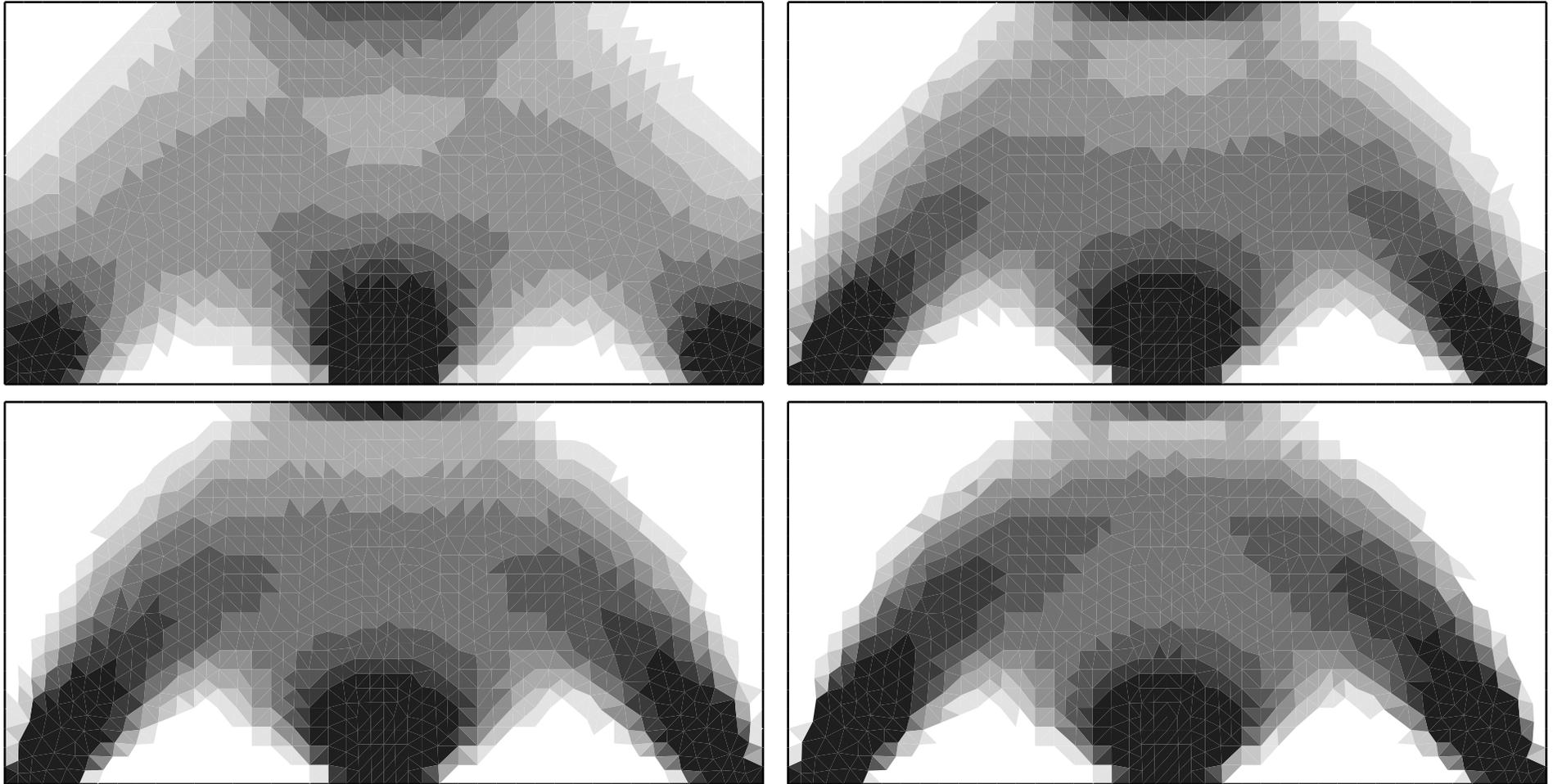
## Conditions aux limites et maillage pour une plaque élastique



Calculs FreeFem++ ; programmes disponibles sur la page web

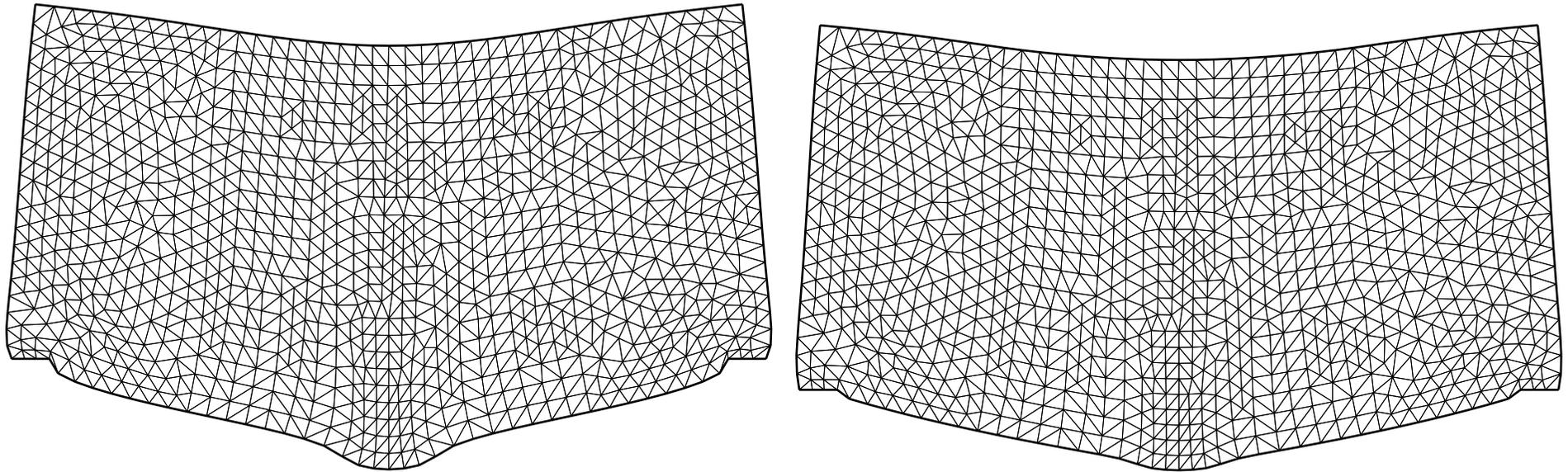
[http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours\\_X\\_annee3.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee3.html)

Épaisseur aux itérations 1, 5, 10, 30 (initialisation uniforme).

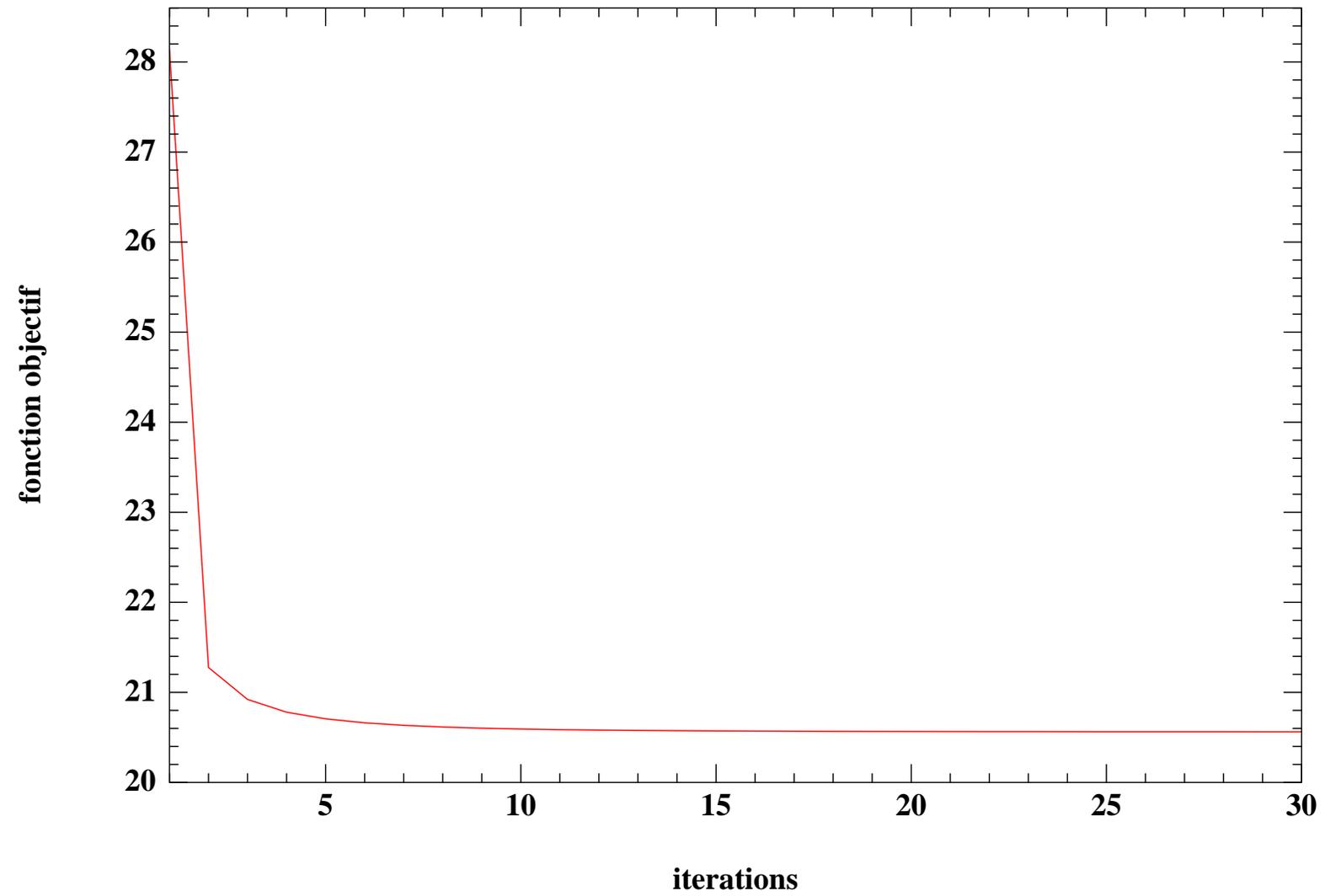


$h_{min} = 0.1$ ,  $h_{max} = 1.0$ ,  $h_0 = 0.5$  (épaisseur croissante du blanc au noir)

## Comparaison des déformées initiale et finale

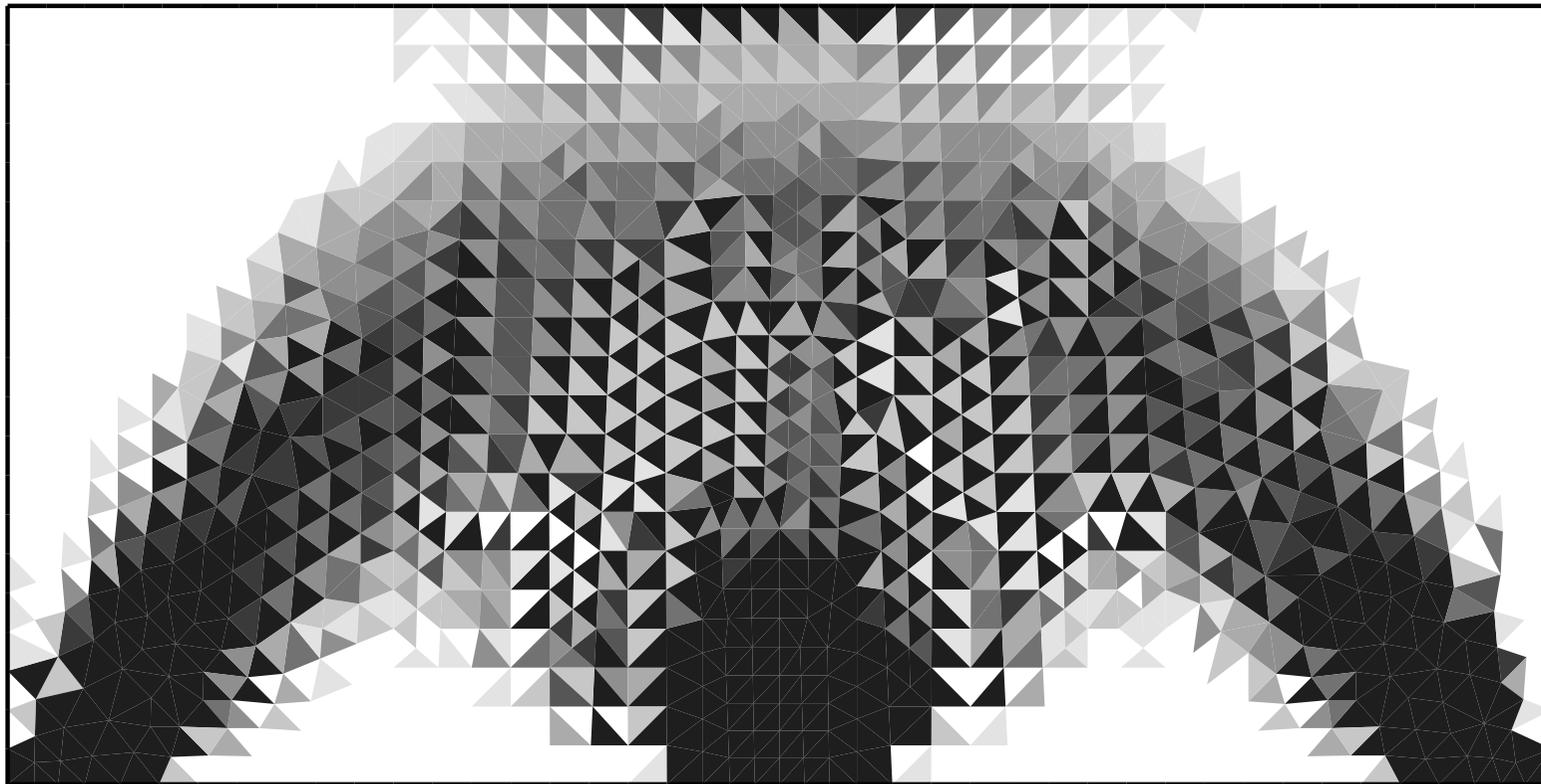


## Courbe de convergence



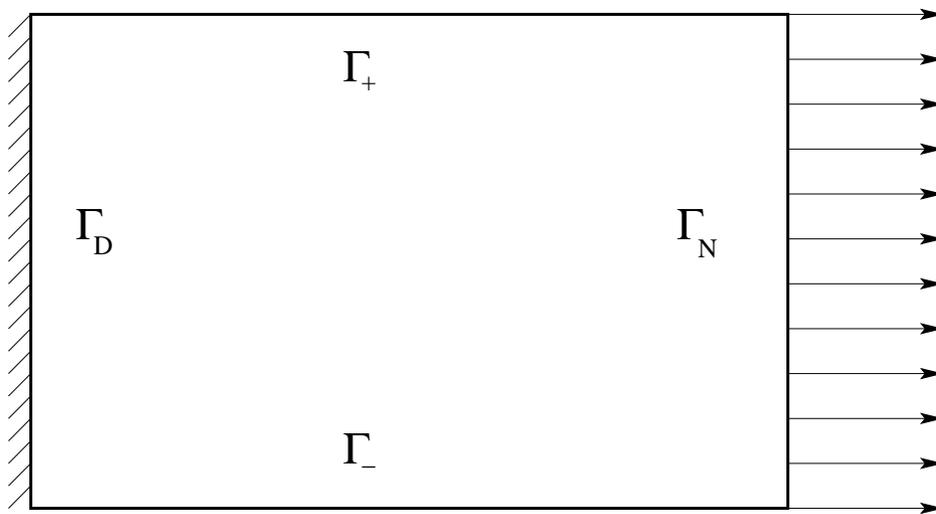
## Instabilités numériques (checkerboards)

- ➔ Éléments finis  $P2$  pour  $u$  et  $P0$  pour  $h \Rightarrow$  OK
- ➔ Éléments finis  $P1$  pour  $u$  et  $P0$  pour  $h \Rightarrow$  instable !

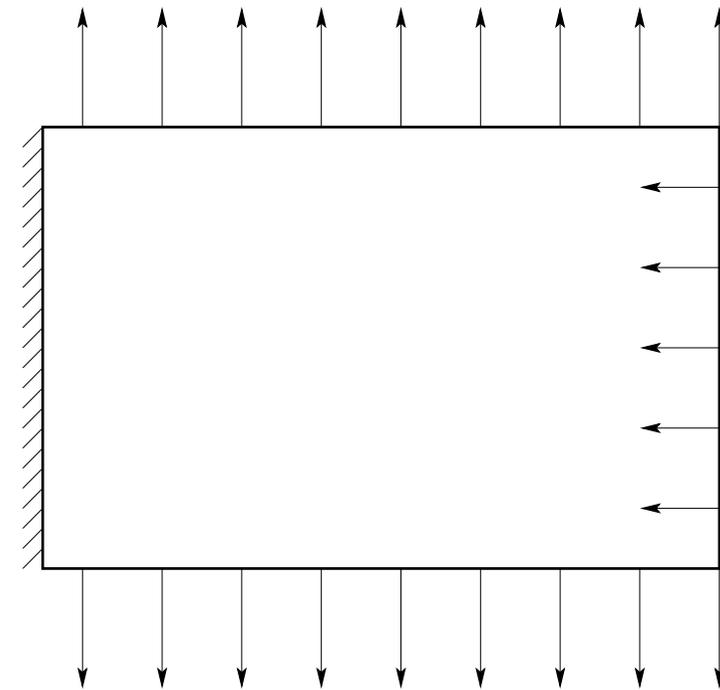


## Contre-exemple numérique à l'existence d'une forme optimale (en élasticité)

On cherche la forme qui se déforme horizontalement le moins possible et verticalement le plus possible.

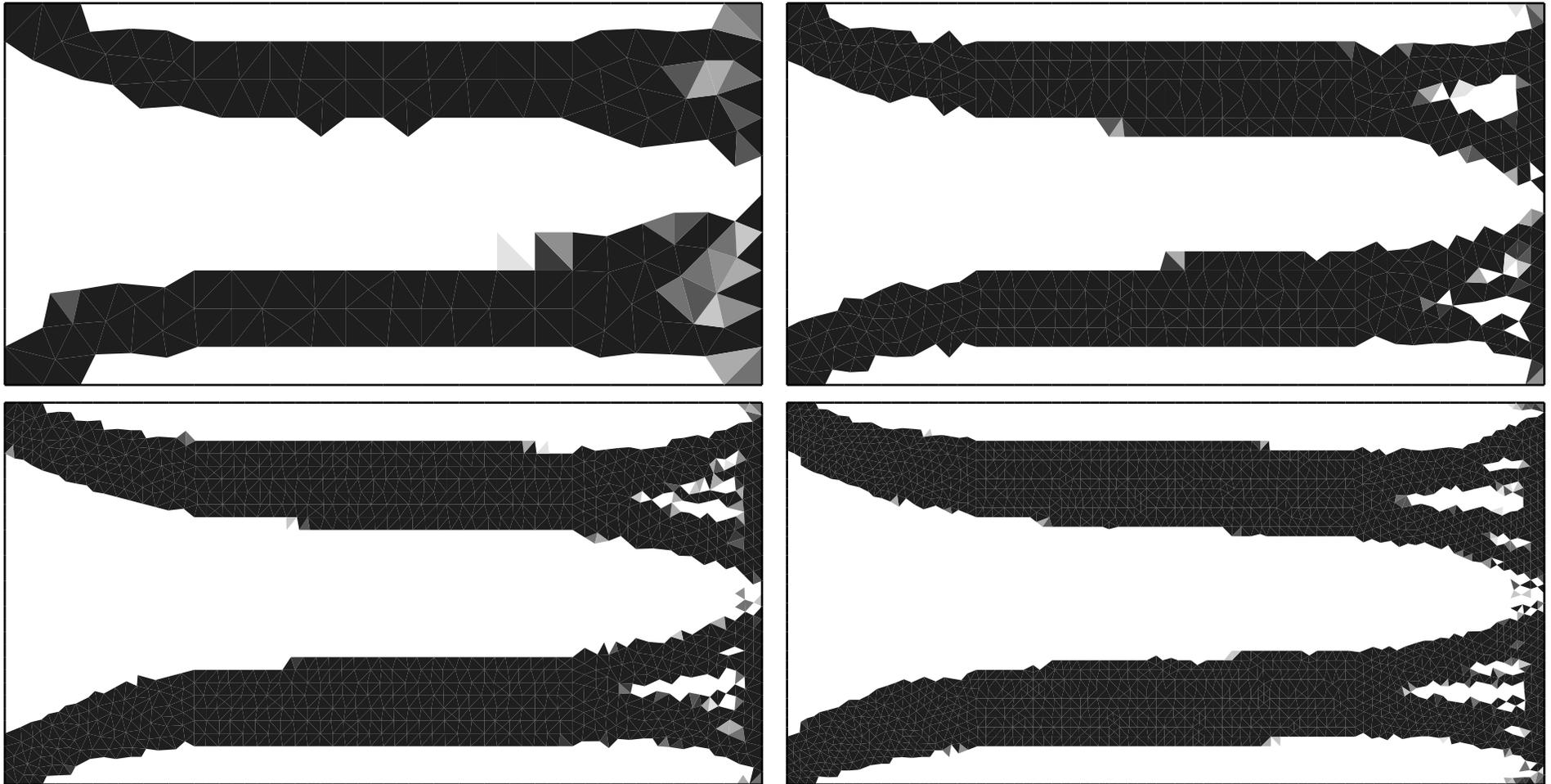


conditions aux limites



déplacement cible

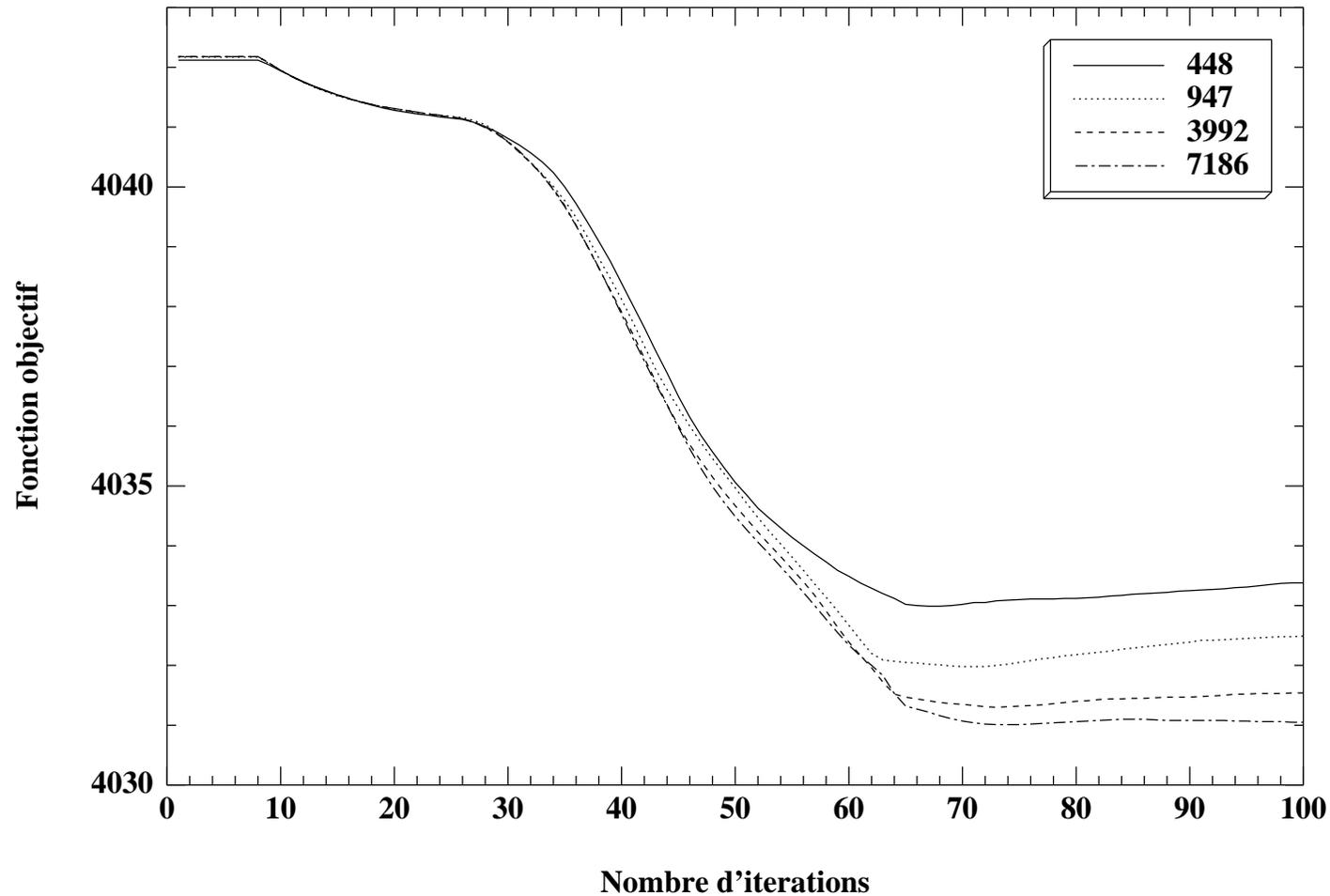
Formes optimales pour les maillages à 448, 947, 3992, 7186 triangles



## Pas de convergence par raffinement de maillage !

De plus en plus de détails apparaissent quand le pas du maillage diminue.

La valeur de la fonction objectif diminue avec le pas.



## 5.6.4 Régularisation

### Triple motivation:

- ➔ Eviter les instabilités en utilisant les éléments finis  $P1$  pour  $u$  et  $P0$  pour  $h$  (moins cher que  $P2-P0$ ).
- ➔ Obtenir un algorithme qui converge par raffinement de maillage.
- ➔ Revenir au cadre “régularisé” de la section 5.2.3 (avec **existence** de solutions optimales).

**Idée principale:** on change le produit scalaire.

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla p \, dx \quad \forall k \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Précédemment on identifiait  $\mathcal{U}_{ad}$  à un sous-espace de  $L^2(\Omega)$ , donc

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_{\Omega} J'(h) k \, dx \quad \Rightarrow \quad J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p .$$

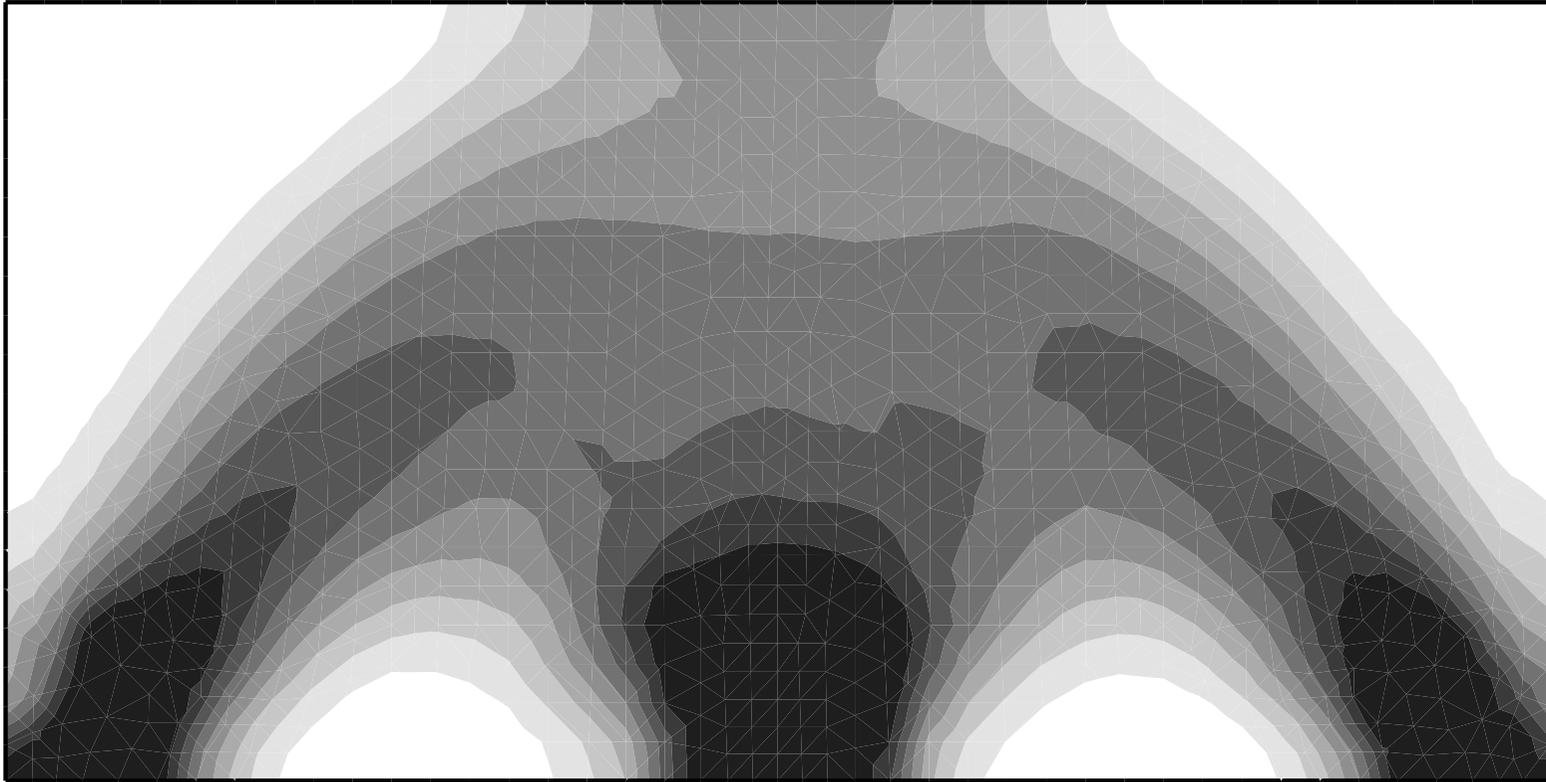
Si maintenant on identifie un ensemble admissible “régularisé”  $\mathcal{U}_{ad}^{reg}$  à un sous-espace de  $H^1(\Omega)$ , on a

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_{\Omega} (\nabla J'(h) \cdot \nabla k + J'(h)k) \, dx ,$$

et l'on en déduit la nouvelle formule du gradient

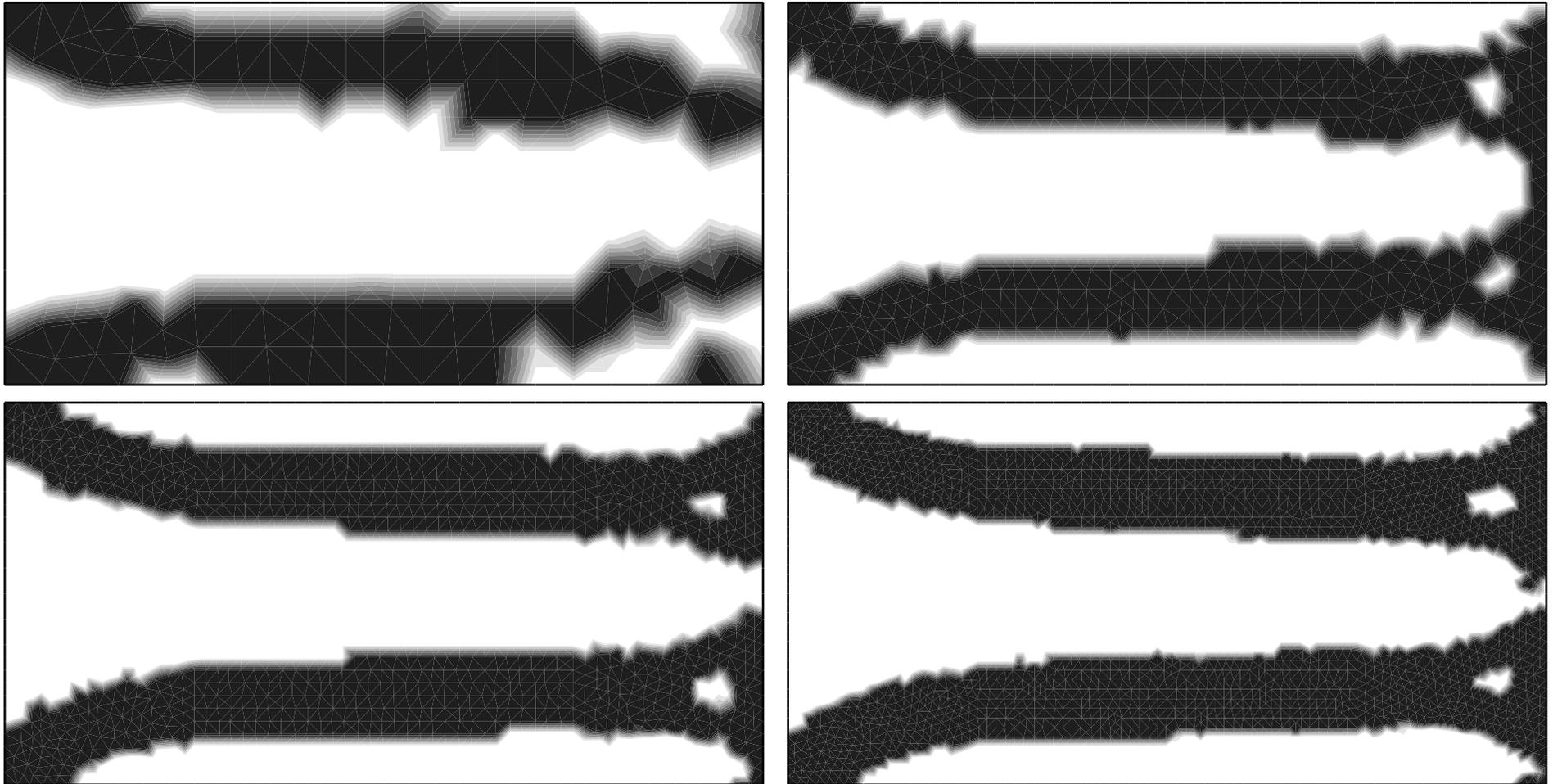
$$\begin{cases} -\Delta J'(h) + J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial J'(h)}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

## Forme optimale régularisée



Eléments finis  $P_1$ - $P_0$ . Minimisation de la compliance. Algorithme des directions alternées.

## Convergence par raffinement de maillage



Cas test du “contre-exemple numérique” (maillages 448, 947, 3992, 7186).

## Conclusion

- ➡ Ça marche !
- ➡ Ça coûte plus cher (résolution du Laplacien pour calculer le gradient).
- ➡ Difficulté dans le choix du paramètre de régularisation  $\epsilon > 0$

$$-\epsilon \Delta J'(h) + J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p \quad \text{dans } \Omega$$

- ➡ Ça lisse les “petits” détails.