

Transport et diffusion

Cours no. 4 — le 4/1/2016

Rappels sur l'équation de la chaleur

Soit Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N à bord de classe C^∞ .

Equation de la chaleur, pbm de Dirichlet d'inconnue $u \equiv u(t, x) \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x u(t, x) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = u_b, \\ u|_{t=0} = u^{in} \end{cases}$$

Données :

condition initiale	$u^{in} \equiv u^{in}(x)$
condition de Dirichlet	$u_b \equiv u_b(t, x)$

Thm Supposons que $u^{in} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et que $u_b \in C^\infty([0, T] \times \partial\Omega)$ vérifient les relations de compatibilité pour tout $k \geq 0$:

$$\partial_t^k u_b(0, y) = \left(\frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x\right)^k u^{in}(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

Il existe une unique solution $u \in C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x u(t, x) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = u_b, & u|_{t=0} = u^{in} \end{cases}$$

Principe du maximum De plus, cette solution vérifie

$$\|u\|_{L^\infty([0, T] \times \Omega)} \leq \max\left(\|u^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u_b\|_{L^\infty([0, T] \times \partial\Omega)}\right)$$

ainsi que la propriété de positivité :

$$\left. \begin{array}{l} u^{in} \geq 0 \text{ sur } \Omega \\ u_b \geq 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow u \geq 0 \text{ sur } [0, T] \times \Omega$$

Pbm de Cauchy pour l'équation de la chaleur lorsque $\Omega = \mathbf{R}^N$, on considère le problème de Cauchy d'inconnue $u \equiv u(t, x)$

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x u(t, x) = 0, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u|_{t=0} = u^{in} \end{cases}$$

avec $u \equiv u^{in}(x)$ donnée.

Solution élémentaire gaussienne : on notera

$$E(t, x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0.$$

Thm pour tout $u^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, qui est donnée par la formule

$$u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^N} E(\kappa^2 t, x - y) u^{in}(y) dy, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0.$$

Evidemment, si $u^{in} \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, alors la solution $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$.

Principe du maximum pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, on a l'encadrement

$$\inf_{y \in \mathbf{R}^N} u^{in}(y) \leq u(t, x) \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^N} u^{in}(y)$$

Approximation par la diffusion

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert convexe à bord de classe C^∞ , dont on note n_x la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$. Dans tout ce qui suit $v \in \mathcal{V} = \overline{B(0, R)}$.

Equation de Boltzmann linéaire d'inconnue $f \equiv f(t, x, v)$, avec $t \geq 0$, $x \in \Omega$ et $v \in \mathcal{V}$, de la forme

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x)f + af = a(1 + \gamma)\mathcal{K}f$$

où $a > 0$ et γ sont deux constantes, et où

$$\mathcal{K}f(t, x, v) = \int_{\mathcal{V}} k(v, w)f(t, x, w)d\mu(w)$$

Hypothèses :

1) on suppose μ mesure de Radon positive sur \mathcal{V} t.q.

$$\int_{\mathcal{V}} d\mu(v) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{V}} v d\mu(v) = 0$$

2) on suppose que $k \in C(\mathcal{V} \times \mathcal{V})$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < k(v, w) = k(w, v) \text{ pour tout } v, w \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{K}1(v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(v, w) d\mu(w) = 1 \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \end{array} \right.$$

Loi d'échelle de la diffusion

Scaling l'approximation de l'équation de Boltzmann linéaire sera justifiée sous les hypothèses

- 1) $a \gg 1$ (régime fortement collisionnel)
- 2) $\gamma \ll 1$ (quasi-équilibre absorption/création)
- 3) $\partial_t f \ll 1$ (solution lentement variable en temps)

Plus précisément, on introduit un petit paramètre $0 < \epsilon \ll 1$ et on suppose

$$a = \frac{\hat{a}}{\epsilon}, \quad \gamma = \epsilon^2 \hat{\gamma}$$

tandis que

$$f(t, x, v) = f_\epsilon(\epsilon t, x, v) \text{ avec } \begin{cases} f_\epsilon \equiv f_\epsilon(\hat{t}, x, v) \\ \partial_{\hat{t}} f_\epsilon = O(1) \end{cases}$$

L'équation de Boltzmann devient donc

$$\epsilon \partial_{\hat{t}} f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{\hat{a}}{\epsilon} \left(f_\epsilon - (1 + \epsilon^2 \hat{\gamma}) \mathcal{K} f_\epsilon \right) = 0$$

But : étudier le comportement asymptotique des solutions de cette équation lorsque le petit paramètre $\epsilon \rightarrow 0^+$

Solution série formelle de Hilbert

On cherche une solution f_ϵ de l'équation

$$\epsilon \partial_t f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{a}{\epsilon} \left(f_\epsilon - (1 + \epsilon^2 \gamma) \mathcal{K} f_\epsilon \right) = 0$$

série **formelle** en puissances de ϵ à coefficients C^∞ :

$$f_\epsilon(t, x, v) = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n f_n(t, x, v) \in C_b(v; C_b^\infty(t, x))[[\epsilon]]$$

Attention : la série ne converge pas en général — d'ailleurs seuls les premiers termes de cette série formelle nous serviront

- On substitue la série dans l'équation de Boltzmann linéaire et on identifie les coefficients des puissances successives de ϵ .

Ordre ϵ^{-1} :

$$a(f_0 - \mathcal{K}f_0) = 0$$

Ordre ϵ^0 :

$$v \cdot \nabla_x f_0 + a(f_1 - \mathcal{K}f_1) = 0$$

Ordre ϵ^1 :

$$\partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 + a(f_2 - \mathcal{K}f_2) - a\gamma\mathcal{K}f_0 = 0$$

De façon générale, on trouve, pour tout $n \geq 1$, la relation

Ordre ϵ^n :

$$\partial_t f_{n-1} + v \cdot \nabla_x f_n + a(f_{n+1} - \mathcal{K}f_{n+1}) - a\gamma\mathcal{K}f_{n-1} = 0$$

- Etudions la 1ère équation :

$$f_0 - \mathcal{K}f_0 = 0$$

Lemme Si $\phi \in L^2(\mathcal{V}, d\mu)$, alors $\phi = \mathcal{K}\phi \Rightarrow \phi = \text{Const.}$ p.p..

- Comme $f_0 \equiv f_0(t, x, v)$ est une fonction continue bornée des variables t, x, v , alors en particulier $f(t, x, \cdot) \in L^2(\mathcal{V}, d\mu)$ pour tous t, x . Donc

$$f_0 \equiv f_0(t, x) \text{ est indépendante de } v$$

- Passons maintenant à la 2ème équation :

$$(I - \mathcal{K})f_1(t, x, v) = -\frac{1}{a}v \cdot \nabla_x f_0(t, x)$$

Les hypothèses sur k entraînent que

$$\iint_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} k(v, w)^2 d\mu(v) d\mu(w) < +\infty$$

c.a.d. que \mathcal{K} est un **opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint** sur $L^2(\mathcal{V}, d\mu)$

Alternative de Fredholm l'opérateur \mathcal{K} auto-adjoint sur $L^2(\mathcal{V}, d\mu)$ vérifie

$$\text{Im}(I - \mathcal{K}) = \text{Ker}(I - \mathcal{K}^*)^\perp (= \text{Ker}(I - \mathcal{K})^\perp = \mathbf{R}^\perp)$$

•Donc pour résoudre l'équation intégrale d'inconnue $\phi \in L^2(\mathcal{V}, d\mu)$

$$\phi - \mathcal{K}\phi = \psi$$

a) ou bien

$$\int_{\mathcal{V}} \psi(v) d\mu(v) \neq 0 \Rightarrow \text{pas de solution}$$

b) ou bien

$$\int_{\mathcal{V}} \psi(v) d\mu(v) = 0 \Rightarrow \text{il existe une solution } \phi_0$$

toutes les solutions sont de la forme $\phi = \phi_0 + \text{Const.}$

c) dans le cas b), il existe une unique solution $\Phi \perp \text{Ker}(I - \mathcal{K}) = \mathbb{R}$

$$\Phi = \phi_0 - \langle \phi_0 \rangle, \quad \text{où} \quad \langle \phi \rangle = \frac{\int_{\mathcal{V}} \phi(v) d\mu(v)}{\int_{\mathcal{V}} d\mu(v)}$$

•Revenons à la 2ème équation :

$$(I - \mathcal{K})f_1(t, x, v) = -\frac{1}{a}v \cdot \nabla_x f_0(t, x) = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^N v_j \partial_{x_j} f_0(t, x)$$

Equation auxiliaire : $(I - \mathcal{K})b_j(v) = v_j$ pour $j = 1, \dots, N$

$$\int_{\mathcal{V}} v_j d\mu(v) = \left(\int_{\mathcal{V}} v d\mu(v) \right)_j = 0$$

donc il existe une unique solution $b_j(v) \in \text{Ker}(I - \mathcal{K})^\perp = \mathbf{R}^\perp$

Les solutions de l'équation pour f_1 sont les fonctions de la forme

$$f_1(t, x, v) = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^N b_j(v) \partial_{x_j} f_0(t, x) + C_1(t, x)$$

- Passons à l'équation à l'ordre $O(\epsilon^2)$, que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} a(f_2 - \mathcal{K}f_2) &= -\partial_t f_0 - v \cdot \nabla_x f_1 + a\gamma \mathcal{K}f_0 \\ &= -(\partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 - a\gamma f_0) \end{aligned}$$

Pour que f_2 existe, f_0 doit vérifier la condition de compatibilité

$$\langle \partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 - a\gamma f_0 \rangle = 0$$

c.a.d.

$$\partial_t f_0 + \langle v \cdot \nabla_x f_1 \rangle - a\gamma f_0$$

Puis

$$\langle v \cdot \nabla_x f_1 \rangle = -\frac{1}{a} \sum_{i,j=1}^N \langle v_i b_j(v) \rangle \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0$$

— le terme C_1 disparaît car $\langle v \cdot \nabla_x C_1(t, x) \rangle = \langle v \rangle \cdot \nabla_x C_1(t, x) = 0$

Conclusion le terme f_2 existe ssi

$$\partial_t f_0 - \frac{1}{a} \sum_{i,j=1}^N \langle v_i b_j(v) \rangle \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0 - a\gamma f_0 = 0$$

qui est une variante **anisotrope** de l'équation de la chaleur

Hypothèse supposons k invariant par les transformations orthogonales

$$k(Rv, Rw) = k(v, w) \text{ pour tous } v, w \in \mathcal{V}, R \in O_N(\mathbf{R})$$

ainsi que la mesure μ :

$$\int_{\mathcal{V}} g(Rv) d\mu(v) = \int_{\mathcal{V}} g(v) d\mu(v)$$

Lemme : Dans ce cas, le vecteur $b(v) = (b_1(v), \dots, b_N(v))$ s'écrit

$$b(v) = \beta(|v|)v$$

Conséquence la matrice de diffusion est alors proportionnelle à l'identité :

$$\langle v_i b_j(v) \rangle = \frac{1}{N} \langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle I$$

et de plus

$$\langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle > 0$$

• La condition de compatibilité assurant l'existence de f_2 se met alors sous la forme de l'équation de diffusion

$$\partial_t f_0 - \frac{1}{2} \kappa^2 \Delta_x f_0 - a \gamma f_0 = 0$$

avec un coefficient de diffusion donné par la formule

$$\frac{1}{2} \kappa^2 = \frac{\langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle}{Na}$$

•L'équation à l'ordre $O(\epsilon^2)$ devient

$$(f_2 - \mathcal{K}f_2) = \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^N (v_i b_j(v) - \langle v_i b_j(v) \rangle) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0 - \frac{1}{a} v \cdot \nabla_x C_1$$

Soit $d_{ij}(v)$ la solution de l'équation intégrale

$$(I - \mathcal{K})d_{ij}(v) = v_i b_j(v) - \langle v_i b_j(v) \rangle, \quad \langle d_{ij} \rangle = 0$$

Alors

$$f_2(t, x, v) = \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^N d_{ij}(v) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0 - \frac{1}{a} b(v) \cdot \nabla_x C_1(t, x) + C_2(t, x)$$

Justification rigoureuse de l'approximation par la diffusion

Sous les hypothèses précédentes portant sur la mesure μ et le noyau intégral k on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{a}{\epsilon} \left(f_\epsilon - (1 + \epsilon^2 \gamma) \mathcal{K} f_\epsilon \right) = 0, & (x, v) \in \Omega \times \mathcal{V} \\ f_\epsilon|_{\Gamma_-} = f_b \\ f_\epsilon|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

où on a noté

$$\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathcal{V} \mid v \cdot n_x < 0\}$$

Supposons que la donnée au bord $f_b \equiv f_b(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \partial\Omega)$ et que la donnée initiale $f^{in} \equiv f^{in}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifient la condition de compatibilité

$$\partial_t^k f_b(0, y) = \left(\frac{1}{2} \kappa^2 \Delta_x + a\gamma \right)^k f^{in}(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

avec

$$\frac{1}{2} \kappa^2 = \frac{\langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle}{Na}$$

où la fonction β est t.q.

$$(I - \mathcal{K})(\beta(|v|)v) = v, \quad v \in \mathcal{V}$$

Thm Sous les hypothèses précédentes, il existe $C_T > 0$ t.q.

$$\sup_{(t,x,v) \in [0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathcal{V}} |f_\epsilon(t, x, v) - u(t, x)| \leq C_T \epsilon$$

où u est la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2} \kappa^2 \Delta_x u - a \gamma u = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f_b \\ u|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

Schéma de la preuve :

1) Soit u la solution du problème aux limites pour l'équation de diffusion.
Définissons

$$\begin{aligned}f_0(t, x, v) &:= u(t, x) \\f_1(t, x, v) &:= -\frac{1}{a}\beta(|v|)v \cdot \nabla_x u(t, x) \\f_2(t, x, v) &:= \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^N d_{ij}(v) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x)\end{aligned}$$

Formons la solution formelle de Hilbert tronquée à l'ordre 2 en ϵ :

$$F_\epsilon(t, x, v) = f_0(t, x, v) + \epsilon f_1(t, x, v) + \epsilon^2 f_2(t, x, v)$$

2) Posons

$$R_\epsilon(t, x, v) = f_\epsilon(t, x, v) - F_\epsilon(t, x, v)$$

et calculons

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t R_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} v \cdot \nabla_x R_\epsilon + \frac{a}{\epsilon^2} \left(R_\epsilon - (1 + \epsilon^2 \gamma) \mathcal{K} R_\epsilon \right) = S_\epsilon \\ R_\epsilon|_{\Gamma_-} = R_\epsilon^b \\ R_\epsilon|_{t=0} = R_\epsilon^{in} \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} R_\epsilon^{in} = -\epsilon f_1|_{t=0} - \epsilon^2 f_2|_{t=0}, \quad R_\epsilon^b = -\epsilon f_1|_{\Gamma_-} - \epsilon^2 f_2|_{\Gamma_-} \\ S_\epsilon = -\epsilon \partial_t f_1 - \epsilon^2 \partial_t f_2 - \epsilon v \cdot \nabla_x f_2 + a \epsilon \gamma \mathcal{K} f_1 + a \epsilon^2 \gamma \mathcal{K} f_2 \end{array} \right.$$

3) Par construction

$$|R_\epsilon^{in}(t, x, v)| \leq C_T^{in} \epsilon, \quad |R_\epsilon^b(t, x, v)| \leq C_T^b \epsilon, \quad |S_\epsilon(t, x, v)| \leq C_T^s \epsilon$$

D'autre part, la différence entre le terme de création et le terme d'absorption vaut

$$\frac{a}{\epsilon^2} \left((1 + \epsilon^2 \gamma) \mathcal{K}1 - 1 \right) = a\gamma$$

D'après le principe du maximum pour l'équation de Boltzmann linéaire

$$|R_\epsilon(t, x, v)| \leq \epsilon \max(C_T^{in}, C_T^b) e^{a\gamma+T} + \epsilon T C_T^s e^{a\gamma+T}$$

d'où

$$|f_\epsilon(t, x, v) - u(t, x)| \leq \epsilon \max(C_T^{in}, C_T^b) e^{a\gamma+T} + \epsilon T C_T^s e^{a\gamma+T} \\ \epsilon \|f_1\|_{L^\infty([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathcal{V})} + \epsilon^2 \|f_2\|_{L^\infty([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathcal{V})}$$