

# Transport et diffusion

Cours no. 3 — le 22/1/2014

## Problème aux limites, équation de transport stationnaire

**Thm** Soient  $\Omega$  ouvert à bord de classe  $C^1$  de  $\mathbf{R}^N$ , et  $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ .  
Supposons que  $A$  est une fonction continue sur  $\overline{\Omega}$  telle que

$$A(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Soient  $\lambda > 0$ ,  $Q \in C_b(\Omega)$  et  $F_b^- \in L^\infty(\partial\Omega^-)$ . Alors le problème aux limites pour l'équation de transport stationnaire

$$\begin{cases} \lambda F(\lambda, x) + v \cdot \nabla_x F(\lambda, x) + A(x)F(\lambda, x) = Q(x), & x \in \Omega, \\ F(\lambda, \cdot)|_{\partial\Omega^-} = F_b^-, \end{cases}$$

admet une unique solution généralisée  $F \in L^\infty(\Omega)$ .

.../...

Cette solution est donnée par la formule

$$F(x) = \int_0^{\tau_x} \exp\left(-\lambda s - \int_0^s A(x - \tau v) d\tau\right) Q(x - sv) ds \\ + \mathbf{1}_{\tau_x < +\infty} F_b^-(x^*) \exp\left(-\lambda \tau_x - \int_0^{\tau_x} A(x - \tau v) d\tau\right)$$

p.p. en  $x \in \Omega$ . Elle satisfait en outre les estimations suivantes

a) si  $Q \geq 0$  sur  $\Omega$  et  $F_b^- \geq 0$  sur  $\partial\Omega^-$ , alors  $F(\lambda, \cdot) \geq 0$  p.p. sur  $\Omega$  ;

b) de plus

$$\|F(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left(\frac{1}{\lambda} \|Q\|_{L^\infty(\Omega)}, \|F_b^-\|_{L^\infty(\partial\Omega^-)}\right)$$

Dém : la preuve est basée sur le fait que la **transformation de Laplace**

$$f(t, x) \mapsto \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t, x) dt = F(\lambda, x)$$

transforme le problème d'évolution

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t, x) + A(x) f(t, x) = 0 \\ f|_{\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-} = \lambda F_b^-, \quad f|_{t=0} = Q, \end{cases}$$

en problème stationnaire

$$\begin{cases} \lambda F(\lambda, x) + v \cdot \nabla_x F(\lambda, x) + A(x) F(\lambda, x) = Q(x), \quad x \in \Omega, \\ F(\lambda, \cdot)|_{\partial\Omega^-} = F_b^-, \end{cases}$$

## L'équation de Boltzmann linéaire

**Inconnue** : fonction de distribution  $f \equiv f(t, x, v)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + a f = \mathcal{K} f$$

où

$$\mathcal{K} f(t, x, v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) f(t, x, w) d\mu(w)$$

avec

$$\begin{cases} a \equiv a(t, x, v) \geq 0 & \text{(taux d'absorption)} \\ k \equiv k(t, x, v, w) \geq 0 & \text{(taux de transition } w \rightarrow v) \end{cases}$$

La notation  $d\mu(v)$  désigne

- a) l'élément de surface sur la sphère unité  $S^{N-1}$  de  $\mathbf{R}^N$  (transfert radiatif)
- b) la mesure de Lebesgue sur une couronne sphérique (neutronique)
- c) l'élément de surface sur une réunion de sphères concentriques (modèles multigroupe)
- d) la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^N \dots$

**Hypothèse** :  $a \geq 0$  et  $k \geq 0$  sont supposées continues et bornées sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_v^N$  et sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_v^N \times \mathbf{R}_w^N$  respectivement ; de plus

$$\sup_{(t,x,v) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) < +\infty$$

## Equation de Boltzmann linéaire : solutions généralisées

**Définition** Une fonction  $f \equiv f(t, x, v)$  continue bornée sur  $]0, T[ \times \Omega \times \mathbf{R}^N$  est solution généralisée de l'équation de Boltzmann linéaire

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + a f = \mathcal{K} f$$

ssi, pour tout  $(t, x, v) \in ]0, T[ \times \Omega \times \mathbf{R}^N$ , la fonction

$s \mapsto f(t + s, x + sv, v)$  est de classe  $C^1$  pour  $x + sv \in \Omega$

et vérifie, pour tout  $s \in \mathbf{R}$  t.q.  $x + sv \in \Omega$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(t + s, x + sv, v) + a(t + s, x + sv, v) f(t + s, x + sv, v) \\ = \mathcal{K} f(t + s, x + sv, v) \end{aligned}$$

## Equation de Boltzmann linéaire : problème de Cauchy

**Thm** : soient une donnée initiale  $f^{in} \equiv f^{in}(x, v) \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$  et un terme source  $Q \equiv Q(t, x, v) \in C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ . Alors le problème

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + a f = \mathcal{K} f + Q, & t \in ]0, T[, x, v \in \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet une unique solution généralisée  $f \in C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$

**1ère formulation intégrale** : pour tout

$$f(t, x, v) = \exp\left(-\int_0^t a(s, x + (s-t)v, v) ds\right) f^{in}(x - tv, v) + \int_0^t (\mathcal{K} f + Q)(s, x + (s-t)v, v) \exp\left(-\int_s^t a(\tau, x + (\tau-t)v, v) d\tau\right) ds$$



## 2ème formulation intégrale :

$$f(t, x, v) = f^{in}(x - tv, v) + \int_0^t (\mathcal{K}f + Q - af)(s, x + (s - t)v, v) ds$$

**Dém** : La démonstration du théorème ci-dessus est basée sur un argument de **point fixe pour la 1ère formulation intégrale**, c.a.d. que l'on cherche une fonction  $f$  telle que  $f = F[f^{in}, Q] + \mathcal{T}f$ , en posant

$$F[f^{in}, Q](t, x, v) := \exp\left(-\int_0^t a(s, x + (s - t)v, v) ds\right) f^{in}(x - tv, v) \\ + \int_0^t Q(s, x + (s - t)v, v) \exp\left(-\int_s^t a(\tau, x + (\tau - t)v, v) d\tau\right) ds$$

$$\mathcal{T}g(t, x, v) :=$$

$$\int_0^t \mathcal{K}g(s, x + (s - t)v, v) \exp\left(-\int_s^t a(\tau, x + (\tau - t)v, v) d\tau\right) ds$$

par un argument de point fixe dans  $C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ .

## Estimation $L^\infty$ pour le problème de Cauchy

**Thm** : soient une donnée initiale  $f^{in} \equiv f^{in}(x, v) \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$  et un terme source  $Q \equiv Q(t, x, v) \in C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ . Si on a

$$f^{in} \geq 0 \text{ sur } \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \text{ et } Q \geq 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$$

la solution généralisée  $f \in C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q, & t \in ]0, T[, x, v \in \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

vérifie

$$f \geq 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N .$$

NB : elle vérifie aussi

$$f(t, x, v) \leq (\|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} + T\|Q\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)})e^{Mt}$$

avec

$$M = \sup_{(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} k(x, v, w) d\mu(w)$$

Insuffisant pour l'approximation par la diffusion — cf. amélioration plus loin

**Dém** : Utiliser la représentation de la solution généralisée par la formule

$$f = \sum_{n \geq 0} \mathcal{T}^n F[f^{in}, Q]$$

et le fait que  $f^{in}, Q \geq 0 \Rightarrow F[f^{in}, Q] \geq 0$  et  $g \geq 0 \Rightarrow \mathcal{T}g \geq 0$ .

Pour la majoration du NB, utiliser que

$$|\mathcal{T}^n g(t, x, v)| \leq \frac{M^n t^n}{n!} \|g\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)}$$

**Corol** : soient une donnée initiale  $f^{in} \equiv f^{in}(x, v) \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$  et un terme source  $Q \equiv Q(t, x, v) \in C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ . Alors la solution généralisée  $f \in C_b([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q, & t \in ]0, T[, \quad x, v \in \mathbf{R}^N \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

vérifie, pour tout  $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

$$f(t, x, v) \leq (\|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} + T\|Q\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)})e^{Dt}$$

où

$$D = \sup_{(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \left( \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) - a(t, x, v) \right)_+$$

— avec la notation habituelle  $z_+ = \max(z, 0)$ .

## Cas particuliers importants :

1) supposons que l'absorption domine la création de particules, c.a.d.

$$\mathcal{K}1(t, x, v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) \leq a(t, x, v)$$

Alors, pour tout  $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

$$f(t, x, v) \leq \|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} + T \|Q\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)}$$

2) **Principe du maximum faible** : si l'absorption domine la création de particules et que de plus  $Q = 0$ , alors

$$f(t, x, v) \leq \|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)}, \quad (t, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$$

## Equation de Boltzmann linéaire : problème aux limites

Soit  $\Omega$  ouvert convexe borné à bord de classe  $C^1$  de  $\mathbf{R}^N$  ; on note  $n_x$  le vecteur normal unitaire au point  $x \in \partial\Omega$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega$

$$\Gamma_+ = \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^N \mid v \cdot n_x > 0\}$$

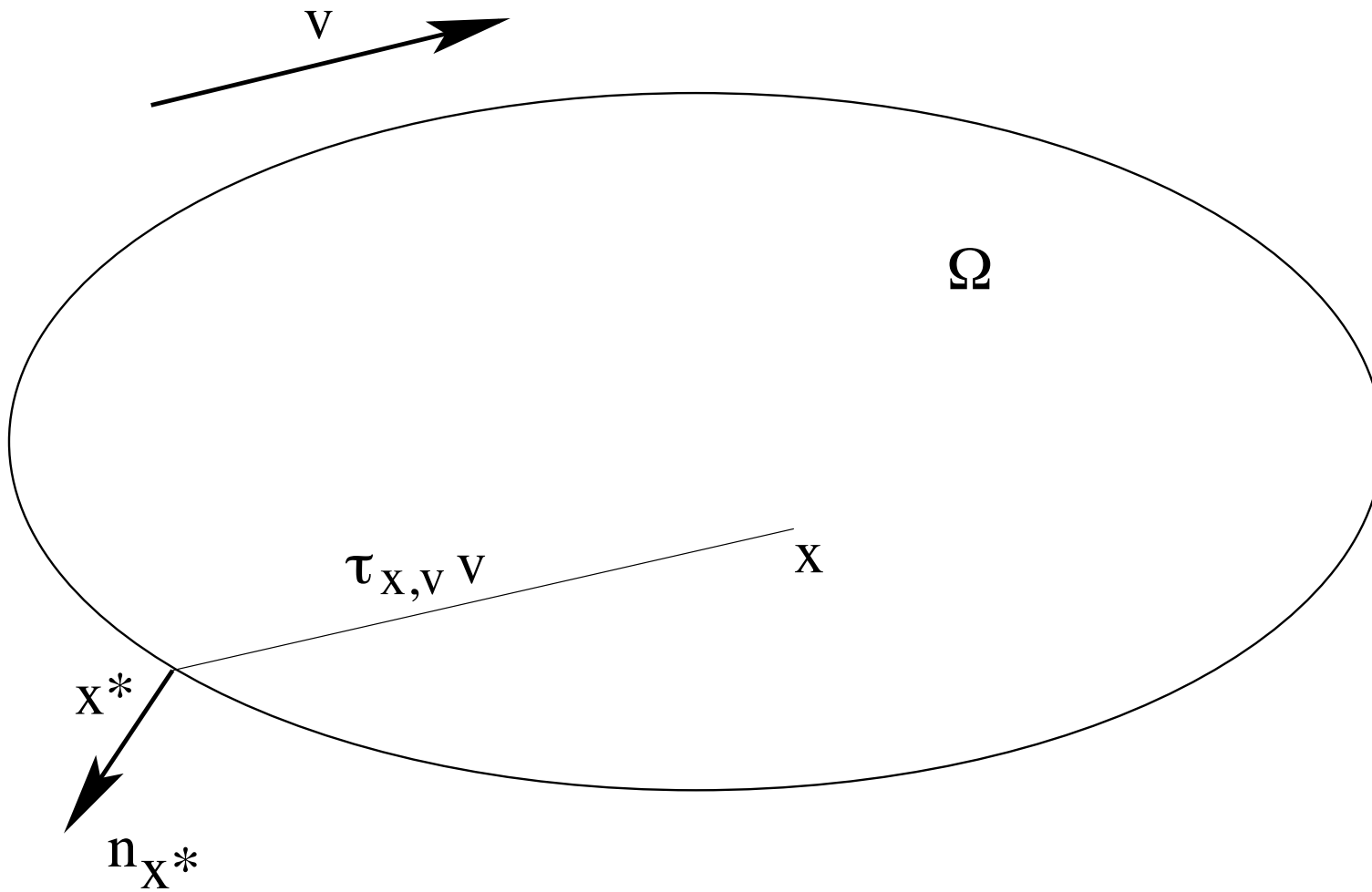
$$\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^N \mid v \cdot n_x < 0\}$$

Notons  $\tau_{x,v}$  le temps de sortie de  $\Omega$  dans la direction  $-v$  :

$$\tau_{x,v} = \inf\{t \geq 0 \mid x - tv \notin \overline{\Omega}\}$$

**Hypothèse** :  $a \geq 0$  et  $k \geq 0$  sont supposées continues et bornées sur  $\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}_x \times \mathbf{R}_v^N$  et sur  $\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}_x \times \mathbf{R}_v^N \times \mathbf{R}_w^N$  respectivement, de plus

$$\sup_{(t,x,v) \in \mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) < +\infty$$



Temps de sortie  $\tau_{x,v}$ , normale extérieure  $n_{x^*}$ , point entrant  $x^* = x - \tau_{x,v}v$

**Thm** : Soient des données  $f^{in} \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$  et  $f_b^- \in C_b([0, T] \times \Gamma_-)$   
t.q.

$$f_b^-(0, y, v) = f^{in}(y, v) \text{ pour tout } (y, v) \in \Gamma_-$$

et  $Q \in C_b([0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ . Il existe  $f \in C_b([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N)$  solution généralisée unique du problème

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q, & t \in ]0, T[, x \in \Omega, v \in \mathbf{R}^N \\ f|_{\Gamma_-} = f_b^- \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$



## 1ère formulation intégrale :

$$\begin{aligned} f(t, x, v) = & \mathbf{1}_{t \leq \tau_{x,v}} f^{in}(x - tv, v) \exp\left(-\int_0^t a(s, x + (s-t)v, v) ds\right) \\ & + \mathbf{1}_{t > \tau_{x,v}} f_b^-(t - \tau_{x,v}, x^*, v) \exp\left(-\int_{t-\tau_x}^t a(s, x + (s-t)v, v) ds\right) \\ & + \int_{(t-\tau_{x,v})_+}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau, x + (\tau-t)v, v) ds\right) \\ & \quad \times (\mathcal{K}f + Q)(s, x + (s-t)v, v) ds \end{aligned}$$

où on rappelle que  $x^* = x - \tau_{x,v}v$ , et que  $z_+ = \max(z, 0)$ .

## Estimation $L^\infty$ pour le problème aux limites

**Thm :** Soient des données  $f^{in} \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ ,  $f_b^- \in C_b([0, T] \times \Gamma_-)$   
t.q.  $f_b^-|_{t=0} = f^{in}|_{\Gamma_-}$  et  $Q \in C_b([0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ , et soit  $f$  la solution  
généralisée unique du problème

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q, & t \in ]0, T[, x \in \Omega, v \in \mathbf{R}^N \\ f|_{\Gamma_-} = f_b^- \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

1) si  $f^{in} \geq 0$  sur  $\overline{\Omega}$ ,  $f_b^- \geq 0$  sur  $[0, T] \times \Gamma_-$ , et  $Q \geq 0$  sur  $[0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$

alors  $f \geq 0$  sur  $[0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N$

2) de plus, pour tout  $(t, x, v) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$ ,

$$f(t, x, v) \leq \max(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^N)}, \|f_b^-\|_{L^\infty([0, T] \times \Gamma_-)})e^{Dt} + T\|Q\|_{L^\infty([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N)}e^{Dt}$$

en notant

$$D = \sup_{(t, x, v) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N} \left( \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) - a(t, x, v) \right)_+$$

Cas particuliers : si on a, pour tout  $(t, x, v) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$ ,

$$\mathcal{K}1(t, x, v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(t, x, v, w) d\mu(w) \leq a(t, x, v)$$

alors  $D = 0$  et, pour tout  $(t, x, v) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$ ,

$$f(t, x, v) \leq \max(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^N)}, \|f_b^-\|_{L^\infty([0, T] \times \Gamma_-)}) + T\|Q\|_{L^\infty([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N)}$$

## Autres conditions aux limites

On se limite au cas de dimension  $N = 1$  ; soit  $\Omega = ]x_L, x_R[ \subset \mathbf{R}$

a) réflexion spéculaire : pour tout  $t \geq 0$  et tout  $v \in \mathbf{R}$

$$f(t, x_L, v) = f(t, x_L, -v), \quad f(t, x_R, v) = f(t, x_R, -v)$$

b) réflexion diffuse :

$$f(t, x_L, v)v = \int_0^\infty k_L(v, w) f(t, x_L, -w) w d\mu(w), \quad v > 0$$

$$f(t, x_R, -v)v = \int_0^\infty k_R(v, w) f(t, x_L, w) w d\mu(w), \quad v < 0$$

en supposant que les noyaux de transition  $k_L, k_R \geq 0$  sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$  et

$$\int_0^\infty k_L(v, w) w d\mu(w) = v, \quad \int_0^\infty k_L(v, w) d\mu(w) = 1$$

avec des relations identiques pour  $k_R$ .