CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

G. ALLAIRE

10 Février 2010

CHAPITRE VII

OPTIMISATION TOPOLOGIQUE PAR HOMOGENEISATION

Pourquoi l'optimisation topologique

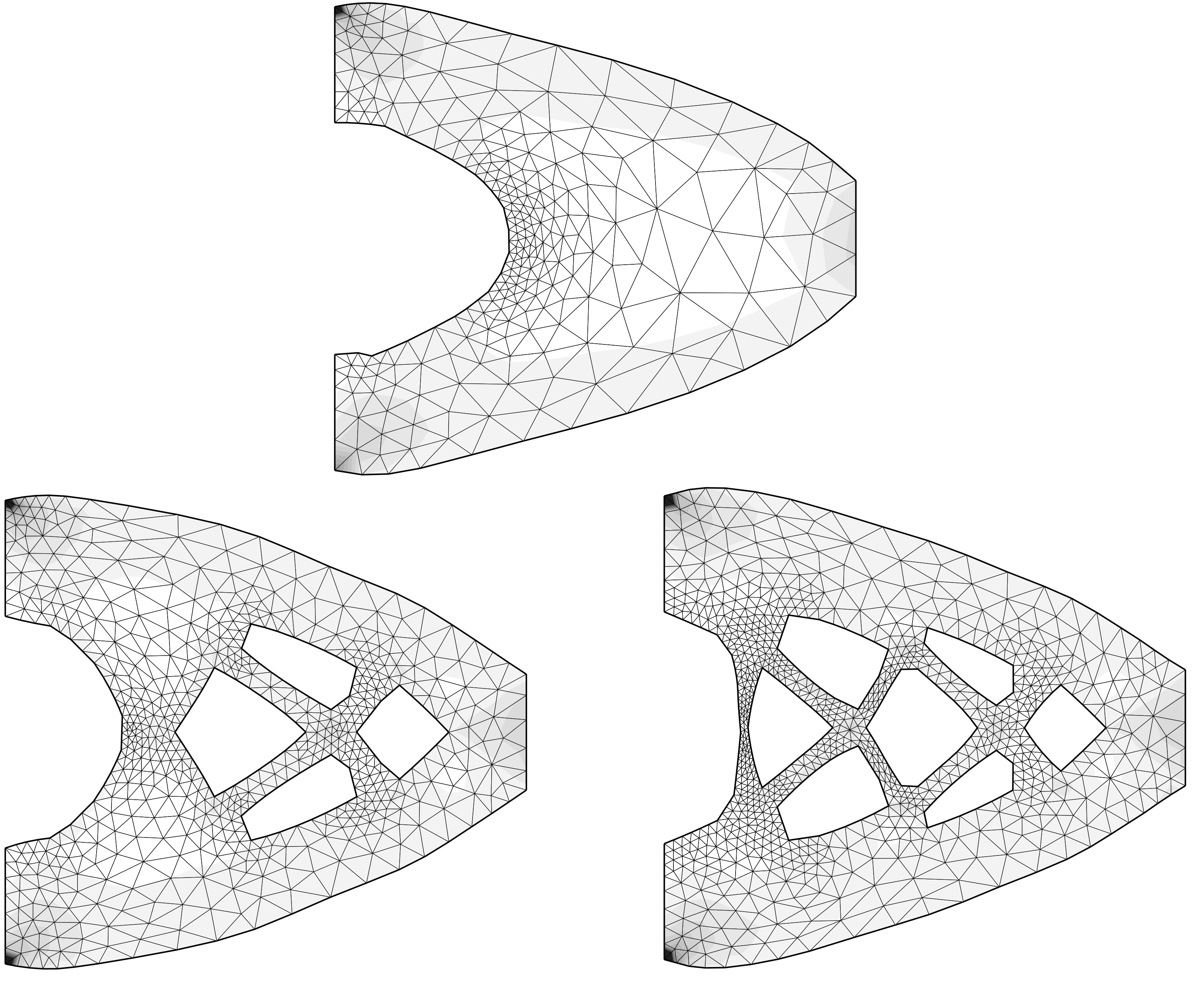
Inconvénients de l'approche d'optimisation géométrique:

- ☞ pas de variation de la topologie,
- ☞ nombreux minima locaux,
- ☞ coût du remaillage,
- ☞ problème mal-posé: non-existence de solutions optimales (en l'absence de contraintes). Ca se voit numériquement !

Optimisation topologique: on optimise la position des frontières mais aussi la topologie de la forme (i.e. le nombre de trous en 2-d).

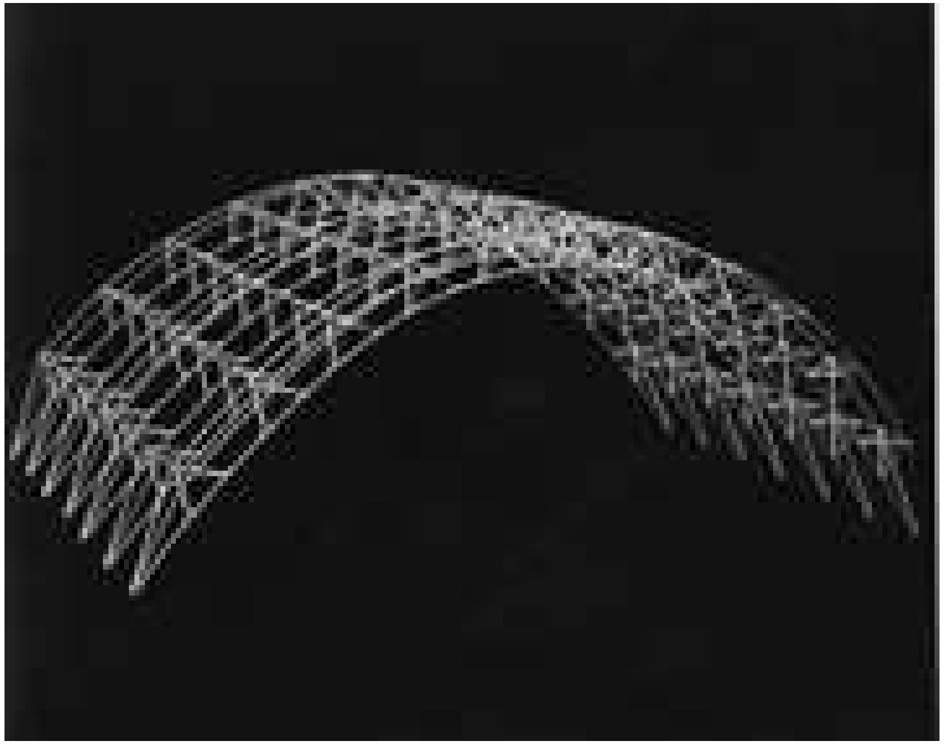
Deux méthodes (parmi d'autres):

- ➪ méthode d'homogénéisation,
- ➪ approche évolutionnaire, algorithmes génétiques (dernier amphi par Marc Schoenauer).



The art of structure is where to put the holes.

Robert Le Ricolais, architecte et ingénieur, 1894-1977



Principe de la méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation est une méthode de "relaxation": elle rend les problèmes bien posés en élargissant l'espace des formes admissibles.

On introduit des formes "généralisées" mais pas trop... On exige que les formes généralisées soient les "limites" des suites minimisantes de formes classiques.

Rappel sur le contre-exemple de la Section 6.2.1: les suites minimisantes de formes ont tendance à fabriquer des mélanges fins de matière et de vide.

L'homogénéisation autorise comme formes admissibles des **matériaux composites** obtenus par microperforation de la matière.

Notations

☞ On représente une forme classique par une fonction caractéristique

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ dans la forme,} \\ 0 \text{ dans les trous.} \end{cases}$$

☞ Désormais, les trous peuvent être microscopiques autant que macroscopiques $\Rightarrow$ matériaux composites !

☞ On représente une forme généralisée par une densité de matière $\theta(x) \in [0,1]$, et une microstructure (ou forme des trous).

☞ La forme des trous est importante ! Elle induit une nouvelle variable d'optimisation qui est le comportement effectif $A^*(x)$ du matériau composite (déterminé par homogénéisation).

☞ (θ, A^*) sont les deux variables d'optimisation.

7.1.2 Problème modèle

Principe: on remplace les “trous” avec bords libres (Neumann) par un matériau faible $\alpha << \beta$.

Membrane à deux épaisseurs $h_\chi(x) = \alpha\chi(x) + \beta(1-\chi(x))$, avec

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^\infty\left(\Omega; \{0,1\}\right), \int_\Omega \chi(x)\,dx = V_\alpha \right\}.$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ est la force appliquée, le déplacement vérifie

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(h_\chi \nabla u_\chi\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème d’optimisation de la forme d’une membrane s’écrit ici

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi),$$

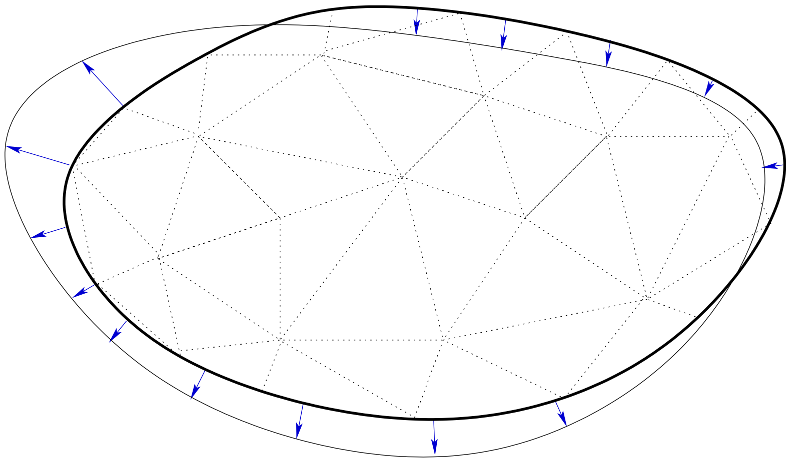
avec

$$J(\chi) = \int_\Omega f u_\chi\,dx, \quad \text{ou} \quad J(\chi) = \int_\Omega |u_\chi - u_0|^2 dx.$$

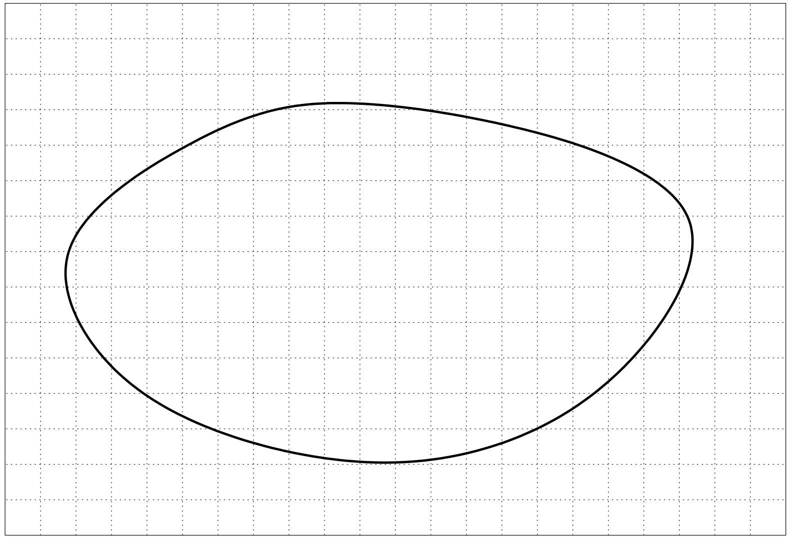
Buts de la méthode d'homogénéisation

- ☞ Introduire la notion de forme généralisée qui est faite de matériau composite.
- ☞ Montrer que ces formes généralisées sont limites de suites de formes classiques (à préciser).
- ☞ Calculer la fonction objectif généralisée et son gradient.
- ☞ Démontrer un théorème d'existence de forme généralisée optimale (ce n'est pas l'objectif du cours).
- ☞ Construire de nouveaux algorithmes numériques d'optimisation topologique (c'est le but du cours).

Algorithmes de **capture de formes**, alors que l'optimisation géométrique donnait lieu à des algorithmes de **suivi de formes**.

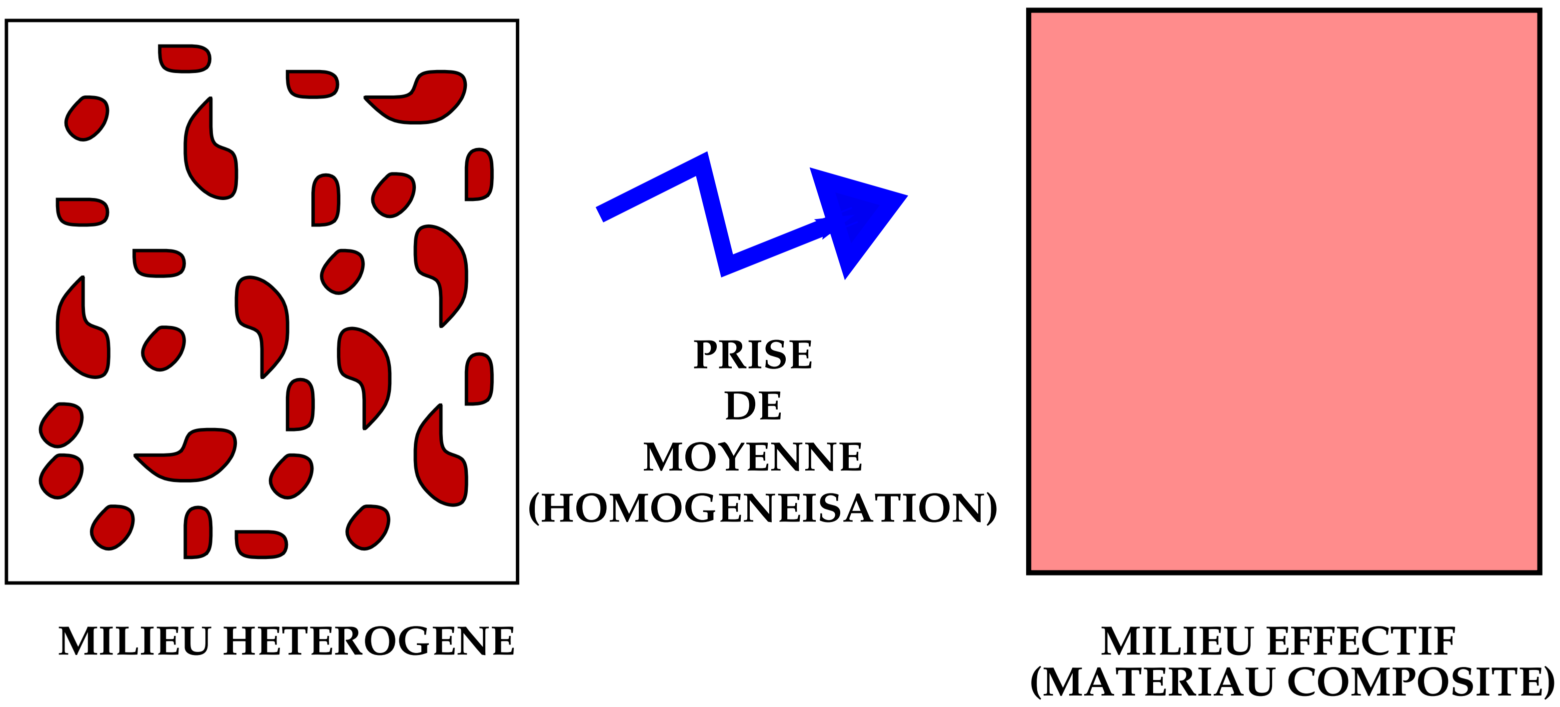


Suivi de formes



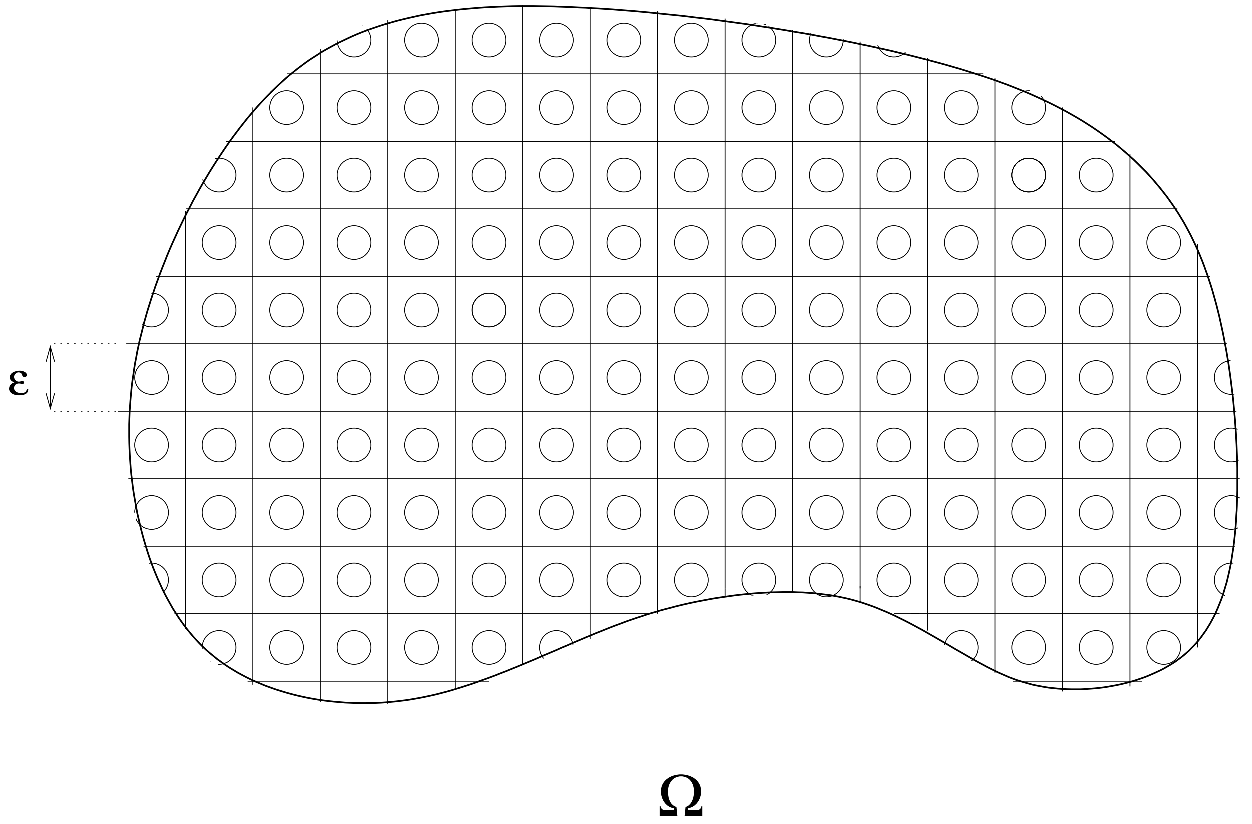
Capture de formes

7.2 Homogénéisation



- Méthode de moyennisation dans les équations aux dérivées partielles.
- Recherche de paramètres moyens (ou effectifs, homogénéisés, équivalents, macroscopiques) pour un milieu hétérogène.

Homogénéisation périodique



Plusieurs approches ou méthodes existent: on décrit ici la plus simple, à savoir l'homogénéisation périodique.

Hypothèse: le milieu hétérogène considéré est périodique.

Homogénéisation périodique (suite)

- ☞ Rapport de la période sur la taille caractéristique de la structure $= \epsilon$.
- ☞ Bien que, pour le problème considéré, il n'y ait qu'une seule valeur physique ϵ_0 du paramètre ϵ, on considère une suite de problèmes avec ϵ de plus en plus petit.
- ☞ On fait une analyse asymptotique quand ϵ tend vers 0.
- ☞ On approchera le "vrai problème" $(\epsilon = \epsilon_0)$ par le problème limite obtenu quand $\epsilon \to 0$.

Problème modèle: membrane élastique en matériau composite

Par exemple: fibres distribuées périodiquement dans une matrice de résine.

Loi de Hooke variable: $A(y)$ fonction Y-périodique, avec $Y = (0,1)^N$.

$$A(y + e_i) = A(y) \quad \forall e_i \ i\text{-ème vecteur de la base canonique.}$$

On remplace y par $\frac{x}{\epsilon}$:

$$x \rightarrow A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ périodique de période } \epsilon \text{ dans toutes les directions.}$$

Domaine borné Ω, force $f(x)$, déplacement u_ϵ solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Un calcul direct de u_ϵ peut être très cher (car il faut un maillage de taille $h < \epsilon$), donc on cherche les valeurs moyennes de u_ϵ.

Développements asymptotiques à deux échelles

On suppose que

$$u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right),$$

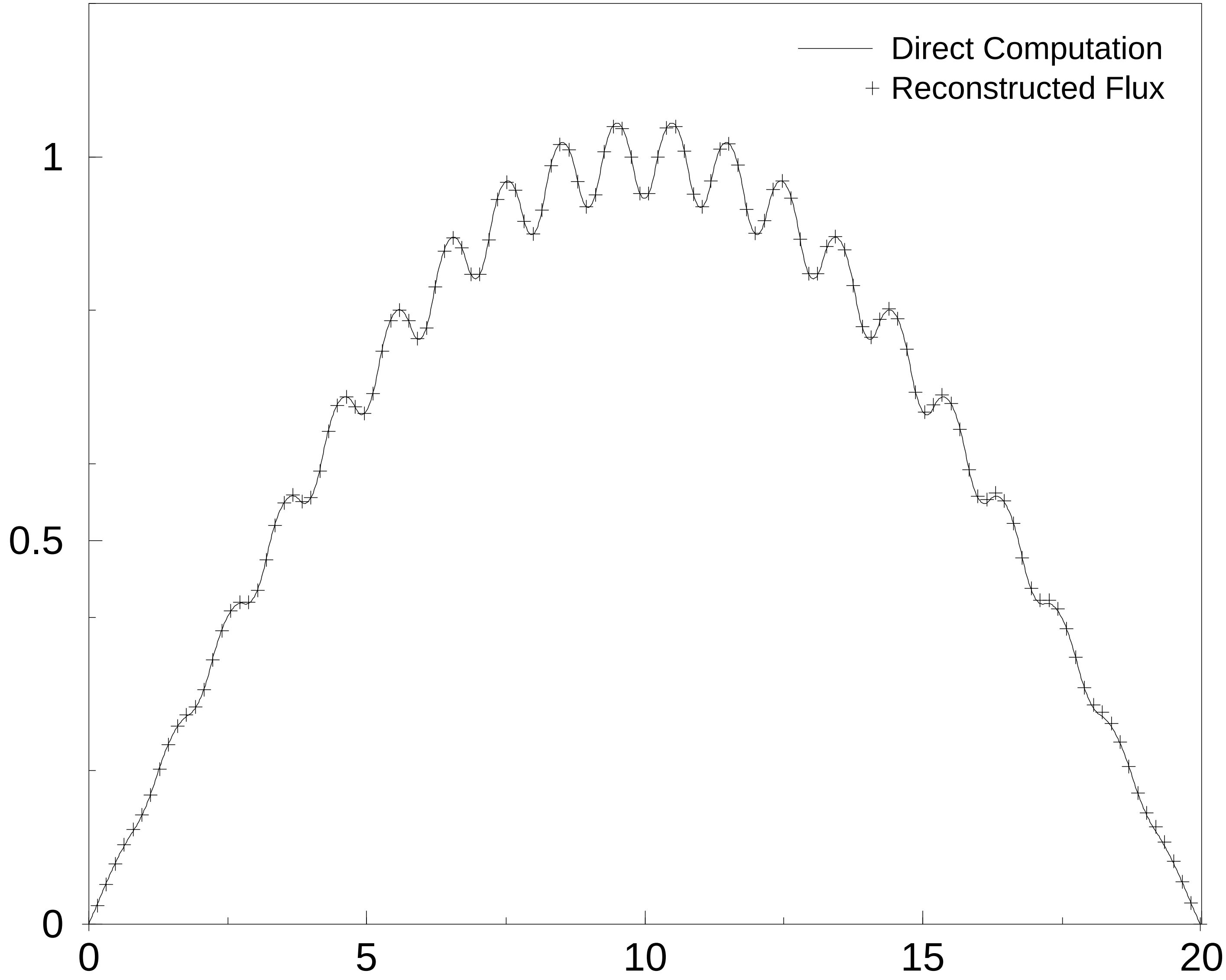
avec $u_i(x, y)$ fonction de deux variables x et y, périodique en y de période $Y = (0, 1)^N$. On injecte cette série dans l'équation et on utilise la règle

$$\nabla\left(u_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\right) = \left(\epsilon^{-1}\nabla_y u_i + \nabla_x u_i\right)\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right).$$

On a donc

$$\nabla u_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\nabla_y u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \left(\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i\right)\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right).$$

Allure typique de la fonction $x \to u_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)$



L'équation devient une série en ϵ

$$-\epsilon^{-2}\left[\mathrm{div}_y\big(A\nabla_y u_0\big)\right]\left(x,\frac{x}{\epsilon}\right)$$

$$-\epsilon^{-1}\left[\mathrm{div}_y\big(A(\nabla_x u_0+\nabla_y u_1)\big)+\mathrm{div}_x\big(A\nabla_y u_0\big)\right]\left(x,\frac{x}{\epsilon}\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{+\infty}\epsilon^{i}\left[\mathrm{div}_x\big(A(\nabla_x u_i+\nabla_y u_{i+1})\big)+\mathrm{div}_y\big(A(\nabla_x u_{i+1}+\nabla_y u_{i+2})\big)\right]\left(x,\frac{x}{\epsilon}\right)$$

$$= f(x).$$

- ☞ On identifie chaque puissance de ϵ.
- ☞ On remarque que $\phi\left(x,\frac{x}{\epsilon}\right)=0\ \forall x,\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad \phi(x,y)\equiv 0\ \forall x,y.$
- ☞ Seuls les 3 premiers termes de la série seront importants.

On commence par un lemme technique.

Lemme 7.4. Soit $g \in L^2(Y)$. L'équation

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y \left(A(y)\nabla_y v(y)\right) = g(y) \text{ dans } Y \\ y \to v(y) \ Y\text{-périodique} \end{cases}$$

admet une unique solution $v \in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\int_Y g(y)\, dy = 0.$$

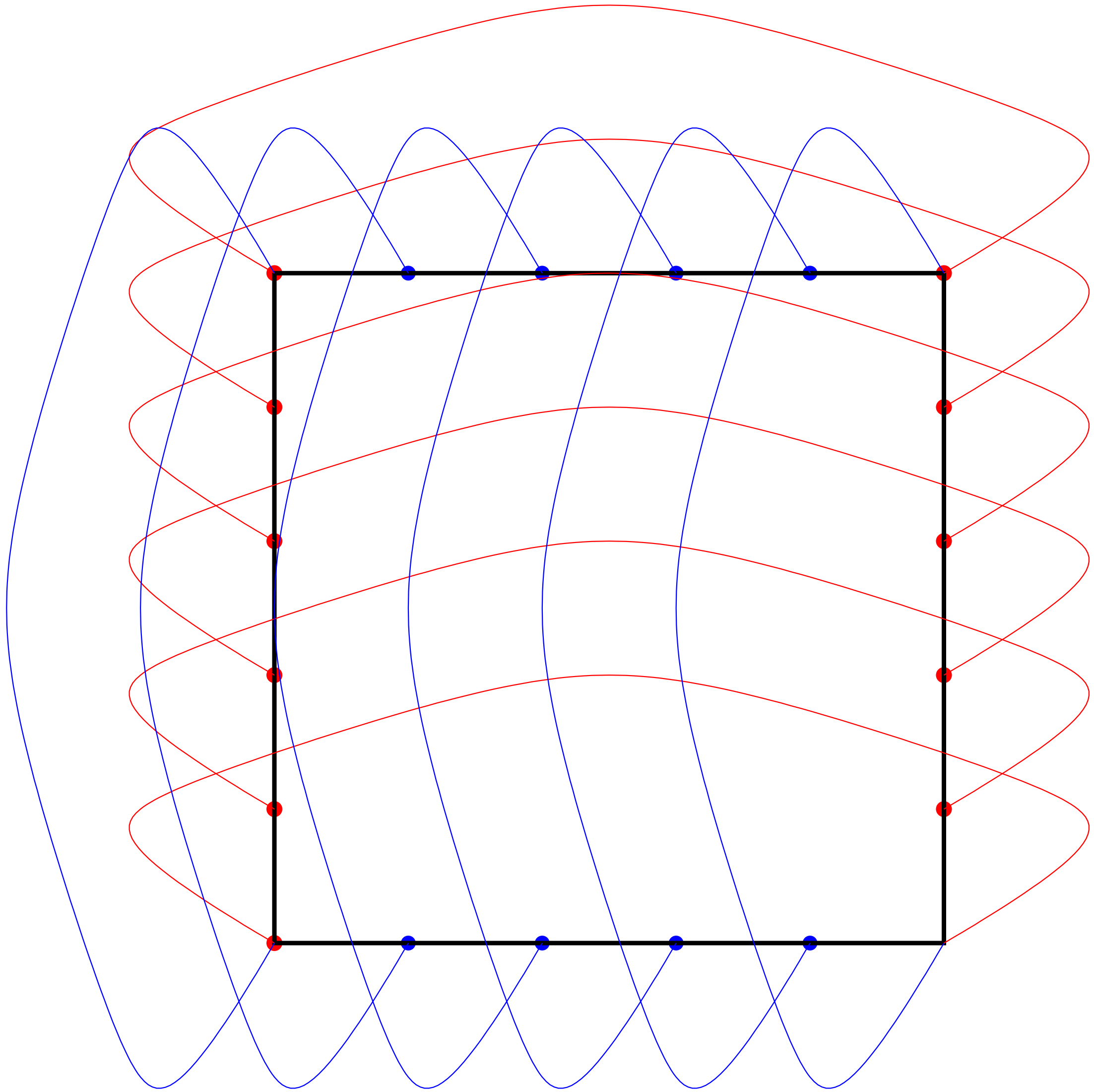
Preuve. Vérifions qu'il s'agit d'une condition nécessaire d'existence. On intégre l'équation sur Y

$$\int_Y \mathrm{div}_y \Big(A(y)\nabla_y v(y)\Big) dy = \int_{\partial Y} A(y)\nabla_y v(y) \cdot n\, ds = 0$$

à cause des conditions aux limites de périodicité: $A(y)\nabla_y v(y)$ est périodique et la normale n change de signe sur des cotés opposés de Y.

La condition suffisante s'obtient par application du Théorème de Lax-Milgram dans $H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$.

Condition aux limites de périodicité dans $H^1_\#(Y)$



Equation en ϵ^{-2}:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_y u_0(x,y) \right) = 0 \text{ dans } Y \\ y \to u_0(x,y) \; Y\text{-périodique} \end{cases}$$

Il s'agit d'une e.d.p. en y (x n'est qu'un paramètre).

Par unicité de la solution (à une constante près), on en déduit

$$\boxed{u_0(x,y) \equiv u(x)}$$

Equation en ϵ^{-1}:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_y u_1(x,y) \right) = \mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_x u(x) \right) \ \text{ dans } Y \\ y \rightarrow u_1(x,y) \ Y\text{-périodique} \end{cases}$$

La CNS d'existence est vérifiée. Donc u_1 dépend linéairement de $\nabla_x u(x)$.

On introduit les problèmes de cellule

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y \left(A(y) \left(e_i + \nabla_y w_i(y) \right) \right) = 0 & \text{dans } Y \\ y \rightarrow w_i(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

avec $\left(e_i\right)_{1 \leq i \leq N}$ base canonique de $\mathbb{R}^N$. On a

$$\boxed{u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y)}$$

Equation en ϵ^0:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
-\mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_2(x,y)\right) = \mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_x u_1\right) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{div}_x\left(A(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u)\right) + f(x) \text{ dans } Y \\
y \to u_2(x,y)\ Y\text{-périodique}
\end{array}
\right.
$$

CNS d'existence et d'unicité de la solution u_2:

$$
\int_Y \Big(\mathrm{div}_y\big(A(y)\nabla_x u_1\big) + \mathrm{div}_x\big(A(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u)\big) + f(x)\Big) dy = 0
$$

On remplace u_1 par sa valeur en fonction de $\nabla_x u(x)$

$$
\mathrm{div}_x \int_Y A(y) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \nabla_y w_i(y) + \nabla_x u(x) \right) dy + f(x) = 0
$$

et on trouve le problème homogénéisé

$$
\left\{
\begin{array}{l}
-\mathrm{div}_x\left(A^* \nabla_x u(x)\right) = f(x) \text{ dans } \Omega \\
u = 0 \text{ sur } \partial\Omega
\end{array}
\right.
$$

Tenseur homogénéisé:

$$A^*_{ji} = \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y w_i) \cdot e_j \, dy,$$

ou bien, par intégration par parties

$$A^*_{ji} = \int_Y A(y) \left(e_i + \nabla_y w_i(y)\right) \cdot \left(e_j + \nabla_y w_j(y)\right) dy.$$

En effet, le problème de cellule donne

$$\int_Y A(y) \left(e_i + \nabla_y w_i(y)\right) \cdot \nabla_y w_j(y) \, dy = 0.$$

- La formule pour A^* n'est pas totalement explicite car il faut résoudre les problèmes de cellule.
- A^* ne dépend ni de Ω, ni de f, ni des conditions aux limites.
- **Le tenseur A^* caractérise la microstructure.**
- On verra des exemples de calcul de A^* plus tard.

On peut démontrer:

$$u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon\, u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + r_\epsilon \quad \text{avec} \quad \|r_\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\epsilon^{1/2}$$

En particulier

$$\boxed{\|u_\epsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\epsilon^{1/2}}$$

Le correcteur n'est pas négligeable pour les déformations ou les contraintes

$$\nabla u_\epsilon(x) = \nabla_x u(x) + (\nabla_y u_1)\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + t_\epsilon \quad \text{avec} \quad \|t_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\epsilon^{1/2}$$

$$A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon(x) = A^*\nabla_x u(x) + (\nabla_y \tau)\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + s_\epsilon \quad \text{avec} \quad \|s_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\epsilon^{1/2}$$

$$\int_\Omega A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon \, dx = \int_\Omega A^*\nabla u \cdot \nabla u \, dx + o(1)$$

Parenthèse: développement asymptotique des contraintes

On suppose que

$$u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad \text{et} \quad \sigma_\epsilon(x) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \sigma_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right),$$

avec $\sigma_i(x, y)$ fonction de deux variables x et y, périodique en y de période $Y = (0, 1)^N$. On injecte cette série dans l'équation et on trouve

$$-\mathrm{div}_y \sigma_0 = 0, \quad -\mathrm{div}_x \sigma_0 - \mathrm{div}_y \sigma_1 = f.$$

D'autre part,

$$\sigma_0(x, y) = A(y) \left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)\right)$$

et

$$\sigma_0(x, y) = A^* \nabla_x u(x) + \tau(x, y) \quad \text{avec} \quad \int_Y \tau \, dy = 0.$$

(On peut montrer que τ est la solution du problème de cellule dual.)

Mélange de deux phases

On mélange deux constituants isotropes $A(y) = \alpha\chi(y) + \beta(1 - \chi(y))$ avec une fonction charactéristique $\chi(y) = 0$ ou 1.

On note $\theta = \displaystyle\int_Y \chi(y)\, dy$ la fraction volumique de la phase α et $(1 - \theta)$ celle de la phase β.

Définition 7.6. On note G_θ l'ensemble de toutes les tenseurs homogénéisés A^* obtenus par homogénéisation des phases α et β en proportions θ et $(1-\theta)$.

On a $G_0 = \{\beta\}$ et $G_1 = \{\alpha\}$.

Mais en général, G_θ est un ensemble (assez gros) de tenseurs (correspondant à différents choix de $\chi(y)$).

Cas non périodique

L'homogénéisation fonctionne aussi pour les milieux non périodiques.

Soit $\chi_\epsilon(x)$ une suite de fonctions caractéristiques ($\epsilon \neq$ période).

Pour $A_\epsilon(x) = \alpha\chi_\epsilon(x) + \beta\,(1 - \chi_\epsilon(x))$ et $f \in L^2(\Omega)$ on considère

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 7.7. Il existe une sous-suite, une densité $0 \leq \theta(x) \leq 1$ et un tenseur homogénéisé $A^*(x)$ tels que χ_ϵ converge en moyenne (faiblement) vers θ, A_ϵ **converge au sens de l'homogénéisation** vers A^*, i.e., $\forall f \in L^2(\Omega)$, u_ϵ converge dans $L^2(\Omega)$ vers la solution u du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A^*(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus, pour tout $x \in \Omega$, $A^*(x)$ appartient à $G_{\theta(x)}$, introduit plus haut.

Parenthèse: convergence en moyenne ou faible

Soit $\chi_\epsilon(x)$ une suite de fonctions caractéristiques, $\chi_\epsilon \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})$.

Soit $\theta(x)$ une densité, $\theta \in L^\infty(\Omega; [0,1])$.

On dit que χ_ϵ converge en moyenne (faiblement) vers θ, et on note $\chi_\epsilon \rightharpoonup \theta$, si

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \chi_\epsilon(x)\phi(x)\, dx = \int_\Omega \theta(x)\phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Lemme. Pour toute suite χ_ϵ de fonctions caractéristiques, il existe une sous-suite et une densité limite θ telle que la sous-suite converge en moyenne vers cette limite.

Remarque. On peut remplacer $C_c^\infty(\Omega)$ par $L^1(\Omega)$ ou par l'ensemble des fonctions caractéristiques dans Ω...

Application à l'optimisation de formes

Soit χ_ϵ une suite (minimisante ou pas) de fonctions caractéristiques. On applique le résultat précédent

$$\chi_\epsilon(x) \rightharpoonup \theta(x) \quad A_\epsilon(x) \overset{H}{\rightharpoonup} A^*(x)$$

$$J(\chi_\epsilon) = \int_\Omega j(u_\epsilon)\,dx \to \int_\Omega j(u)\,dx = J(\theta, A^*),$$

avec u solution de l'équation d'état homogénéisée est

$$\begin{cases} -\text{div}\,(A^*\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En particulier, la fonction objectif ne change pas dans les cas:

$$J(\theta, A^*) = \int_\Omega f u\,dx, \quad \text{ou} \quad J(\theta, A^*) = \int_\Omega |u - u_0|^2 dx.$$

Formulation homogénéisée de l'optimisation de formes

On introduit donc un ensemble admissible de formes homogénéisées

$$\mathcal{U}^*_{ad} = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty \left(\Omega; [0,1] \times \mathbb{R}^{N^2} \right), A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ dans } \Omega, \int_\Omega \theta(x)\, dx = V_\alpha \right\}.$$

Le problème d'optimisation relaxé ou homogénéisé s'écrit

$$\inf_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}^*_{ad}} J(\theta, A^*).$$

- $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}^*_{ad}$ quand $\theta(x) = \chi(x) = 0, 1$.
- On a élargit l'ensemble des formes admissibles.
- On peut montrer que ce problème admet toujours une solution optimale.
- Il existe des algorithmes numériques très performants pour calculer les formes homogénéisées optimales.
- L'homogénéisation ne change pas le problème: les formes homogénéisées sont seulement la caractérisation des suites minimisantes de formes classiques

$$\lim_{\epsilon \to 0} J\left(\chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) = J(\theta, A^*).$$

- Il nous faut trouver une caractérisation explicite de l'ensemble G_θ.

7.3 Matériaux composites

Etude théorique des matériaux composites:

- En dimension $N = 1$: formule explicite pour A^*, dite de la moyenne harmonique.
- En dimension $N \geq 2$, pour le mélange de deux phases: caractérisation explicite de G_θ grâce au principe variationnel de Hashin et Shtrikman.

Hypothèses sous-jacentes:

- Modèle linéaire de conduction ou de membrane (c'est plus difficile pour l'élasticité, et c'est très limité pour le non-linéaire).
- Interfaces parfaites entre les phases (continuité du déplacement et de la contrainte normale): ne tient pas compte d'effets possibles de délaminage ou de décollement.

Dimension $N = 1$

Problème de cellule: $\left\{ \begin{array}{ll} -\Big(A(y)\,(1+w'(y))\Big)' = 0 & \text{dans } [0,1] \\ y \to w(y) & \text{1-périodique} \end{array} \right.$

On calcule explicitement la solution

$$w(y) = -y + \int_0^y \frac{C_1}{A(t)} dt + C_2 \quad \text{avec} \quad C_1 = \left(\int_0^1 \frac{1}{A(y)} dy \right)^{-1},$$

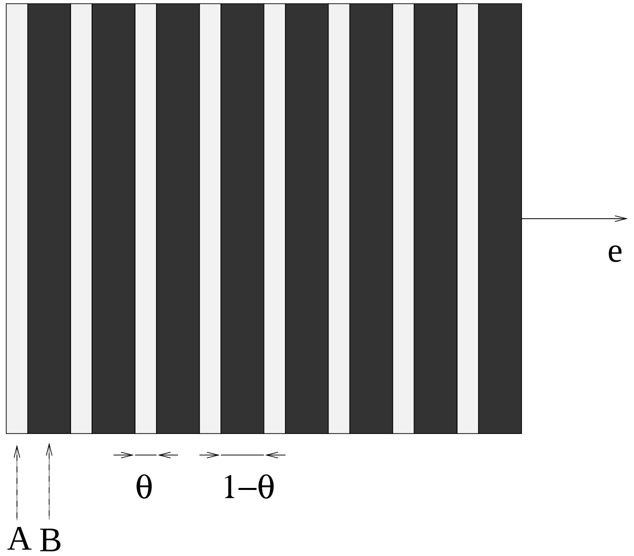
La formule pour A^* est $A^* = \displaystyle\int_0^1 A(y)\,(1+w'(y))^2\,dy$, ce qui donne la moyenne harmonique de $A(y)$

$$A^* = \left(\int_0^1 \frac{1}{A(y)} dy \right)^{-1}.$$

Cas particulier important:

$$A(y) = \alpha\chi(y) + \beta\,(1-\chi(y)) \quad \Rightarrow \quad A^* = \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta} \right)^{-1}$$

Composites laminés simples



En dimension $N \geq 2$ on considère des couches parallèles orthogonales à e_1 de deux phases isotropes α et β

$$\chi(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y_1 < \theta \\ 0 & \text{si } \theta < y_1 < 1, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta = \int_Y \chi \, dy.$$

On note A^* le tenseur homogénéisé de $A(y) = \alpha\chi(y_1) + \beta\,(1 - \chi(y_1))$.

Lemme 7.9. Soit $\lambda_\theta^- = \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta}\right)^{-1}$ et $\lambda_\theta^+ = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$. On a

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_\theta^- & & & 0 \\ & \lambda_\theta^+ & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_\theta^+ \end{pmatrix}$$

Interprétation (résistance = inverse de la conductivité). Les résistances en série (dans la direction e_1) se moyennent de manière arithmétique, tandis que les résistances en parallèles (dans les directions orthogonales à e_1) se moyennent de manière harmonique.

Preuve. On calcule explictement les solutions $(w_i)_{1\leq i\leq N}$ du problème de cellule.

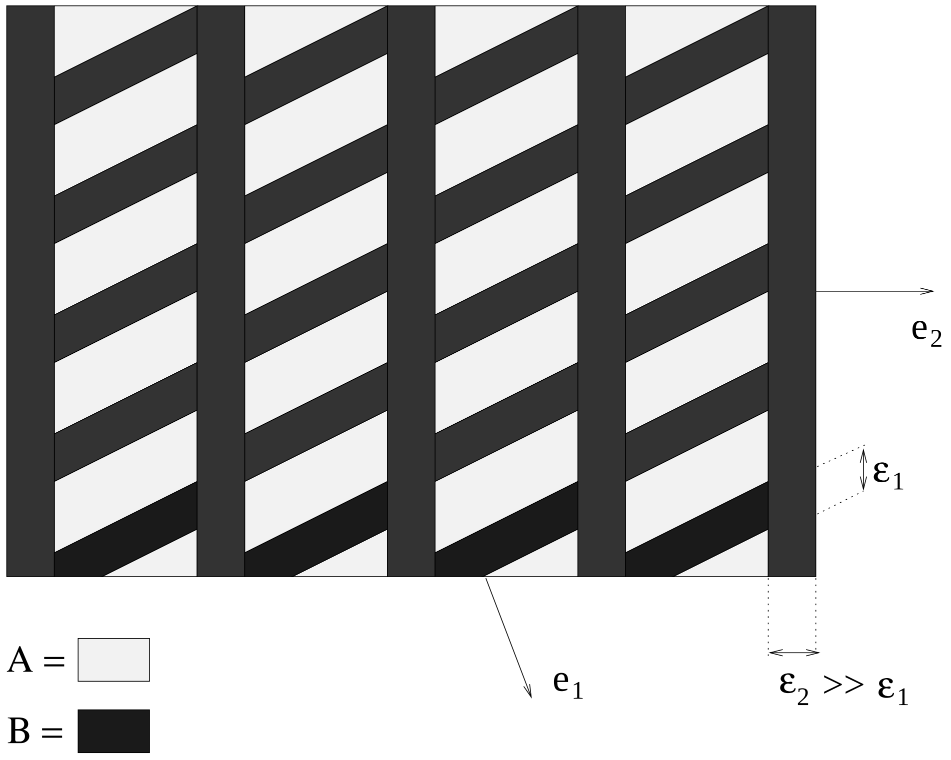
Pour $i=1$ on trouve que $w_1(y)=w(y_1)$ avec w la solution uni-dimensionnelle.

Pour $2\leq i\leq N$ on trouve que $w_i(y)\equiv 0$ car au sens faible on a

$$\mathrm{div}_y\Big(\alpha\chi(y_1)e_i+\beta\left(1-\chi(y_1)\right)e_i\Big)=0\quad\text{dans}\quad Y,$$

puisque la composante normale à l'interface du vecteur $(\alpha\chi+\beta(1-\chi))e_i$ est continue (en fait nulle) à travers l'interface entre les deux phases.

Composites laminés séquentiels



On relamine des composites laminés avec une des deux phases.

Laminé simple de deux phases non isotropes

Lemme 7.11. Le tenseur homogénéisé A^* d'un laminé simple de A et B en proportions θ et $(1-\theta)$ dans la direction e_1 est

$$A^* = \theta A + (1-\theta)B - \frac{\theta(1-\theta)\ (A-B)e_1 \otimes (A-B)^t e_1}{(1-\theta)Ae_1 \cdot e_1 + \theta B e_1 \cdot e_1}.$$

Si on suppose de plus que $(A-B)$ est inversible, alors cette formule est équivalente à

$$\boxed{\theta\left(A^* - B\right)^{-1} = \left(A-B\right)^{-1} + \frac{(1-\theta)}{Be_1 \cdot e_1} e_1 \otimes e_1}$$

Preuve. Par définition

$$A^*_{ji} = \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y w_i) \cdot e_j \, dy = \int_Y A(y) \left(e_i + \nabla_y w_i(y)\right) \cdot \left(e_j + \nabla_y w_j(y)\right) dy,$$

c'est-à-dire que

$$A^* e_i = \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y w_i) \, dy.$$

Par conséquent, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$A^* \xi = \int_Y A(y) \left(\xi + \nabla_y w_\xi\right) dy,$$

avec $w_\xi(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \xi_i w_i(y)$ solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y \left(A(y) \left(\xi + \nabla w_\xi(y)\right)\right) = 0 & \text{dans } Y \\ y \to w_\xi(y) & Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Idée principale: on pose $u(y) = \xi \cdot y + w_\xi(y)$ et on cherche une solution dont le gradient est constant dans chaque phase

$$\nabla u(y) = a\chi(y_1) + b\Big(1 - \chi(y_1)\Big),$$

$$\Rightarrow u(y) = \chi(y_1)\,(c_a + a \cdot y) + (1 - \chi(y_1))\,(c_b + b \cdot y)\,.$$

Soit Γ l'interface entre les deux phases.

Par continuité de u à travers Γ

$$c_a + a \cdot y = c_b + b \cdot y$$

$$\Rightarrow (a - b) \cdot x = (a - b) \cdot y \quad \forall\, x, y \in \Gamma.$$

Comme $(x - y) \perp e_1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $b - a = te_1$.

Par continuité de $A\nabla u \cdot n$ à travers Γ

$$Aa \cdot e_1 = Bb \cdot e_1.$$

(On a bien $-\mathrm{div}(A(y)\nabla u) = 0$ au sens faible.)

On en déduit la valeur de $t = \dfrac{(A-B)a \cdot e_1}{Be_1 \cdot e_1}$.

Comme w_ξ est périodique, elle vérifie $\int_Y \nabla w_\xi \, dy = 0$, donc

$$\int_Y \nabla u \, dy = \theta a + (1-\theta) b = \xi.$$

Avec ces deux équations on peut calculer a et b en fonction de ξ.

D'autre part, par définition de A^* on a

$$A^* \xi = \int_Y A(y) \, (\xi + \nabla w_\xi) \, dy = \int_Y A(y) \nabla u \, dy = \theta A a + (1-\theta) B b.$$

Un cacul facile donne alors la formule désirée

$$A^* \xi = \theta A \xi + (1-\theta) B \xi - \frac{\theta(1-\theta)(A-B)\xi \cdot e_1}{(1-\theta) A e_1 \cdot e_1 + \theta B e_1 \cdot e_1} (A-B) e_1$$

L'autre formule s'obtient grâce au fait que, si M est inversible, on a

$$\big(M + c(Me) \otimes (M^t e)\big)^{-1} = M^{-1} - \frac{c}{1 + c(Me \cdot e)} e \otimes e.$$

Lamination séquentielle

On relamine le composite précédent avec la même phase B.

On rappelle que le tenseur homogénéisé A_1^* d'un laminé simple est

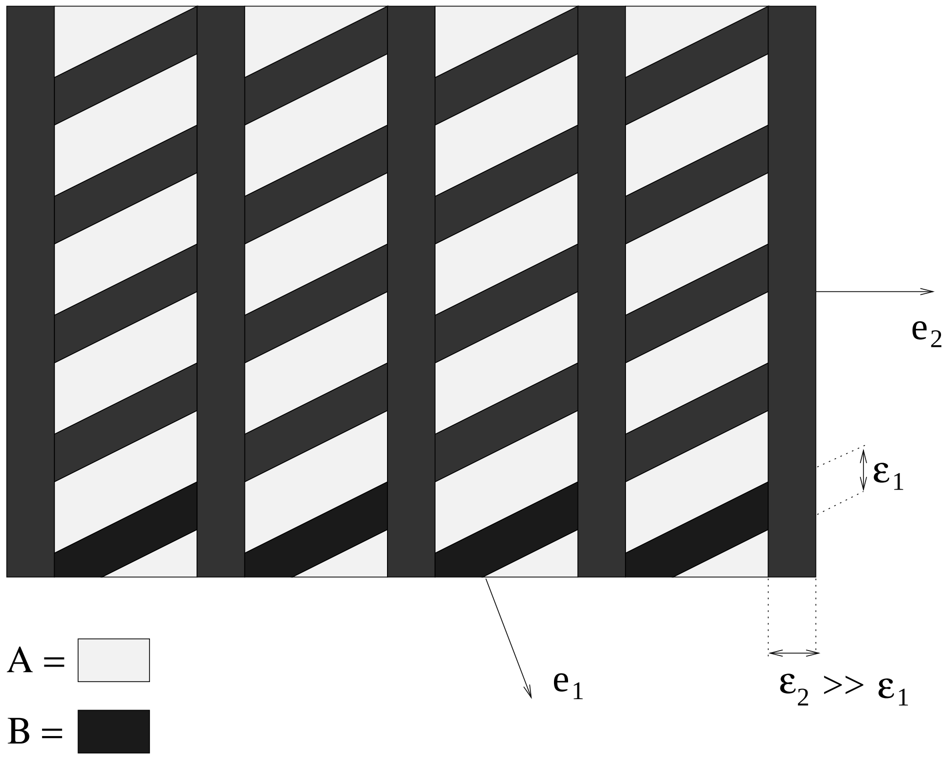
$$\theta\left(A_1^* - B\right)^{-1} = (A - B)^{-1} + (1-\theta)\frac{e_1 \otimes e_1}{Be_1 \cdot e_1}.$$

Lemme 7.14. Si on lamine p fois avec B, on obtient un laminé séquentiel de rang p de matrice B et d'inclusion A, en proportions $(1-\theta)$ et θ

$$\theta\left(A_p^* - B\right)^{-1} = (A - B)^{-1} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{p} m_i \frac{e_i \otimes e_i}{Be_i \cdot e_i}.$$

avec

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 1 \text{ et } m_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq p.$$



- A n'apparait qu'à la 1ère lamination: il est donc entouré de B. Donc A =inclusion et B = matrice.
- Les échelles des épaisseurs de couches sont très distinctes entre deux étapes de lamination.
- Paramètres de lamination (m_i, e_i).

Preuve. Par récurrence on obtient A_p^* en laminant A_{p-1}^* et B dans la direction e_p et en proportions θ_p, $(1-\theta_p)$, respectivement

$$\theta_p \left(A_p^* - B\right)^{-1} = \left(A_{p-1}^* - B\right)^{-1} + (1-\theta_p)\frac{e_p \otimes e_p}{Be_p \cdot e_p}.$$

En remplaçant $(A_{p-1}^* - B)^{-1}$ dans cette formule par la même formule qui donne $(A_{p-2}^* - B)^{-1}$, et ainsi de suite, on obtient

$$\left(\prod_{j=1}^{p} \theta_j\right) \left(A_p^* - B\right)^{-1} = (A-B)^{-1} + \sum_{i=1}^{p} \left((1-\theta_i)\prod_{j=1}^{i-1}\theta_j\right) \frac{e_i \otimes e_i}{Be_i \cdot e_i}.$$

On fait le changement de variables

$$(1-\theta)m_i = (1-\theta_i)\prod_{j=1}^{i-1}\theta_j \quad 1 \le i \le p$$

qui est bien bijectif avec les contraintes sur les m_i et sur les θ_i $(\theta = \prod_{i=1}^{p}\theta_i)$.

On peut faire la même chose en échangeant les rôles de A et B.

Lemme 7.15. Un laminé séquentiel de rang p de matrice A et d'inclusion B, en proportions θ et $(1-\theta)$, est défini par

$$(1-\theta)\left(A_p^* - A\right)^{-1} = (B-A)^{-1} + \theta \sum_{i=1}^{p} m_i \frac{e_i \otimes e_i}{A e_i \cdot e_i}.$$

avec

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 1 \text{ and } m_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq p.$$

Remarque. Les laminés séquentiels sont une classe très riche et explicite de matériaux composites qui nous permettront de décrire complètement les bords de l'ensemble G_θ.