Transport et diffusion

Cours no. 2 — le 15/I/2014

L'équation de transport libre

•Prototype des EDP linéaires du 1er ordre

$$\boxed{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0}$$

où $v \in \mathbf{R}^N$ est un vecteur donné (vitesse de transport)

•**Inconnue :** $f \equiv f(t,x) \in \mathbf{R}$, avec $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ (densité)

•**Notation :**

$$v \cdot \nabla_x f = \sum_{i=1}^{N} v_i \partial_{x_i} f$$

La méthode des caractéristiques

• Soit $y \in \mathbf{R}^N$; posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(t) = y + tv \in \mathbf{R}^N$; alors

$$\boxed{\gamma \in C^1(\mathbf{R};\mathbf{R}^N)\,, \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \dot\gamma(t) &= v \\ \gamma(0) &= y \end{aligned}}$$

Notation :

$$\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$$

L'ensemble $\{(t,\gamma(t))\,|\,t \in \mathbf{R}\}$ est une droite de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$, appelée “courbe caractéristique issue de y” associée à l'équation de transport.

•**Observation fondamentale :**

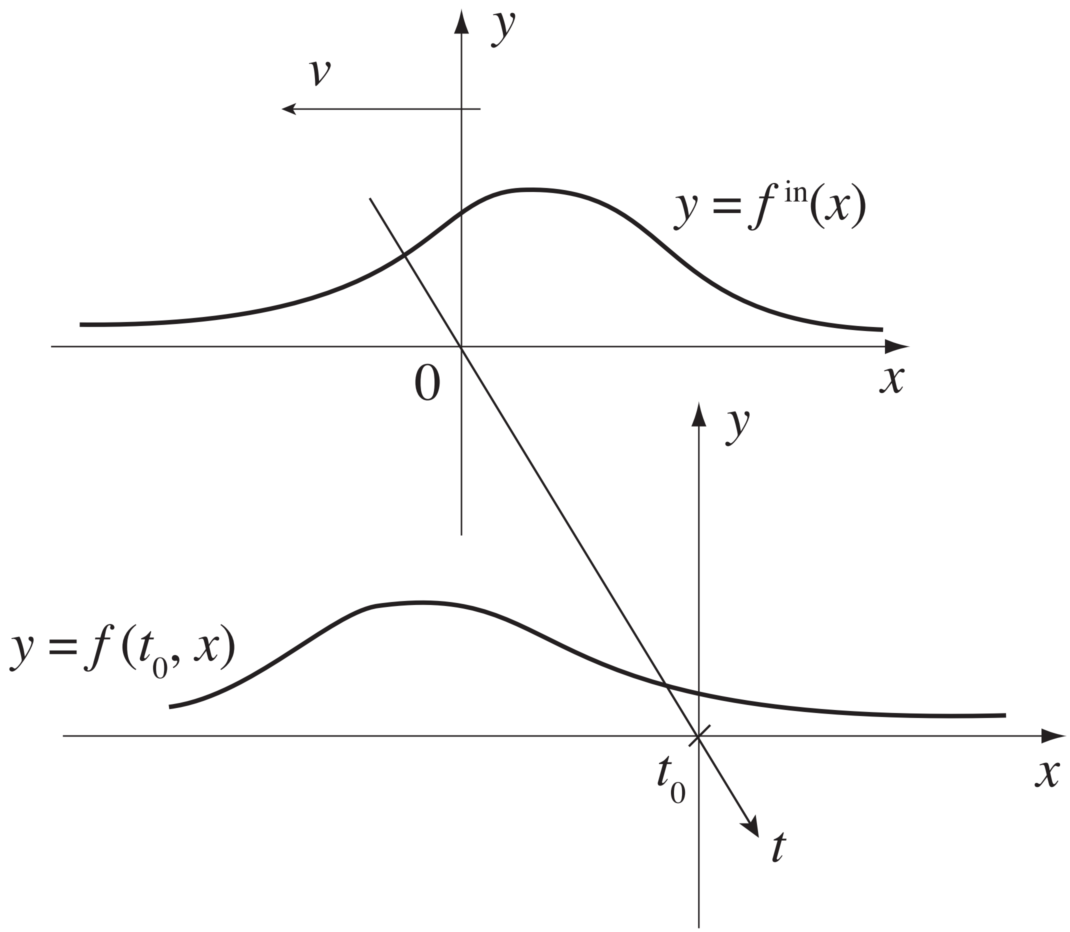
Toute solution de classe C^1 de l'équation de transport est constante le long des courbes caractéristiques

Thm : Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0\,, \qquad f(0,x) = f^{in}(x)$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$f(t,x) = f^{in}(x - tv)$$



Résolution de l'équation de transport. Le graphe de la donnée initiale est translaté de tv pour donner celui de la solution à l'instant t

L'équation de transport libre avec absorption et terme source

Données $a \equiv a(t,x)$ et $S \equiv S(t,x)$ de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$

Inconnue $f \equiv f(t,x) \in \mathbf{R}$, avec $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ (densité)

$$\boxed{(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x) = -a(t,x) f(t,x) + S(t,x)}$$

Méthode étudier la variation de f le long des courbes caractéristiques de l'équation sans absorption ni terme source

Soit $\gamma(t) = y + tv$, alors dire que $f \in C^1$ est solution de l'équation ci-dessus équivaut à

$$\frac{d}{dt} f(t,\gamma(t)) = -a(t,\gamma(t)) f(t,\gamma(t)) + S(t,\gamma(t))$$

que l'on résoud par la méthode de variation de la constante

Thm : Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f

$$\left\{\begin{array}{l}(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x) = -a(t,x) f(t,x) + S(t,x) \quad x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0\\[2ex] f(0,x) = f^{in}(x)\end{array}\right.$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$\begin{aligned}f(t,x) = f^{in}(x - tv) \exp\left(-\int_0^t (a(s, x + (s-t)v) ds\right)\\ + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t (a(\tau, x + (\tau - t)v) d\tau\right) S(s, x + (s-t)v) ds\end{aligned}$$

Problème aux limites pour l'équation de transport

•Le cas monodimensionnel on suppose que $x \in [x_L, x_R]$ et que $v > 0$

Thm : Soient $f_0 \in C^1([x_L, x_R])$ et $f_L \in C^1(\mathbf{R}_+)$. Le problème

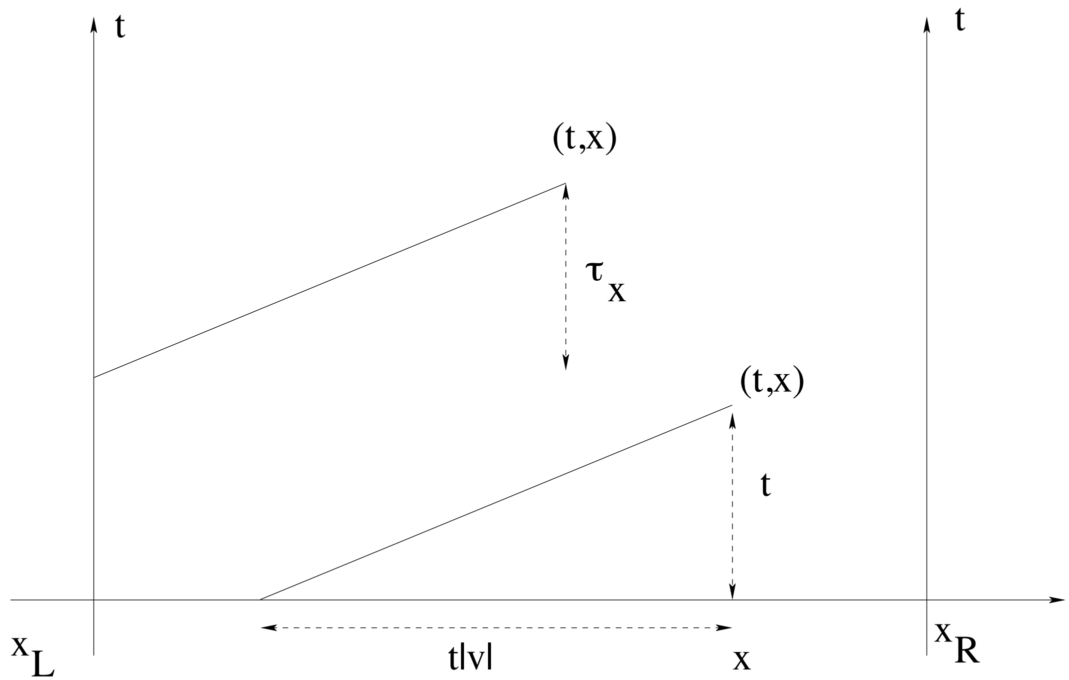
$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)f = 0\,, & x_L < x < x_R\,,\ t > 0 \\ f(t, x_L) = f_L(t)\,, & \\ f(0, x) = f_0(x)\,, & \end{cases}$$

admet une unique solution de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times [x_L, x_R]$ donnée par

$$f(t,x) = \begin{cases} f_0(x - tv) & \text{si } x - tv > x_L \\ \\ f_L(t - \frac{x - x_L}{v}) & \text{si } x - tv < x_L \end{cases}$$

ssi

$$f_L(0) = f_0(x_L) \quad \text{et} \quad f_L'(0) + v f_0'(x_L) = 0$$



Résolution du problème aux limites 1D

Rmqs : 1) si $v < 0$, c'est le problème

$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)f = 0\,, & x_L < x < x_R\,,\ t > 0 \\ f(t, x_R) = f_R(t)\,, & \\ f(0, x) = f_0(x)\,, & \end{cases}$$

qui admet une unique solution de classe C^1 ssi

$$f_0(x_R) = f_R(0) \quad \text{et} \quad f_R'(0) + v f_0'(x_R) = 0$$

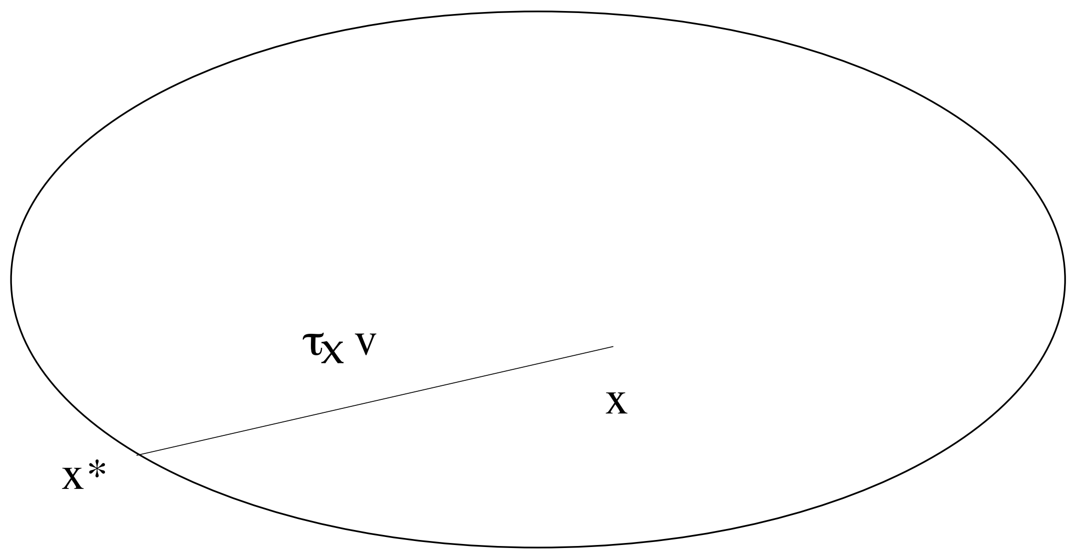
2) si $v > 0$, le problème ci-dessus n'admet de solution de classe C^1 que si f_0 et f_R vérifient la relation de compatibilité

$$f_R(t) = f_0(x_R - tv) \text{ pour } 0 < t < \frac{x_R - x_L}{v}$$

Exo : cette condition est-elle suffisante pour assurer l'existence d'une solution de classe C^1 au problème aux limites ci-dessus ?

•Soient Ω ouvert convexe de $\mathbf{R}^N$ à bord de classe C^1, et $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Soit n_x le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$ au point x dirigé vers l'extérieur de Ω, et

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega \,|\, v \cdot n_x < 0\}\,.$$



Résolution du problème aux limites dans un convexe à bord régulier

Thm : Soient $f_b^- \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$ et $f^{in} \in C^1(\overline{\Omega})$. Le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f = 0\,, \quad x \in \Omega\,,\ t > 0 \\ f\Big|_{\partial\Omega^-} = f_b^-\,, \quad f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{array} \right.$$

admet une unique solution de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$, donnée par la formule

$$f(t,x) = \left\{ \begin{array}{ll} f^{in}(x - tv) & \text{si } t \leq \tau_x \\ f_b^-(t - \tau_x, x^*) & \text{si } t > \tau_x \end{array} \right.$$

où $\tau_x := \inf\{t > 0 \,|\, x - tv \notin \overline{\Omega}\}$ et $x^* := x - \tau_x v$, si et seulement si

$$f_b^-(0,y) = f^{in}(y)\,, \quad \partial_t f_b^-(0,y) + v \cdot \nabla f^{in}(y) = 0\,, \quad y \in \partial\Omega^-$$

Rmqs : 1) Notons la partie caractéristique de $\partial\Omega$

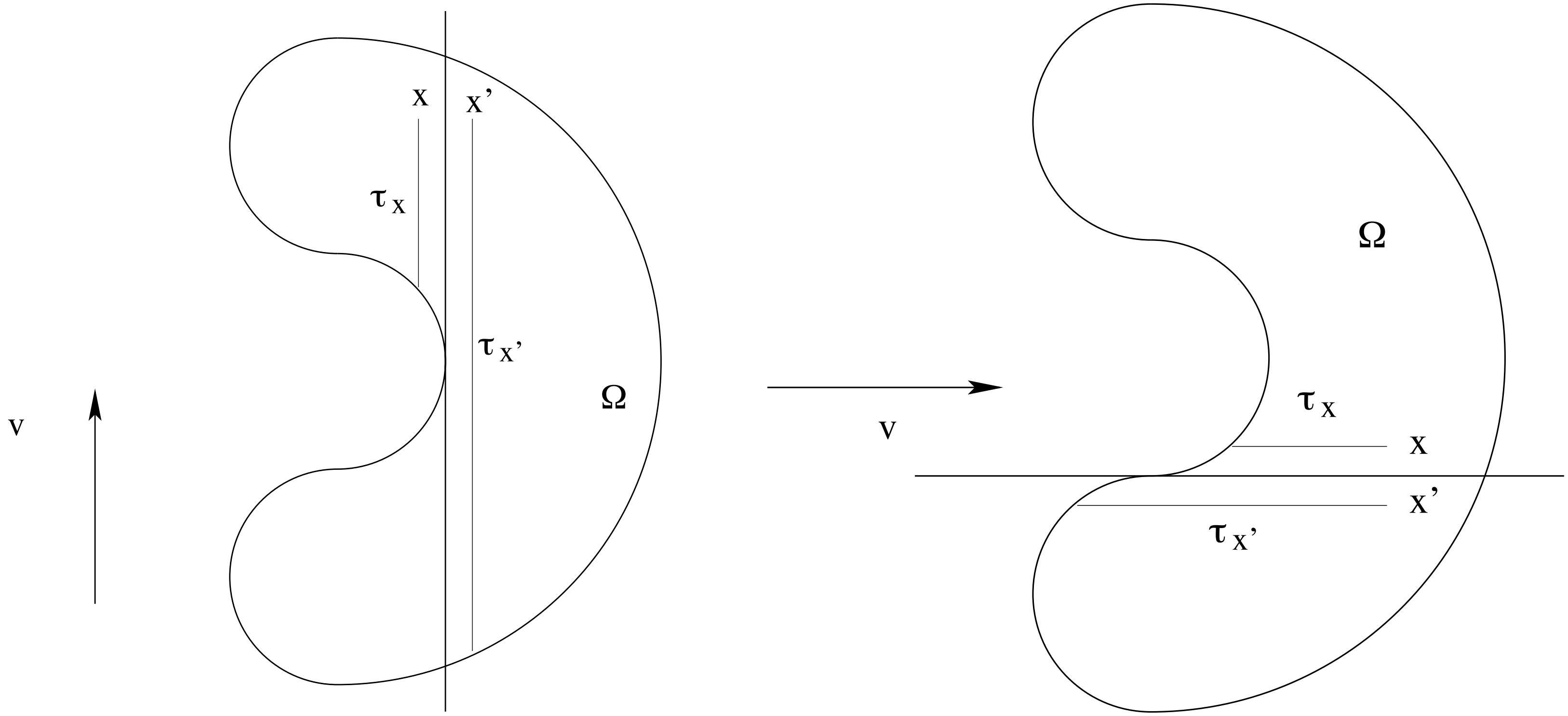
$$\partial\Omega^0 := \{x \in \partial\Omega \,|\, v \cdot n_x = 0\} \neq \varnothing$$

Lorsque Ω n'est pas convexe, il se peut que les trajectoires issues de la partie caractéristique $\partial\Omega^0$ du bord

$$\Gamma^0 := \{x_0 + tv \,|\, x_0 \in \partial\Omega^0\,,\ t > 0\} \cap \Omega \neq \varnothing$$

Il se peut alors que la fonction $\Omega \ni x \mapsto \tau_x$ soit discontinue sur Γ^0.

Lorsque Ω n'est pas convexe, la formule ci-dessus donnant f ne définit donc pas en général une fonction continue



Temps de sortie d'un domaine non convexe. A gauche : discontinuité du temps de sortie ; à droite : temps de sortie continu.

2) Même lorsque Ω est convexe, la fonction f donnée par le Thm ci-dessus n'est en général pas de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}$.

Contre-ex. prendre Ω =disque unité de $\mathbf{R}^2$ et $v = (1,0)$, de sorte que $\tau_x < 2$ pour tout $x \in \Omega$ et $\partial\Omega^- = \{(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}[\}$. Choisir

$$f^{in} \equiv 0 \quad \text{et } f_b^-(t, \cos\theta, \sin\theta) = \chi(t)\theta$$

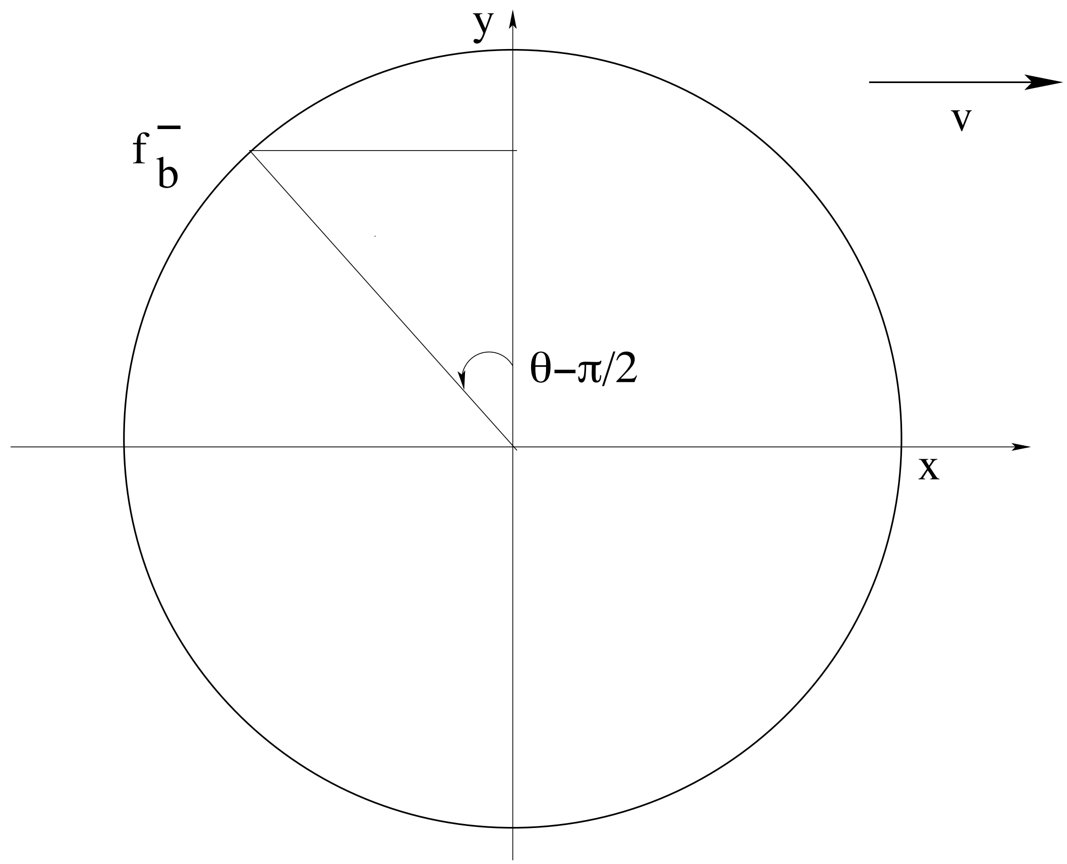
où $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ est t.q. $\chi \equiv 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $\chi \equiv 1$ sur $[1, +\infty[$

La solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f = 0\,, \quad x \in \Omega\,,\ t > 0 \\ f\Big|_{\partial\Omega^-} = f_b^-\,, \quad f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{array} \right.$$

vérifie

$$f(t, 0, y) = \pi - \arcsin y\,, \quad t > 3\,.$$



Contre-exemple

Problème aux limites avec absorption et terme source

Thm : Soit Ω ouvert convexe de $\mathbf{R}^N$ à bord de classe C^1, ainsi que des fonctions $f_b^- \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$, $f^{in} \in C^1(\overline{\Omega})$ et $a, S \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Supposons que pour tout $y \in \partial\Omega^-$

$$\begin{cases} f_b^-(0,y) = f^{in}(y)\,, \\ \partial_t f_b^-(0,y) + v \cdot \nabla f^{in}(y) = -a(0,y) f^{in}(y) + S(0,y) \end{cases}$$

Alors, le problème d'inconnue f

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x) = -a(t,x) f(t,x) + S(t,x), \quad x \in \Omega,\ t > 0 \\ f\big|_{\partial\Omega^-} = f_b^-\,, \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega)$.

. . . / . . .

Cette solution est donnée par la formule

$$
\begin{aligned}
f(t,x) = \mathbf{1}_{t \le \tau_x} f^{in}(x - tv) \exp\left(-\int_0^t a(s, x + (s-t)v)ds\right) \\
+ \mathbf{1}_{t > \tau_x} f_b^-(t - \tau_x, x^*) \exp\left(-\int_{t-\tau_x}^t a(s, x + (s-t)v)ds\right) \\
+ \int_{(t-\tau_x)_+}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau, x + (\tau - t)v)ds\right) S(s, x + (s-t)v)ds
\end{aligned}
$$

où on rappelle que $x^* = x - \tau_x v$, et que $z_+ = \max(z, 0)$.

Rmq : Dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}^N$, le temps de sortie $\tau_x = +\infty$, de sorte que cette formule redonne la solution du problème de Cauchy.

$\boxed{\textbf{Solutions généralisées}}$

Soient Ω ouvert convexe de $\mathbf{R}^N$ à bord de classe C^1, et $a \equiv a(t,x)$, $S \equiv S(t,x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$.

On dit qu'une fonction mesurable f est une **solution généralisée** de

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x) + a(t,x) f(t,x) = S(t,x)\,, \quad x \in \Omega,\ t > 0$$

ssi la fonction

$$s \mapsto f(t+s, x+sv) \text{ est de classe } C^1 \text{ p.p. en } (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$$

et vérifie

$$\left(\frac{d}{ds} + a(t+s, x+sv)\right) f(t+s, x+sv) = S(t+s, x+sv)$$
$$(t+s, x+sv) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$$

Prop : Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ à bord de classe C^1 ainsi que $a \equiv a(t,x)$, $S \equiv S(t,x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Pour toute donnée initiale $f^{in} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et toute donnée au bord $f_b^- \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$, le problème aux limites

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x) = -a(t,x) f(t,x) + S(t,x), \quad x \in \Omega,\, t > 0 \\ f\big|_{\partial\Omega^-} = f_b^- \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet une unique solution généralisée f donnée par la même formule que dans le cas classique. Si Ω est convexe,si $a, S \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$, si $f^{in} \in C^1(\overline{\Omega})$ et $f_b^- \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$, et vérifient, pour tout $y \in \partial\Omega^-$

$$\begin{cases} f_b^-(0,y) = f^{in}(y)\,, \\ \partial_t f_b^-(0,y) + v \cdot \nabla f^{in}(y) = -a(0,y) f^{in}(y) + S(0,y) \end{cases}$$

alors cette solution généralisée est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$.

Principe du maximum

Thm : Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ à bord de classe C^1 ainsi que deux fonctions $a \equiv a(t,x)$, $S \equiv S(t,x) \in L^\infty \cap C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Soient $f^{in} \in L^\infty(\Omega)$ et $f_b^- \in L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$; alors la solution généralisée du problème

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x) = -a(t,x) f(t,x) + S(t,x), & x \in \Omega,\ t > 0 \\ f\Big|_{\partial\Omega^-} = f_b^-\,, \quad f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $T > 0$, et en notant $a_-(t,x) = \max(0, -a(t,x))$

$$\|f\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \le e^{T\|a_-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)}} T \|S\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)}$$

$$+\, e^{T\|a_-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)}} \max\left(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f_b^-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\partial\Omega^-)}\right)$$

De plus

$$f^{in} \ge 0\,,\ f_b^- \ge 0 \text{ et } S \ge 0 \Rightarrow f \ge 0$$

Cas particuliers :

1) si $a \geq 0$ (taux d'amortissement), on a

$$\|f\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \leq T\|S\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + \max\left(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f_b^-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\partial\Omega^-)}\right)$$

2) si on a à la fois $a \geq 0$ et $S = 0$, alors

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} \leq \max\left(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f_b^-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\partial\Omega^-)}\right)$$

C'est un exemple de **principe du maximum faible** : le maximum de la (valeur absolue de la) solution est "atteint" sur le bord du domaine $\mathbf{R}_+ \times \Omega$

Problème aux limites, équation de transport stationnaire

Thm Soient Ω ouvert à bord de classe C^1 de $\mathbf{R}^N$, et $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Supposons que A est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ telle que

$$A(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Soient $\lambda > 0$, $Q \in C_b(\Omega)$ et $F_b^- \in L^\infty(\partial\Omega^-)$. Alors le problème aux limites pour l'équation de transport stationnaire

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda F(\lambda, x) + v \cdot \nabla_x F(\lambda, x) + A(x) F(\lambda, x) = Q(x), \quad x \in \Omega, \\ \\ F(\lambda, \cdot)\big|_{\partial\Omega^-} = F_b^-\,, \end{array}\right.$$

admet une unique solution généralisée $F \in L^\infty(\Omega)$.

$\ldots/\ldots$

Cette solution est donnée par la formule

$$F(x) = \int_0^{\tau_x} \exp\left(-\lambda s - \int_0^s A(x - \tau v)d\tau\right) Q(x - sv)ds$$
$$+ \mathbf{1}_{\tau_x<+\infty} F_b^-(x^*) \exp\left(-\lambda \tau_x - \int_0^{\tau_x} A(x - \tau v)d\tau\right)$$

p.p. en $x \in \Omega$. Elle satisfait en outre les estimations suivantes

a) si $Q \geq 0$ sur Ω et $F_b^- \geq 0$ sur $\partial\Omega^-$, alors $F(\lambda, \cdot) \geq 0$ p.p. sur Ω ;

b) de plus

$$\|F(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left(\frac{1}{\lambda}\|Q\|_{L^\infty(\Omega)}, \|F_b^-\|_{L^\infty(\partial\Omega^-)}\right)$$

Dém : la preuve est basée sur le fait que la **transformation de Laplace**

$$\boxed{f(t,x) \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x)\,dt = F(\lambda,x)}$$

transforme le problème d'évolution

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x) f(t,x) + A(x) f(t,x) = 0 \\ f\big|_{\mathbf{R}_+\times\partial\Omega^-} = \lambda F_b^-\,, \qquad f\big|_{t=0} = Q\,, \end{cases}$$

en problème stationnaire

$$\begin{cases} \lambda F(\lambda,x) + v\cdot\nabla_x F(\lambda,x) + A(x) F(\lambda,x) = Q(x), \quad x\in\Omega, \\ \\ F(\lambda,\cdot)\big|_{\partial\Omega^-} = F_b^-\,, \end{cases}$$