

# Transport et diffusion

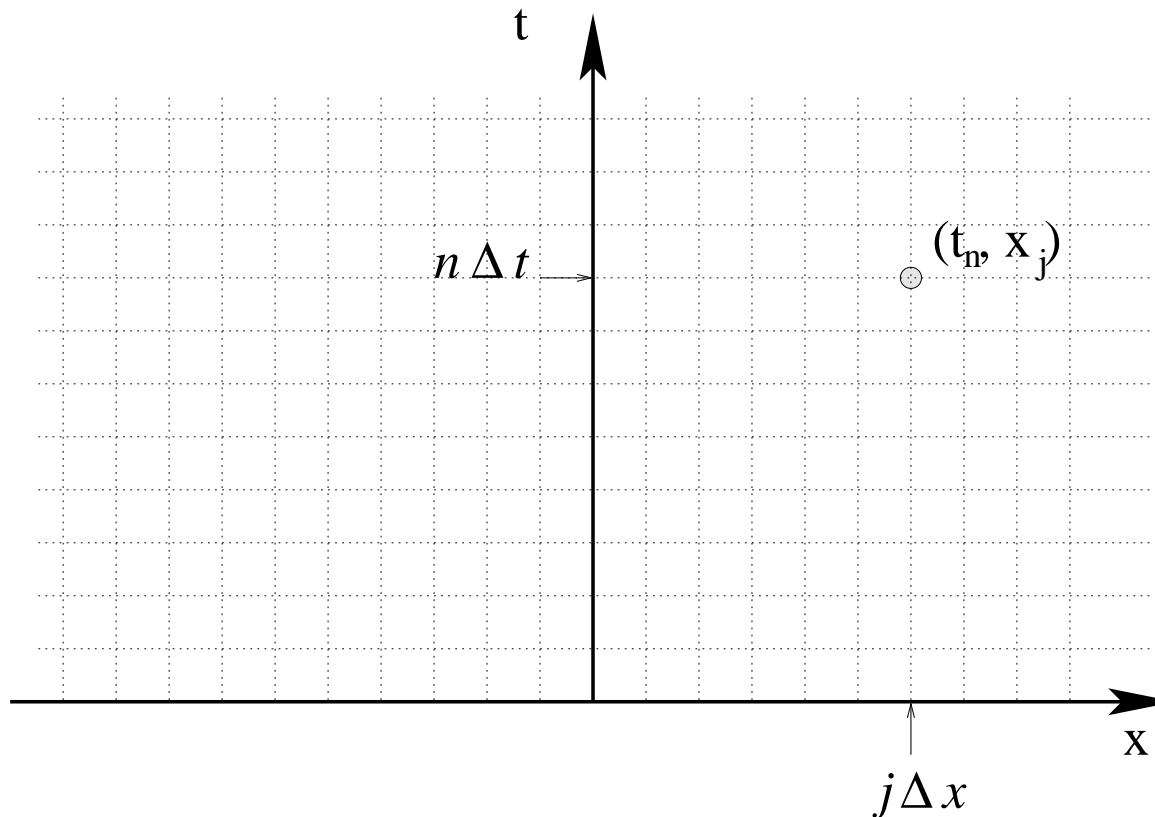
G. ALLAIRE

Cours no. 5 — le 11/I/2016

## Méthodes numériques

- ➡ Différences finies en 1-d: rappels
- ➡ Equation de diffusion stationnaire
- ➡ Equation de transport
- ➡ Equation de transport stationnaire

# (1) Rappels: différences finies



**Maillage:** discrétisation de l'espace et du temps

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \quad \text{pour} \quad n \geq 0, j \in \mathbb{Z}$$

$\Delta t =$  pas de temps,  $\Delta x =$  pas d'espace (supposés "petits").

Exemple de l'équation de diffusion en 1-d

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x = 0) = u(t, x = 1) = 0 & \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } (0, 1) \end{array} \right.$$

avec  $\nu > 0$ .

## Principe des différences finies

On calcule des **approximations**

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j)$$

On remplace les dérivées par des **différences finies**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

### Principe de discrétisation:

on remplace un problème de dimension **infinie** (calculer la fonction  $u(t, x)$ ) par un problème de dimension **finie** (calculer les valeurs discrètes  $u_j^n$ ), qui seul peut être résolu par un ordinateur.

## Différences divisées et formules de Taylor

Il n'y a pas **unicité** des formules d'approximation par différences finies.

On utilise des **formules de Taylor**. Par exemple

$$\begin{aligned}
 -u(t, x - \Delta x) + 2u(t, x) - u(t, x + \Delta x) = & -(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\
 & - \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^6\right)
 \end{aligned}$$

On en déduit la formule (centrée en espace)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \approx \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

à un terme d'ordre  $(\Delta x)^2$  près.

## Approximation de la dérivée en temps

⇒ **Schéma d'Euler explicite** (progressif en temps, ou "forward"):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

⇒ **Schéma d'Euler implicite** (rétrograde en temps, ou "backward"):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

## Schémas pour l'équation de diffusion en 1-d

$\Delta x = 1/(N + 1)$ , pour  $1 \leq j \leq N$ :

⇒ schéma d'Euler explicite: le plus simple

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(explicite  $\Leftrightarrow$  formule immédiate pour trouver  $u^{n+1}$  en fonction de  $u^n$ )

⇒ schéma d'Euler implicite: le plus stable

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(implicite  $\Leftrightarrow$  système linéaire pour trouver  $u^n$  en fonction de  $u^{n-1}$ )

**Initialisation:**  $u_j^0 = u_0(x_j)$  où  $u_0(x)$  est la condition initiale.

**Conditions aux limites:**  $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

## Consistance et précision

**Définition.** Un schéma de formule  $F(u_j^n) = 0$  est dit **consistant** avec l'équation qu'il discrétise si **l'erreur de troncature** vérifie

$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} F(u(t^n, x_j)) = 0$  **si et seulement si**  $u(t, x)$  est solution de l'équation.

On dit que le schéma est précis à l'ordre  $p$  en  $x$  et à l'ordre  $q$  en  $t$  si l'erreur de troncature est  $\mathcal{O}\left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\right)$ .

**Exercice.** Les schémas d'Euler explicite et implicite sont d'ordre 1 en temps et 2 en espace.



## Stabilité

On considère une des deux normes discrètes

$$\|u^n\|_2 = \left( \sum_{j=1}^N \Delta x |u_j^n|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|$$

**Définition.** Un schéma est dit **stable** pour une de ces normes s'il existe une constante  $K > 0$  indépendante de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale  $u^0$ .

Si cette inégalité a lieu sous une condition entre  $\Delta t$  et  $\Delta x$ , on dit que le schéma est **conditionnellement stable**.

Condition de stabilité  $L^\infty$

**Lemme.** Le schéma explicite est stable en norme  $L^\infty$  si et seulement si la condition CFL suivante est satisfaite

$$2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2.$$

**Démonstration (principe du maximum discret):** le schéma explicite est équivalent à

$$u_j^{n+1} = \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n$$

$u_j^{n+1}$  est une **combinaison convexe** si la condition CFL est satisfaite.

Donc, pour  $m \leq 0 \leq M$ , si  $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ , on a

$$m \leq u_j^0 \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \quad \Rightarrow \quad m \leq u_j^n \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \text{ et } \forall n \geq 0.$$

Si la condition CFL n'est pas satisfaite, il y a instabilité. Exemple:

$$u_j^0 = (-1)^j \quad \Rightarrow \quad u_j^n = (-1)^j \left( 1 - 4 \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \right)^n$$

qui tend (en valeur absolue) vers  $\infty$  car  $2\nu\Delta t > (\Delta x)^2 \Rightarrow 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} < -1$ .

**Exercice.** Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable en norme  $L^\infty$ .

## Stabilité $L^2$ : deux méthodes

1. Condition nécessaire de Von Neumann dans le cas périodique.
2. Inégalités d'énergie dans le cas général.

Dans le cas de **conditions aux limites périodiques** on peut utiliser une méthode **d'analyse de Fourier**.

Plutôt que de décrire en détails cette méthode, on rappelle une condition nécessaire très simple, dite de **Von Neumann**.

On considère une solution discrète particulière sous la forme d'un mode de Fourier, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j) \quad \text{avec} \quad x_j = j\Delta x.$$

En injectant cette solution dans la définition du schéma on trouve une formule pour le **coefficient d'amplification**  $A(k) \in \mathbb{C}$ .

**Condition nécessaire de stabilité de Von Neumann.** Le schéma est stable **seulement si** le coefficient d'amplification vérifie

$$|A(k)| \leq 1 \text{ pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

**Remarque.** Dans de nombreux cas on peut montrer que la condition **nécessaire** de Von Neumann est aussi suffisante (mais pas toujours !).

**Lemme.** La condition nécessaire de stabilité (en norme  $L^2$ ) de Von Neumann est satisfaite inconditionnellement par le schéma d'Euler implicite, et sous la condition CFL  $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$  par le schéma explicite.

**Démonstration.** Schéma implicite

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

dont on déduit, pour la solution particulière  $u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j)$ ,

$$A(k) \left( 1 + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} (-\exp(-2i\pi k\Delta x) + 2 - \exp(2i\pi k\Delta x)) \right) = 1$$

On vérifie que

$$A(k) = \frac{1}{1 + \frac{4\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sin(\pi k\Delta x))^2} \leq 1.$$

Pour le schéma explicite on trouve que  $A(k) = 1 - \frac{4\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sin(\pi k\Delta x))^2$ .

## Méthode d'inégalités d'énergie

Commençons par une inégalité d'énergie pour l'équation de diffusion.

**Lemme.** Soit  $u(t, x)$  une solution régulière de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x = 0) = u(t, x = 1) = 0 & \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } (0, 1) \end{array} \right.$$

Alors elle vérifie l'inégalité, dite **d'énergie**, pour tout  $t > 0$ ,

$$\int_0^1 |u(t, x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u_0(x)|^2 dx.$$

**Remarque.** Rien à voir, parfois, avec l'énergie physique !

**Démonstration.** On multiplie l'équation par  $u$  et on intègre par parties

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \nu \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \nu \left( u \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) - u \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \right) = 0.$$

Les termes de bord s'annulent à cause des conditions aux limites et, en intégrant en temps, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |u(t, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u(0, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(s, x) \right)^2 dx ds = 0$$

d'où l'on déduit le résultat en minorant par zéro la dernière intégrale.



**Lemme.** Soit  $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$  la solution discrète du schéma implicite. Alors elle vérifie l'inégalité

$$\|u^n\|_2 \leq \|u^0\|_2.$$

Donc, le schéma implicite est inconditionnellement stable en norme  $L^2$ .

**Démonstration.** On multiplie par  $(\Delta t \Delta x) u_j^n$  la formule du schéma implicite

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

et on somme en  $j$  (équivalent de l'intégration en espace) pour obtenir

$$\Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_j^{n-1}) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=1}^N u_j^n \left( (u_j^n - u_{j+1}^n) - (u_{j-1}^n - u_j^n) \right) = 0.$$

On réarrange la dernière somme (équivalent d'une intégration par parties)

$$\Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_j^{n-1}) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_{j+1}^n) - \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=0}^{N-1} u_{j+1}^n (u_j^n - u_{j+1}^n) = 0.$$

En utilisant la condition aux limites de Dirichlet, il vient

$$\Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n (u_j^n - u_j^{n-1}) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \sum_{j=0}^N (u_j^n - u_{j+1}^n)^2 = 0.$$

On minore par 0 la dernière somme

$$\Delta x \sum_{j=1}^N (u_j^n)^2 \leq \Delta x \sum_{j=1}^N u_j^n u_j^{n-1}$$

et par Cauchy-Schwarz  $\|u^n\|_2 \leq \|u^{n-1}\|_2$ , d'où le résultat.

**Remarque.** On a copié, dans le cas discret, la démonstration du cas continu !

## Convergence

**Théorème de Lax.** Un schéma linéaire, consistant et stable est convergent.

De plus, si le schéma est précis à l'ordre  $p$  en  $x$  et à l'ordre  $q$  en  $t$  alors la vitesse de convergence est  $\mathcal{O}\left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\right)$ .

**Démonstration.** Voir le polycopié.

## (2) Equation de diffusion stationnaire

Pour bien comprendre, on refait la même chose !

$$\begin{cases} -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(x)u = f(x) & \text{dans } (0, 1) \\ u(x=0) = u(x=1) = 0 \end{cases}$$

avec  $\nu > 0$ , la source  $f(x) \in L^2(0, 1)$  et l'absorption  $\sigma(x) \geq 0$ .

**Lemme (estimation d'énergie).** La solution  $u$  vérifie

$$\int_0^1 \left( \nu |u'|^2 + \sigma |u|^2 \right) dx = \int_0^1 f u dx,$$

donc il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute source  $f$ ,

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq C \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Schéma en stationnaire

$$\nu \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{(\Delta x)^2} + \sigma_j u_j = f_j \quad 1 \leq j \leq N$$

avec les conditions aux limites:  $u_0 = u_{N+1} = 0$ .

Il faut résoudre un système linéaire pour trouver la solution discrète.

**Lemme.** La matrice du système est inversible.

**Définition.** Un schéma est dit **stable** pour la norme  $\|u\|$  s'il existe une constante  $K > 0$  indépendante de  $\Delta x$  telle que

$$\|(u_j)\| \leq K \|(f_j)\| \text{ quelle que soit la source } f.$$

## Stabilité $L^2$ et convergence en stationnaire

On utilise l'approche d'inégalité d'énergie.

Norme  $L^2$  discrète:  $\|(u_j)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N \Delta x |u_j|^2}$ .

**Lemme 1.** La solution discrète vérifie

$$\nu \sum_{j=1}^N \frac{(u_j - u_{j-1})^2}{\Delta x} + \sum_{j=1}^N \Delta x \sigma_j (u_j)^2 = \sum_{j=1}^N \Delta x u_j f_j.$$

**Lemme 2.** Inégalité de Poincaré discrète: pour tout vecteur  $(v_j)$  avec  $v_0 = v_{N+1} = 0$

$$\sum_{j=1}^N \Delta x (v_j)^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta x \left( \frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta x} \right)^2.$$

**Conclusion:** le schéma est stable  $L^2$  car  $\|(u_j)\|_2 \leq \frac{1}{2\nu} \|(f_j)\|_2$ .

Preuves des Lemmes 1 et 2

On multiplie le schéma par  $\Delta x u_j$  et on "intègre par parties" en discret (réarrangement de la somme):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \Delta x \nu u_j \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{(\Delta x)^2} &= \nu \sum_{j=1}^N u_j \frac{(u_j - u_{j-1}) - (u_{j+1} - u_j)}{\Delta x} \\ &= \nu \sum_{j=1}^N u_j \frac{(u_j - u_{j-1})}{\Delta x} - \nu \sum_{j=2}^{N+1} u_{j-1} \frac{(u_j - u_{j-1})}{\Delta x} = \nu \sum_{j=1}^N \frac{(u_j - u_{j-1})^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

**Inégalité de Poincaré:**

$$v_j = \sum_{k=1}^j (v_k - v_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad (v_j)^2 \leq j \sum_{k=1}^N (v_k - v_{k-1})^2$$

Or  $\sum_{j=1}^N j = N(N+1)/2 \leq (2(\Delta x)^2)^{-1}$ . D'où le résultat.

## Convergence

**Théorème de Lax.** Le schéma converge au sens où la fonction

$$u^{\Delta x}(x) = u_j \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad \text{avec} \quad x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$$

converge vers la solution exacte  $u$ , i.e.,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|u^{\Delta x} - u\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

**Preuve.** Supposons que  $u \in C^4[0, 1]$  (c'est vrai si  $f$  et  $\sigma$  sont régulières). La consistance du schéma donne

$$\left| \frac{-u(x - \Delta x) + 2u(x) - u(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} + u''(x) \right| \leq \frac{(\Delta x)^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u''''(x)|$$



Soit l'erreur discrète  $e_j = u_j - u(x_j)$  qui vérifie

$$\nu \frac{-e_{j-1} + 2e_j - e_{j+1}}{(\Delta x)^2} + \sigma_j e_j = \epsilon_j \quad 1 \leq j \leq N$$

avec les conditions aux limites,  $e_0 = e_{N+1} = 0$ , et le second membre

$$|\epsilon_j| \leq \frac{(\Delta x)^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u''''(x)|$$

On déduit de l'estimation d'énergie discrète

$$\|(e_j)\|_2 \leq \frac{1}{2\nu} \|(\epsilon_j)\|_2 \leq \frac{(\Delta x)^2}{24\nu} \max_{x \in [0,1]} |u''''(x)|$$

Enfin,  $\|(e_j)\|_2 = \|u^{\Delta x} - P^{\Delta x}u\|_{L^2(0,1)}$  et  $\|u - P^{\Delta x}u\|_{L^2(0,1)} \leq C\Delta x$  où

$$P^{\Delta x}u(x) = u(x_j) \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}.$$

Stabilité  $L^\infty$  et convergence en stationnaire

**Lemme.** Le schéma est stable  $L^\infty$ .

**Preuve.** Vérifions le principe du maximum discret. On suppose  $f \geq 0$  ; montrons que  $u_j \geq 0$ .

S'il existe  $u_j < 0$ , soit  $j_0$  le plus petit indice tel que  $u_{j_0} \leq u_j$  pour tout  $j$  et  $u_{j_0} < u_{j_0-1}$  (existe forcément car  $u_0 = 0$ ). On a

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{j_0} (\Delta x)^2 = \nu (-u_{j_0-1} + 2u_{j_0} - u_{j_0+1}) + \sigma_{j_0} (\Delta x)^2 u_{j_0} \\ &= \nu ((u_{j_0} - u_{j_0-1}) + (u_{j_0} - u_{j_0+1})) + \sigma_{j_0} (\Delta x)^2 u_{j_0} < 0 \end{aligned}$$

Contradiction, donc  $u_j \geq 0$ .

**Théorème de Lax.** Le schéma converge au sens où

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| = 0.$$

### (3) Equation de transport

On suppose  $V > 0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, 0) = g(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Si on étend  $u_0(x)$  par 0 en dehors de l'intervalle  $(0, 1)$ , et  $g(t)$  par 0 pour  $t < 0$ , la **solution exacte** est

$$u(t, x) = u_0\left(x - Vt\right) + g\left(t - \frac{x}{V}\right).$$

## Schéma décentré amont (upwind)

Un bon schéma: **schéma décentré amont**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0.$$

On va chercher l'information en **remontant le courant** (**une des idées majeures de l'analyse numérique**).

Autres schémas possibles: Lax-Friedrichs (trop diffusif), Lax-Wendroff (précis mais dispersif).

Condition aux limites du schéma:  $u_0^n = g(t^n)$ .

## Analyse du schéma décentré amont

**Lemme.** Le schéma décentré amont est stable  $L^\infty$  sous la condition CFL

$$|V|\Delta t \leq \Delta x.$$

Il est précis d'ordre 1 seulement (sauf si  $|V|\Delta t = \Delta x$ ). Il est donc convergent.

**Preuve:** on peut le réécrire sous la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n,$$

qui est une combinaison convexe si  $0 \leq V\Delta t \leq \Delta x$ , donc il vérifie un **principe du maximum discret**. L'erreur de troncature est

$$E = \frac{|V|}{2} (-\Delta x + |V|\Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2).$$

**Exercice.** Montrer que le schéma explicite **centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \text{ est instable en norme } L^2.$$

Le schéma diamant (ou en croix), dû à Carlson

C'est un schéma centré qui utilise les inconnues intermédiaires

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} \approx u(t^{n+1/2}, x_{j+1/2}).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ u_j^{n+1} + u_j^n = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2}. \end{array} \right.$$

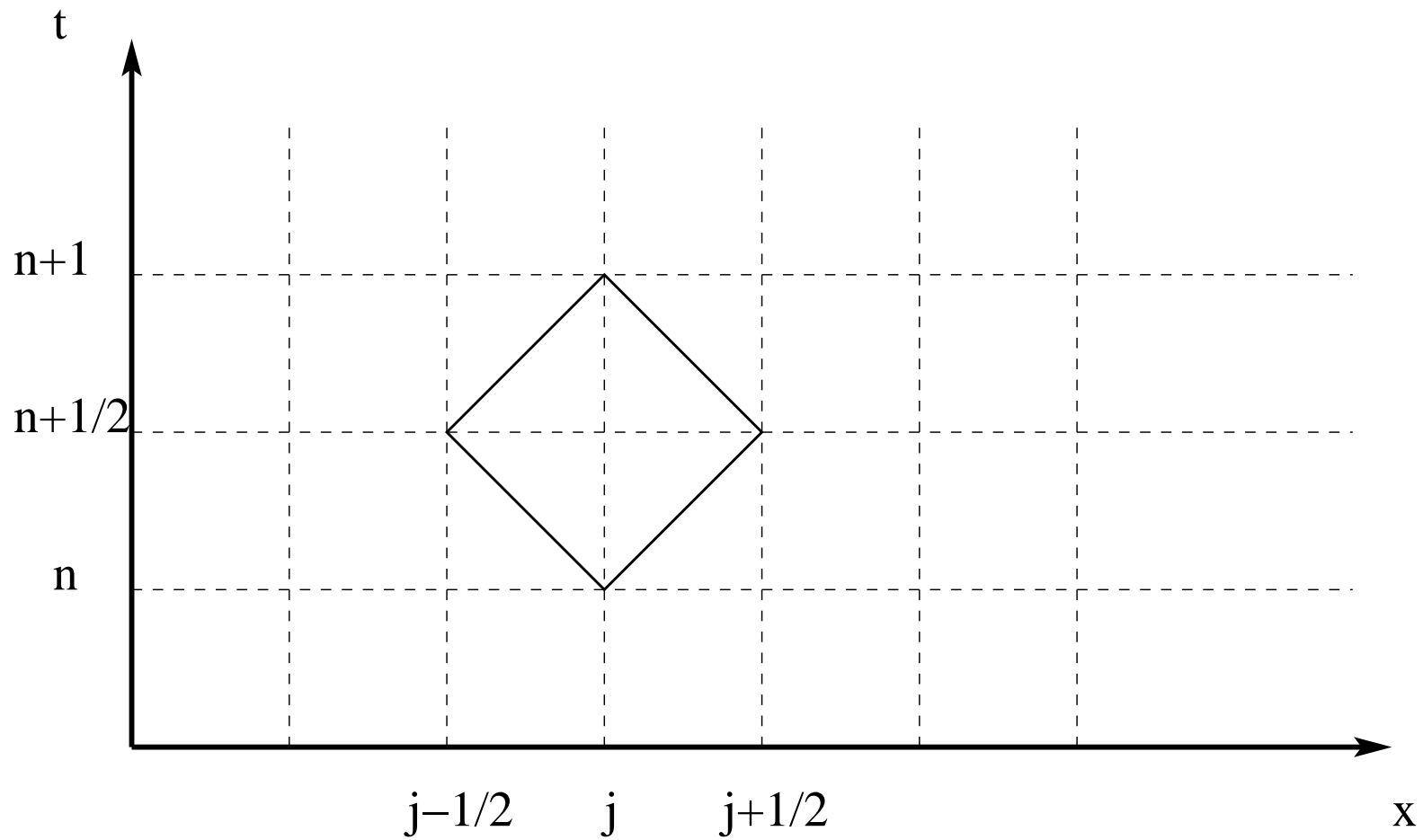
La deuxième relation est dite "diamant".

2 fois plus d'inconnues, mais 2 fois plus d'équations aussi !

Schéma très populaire pour Boltzmann linéaire.

Condition aux limites du schéma:  $u_0^n = g(t^n)$ .

Origine du nom diamant (ou croix)



## Résolution du schéma diamant

On élimine l'inconnue  $u_j^{n+1} = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2} - u_j^n$  pour se ramener au schéma (implicite à première vue)

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} \left( 1 + \frac{V \Delta t}{\Delta x} \right) + u_{j-1/2}^{n+1/2} \left( 1 - \frac{V \Delta t}{\Delta x} \right) = 2u_j^n,$$

qui permet de calculer les valeurs  $(u_{j+1/2}^{n+1/2})_j$  en fonction des valeurs précédentes  $(u_j^n)_j$ .

Si  $V > 0$  on calcule  $u_{1/2}^{n+1/2}$  en fonction de la condition aux limites  $g$  et de la relation diamant (voir polycopié).



Schéma implicite ou pas ?

La résolution du schéma est équivalente au système linéaire  $Au^{n+1/2} = 2u^n$

$$A = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & & & 0 \\ 1-c & 1+c & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-c & 1+c & 0 \\ 0 & & & 1-c & 1+c \end{pmatrix} \quad \text{avec } c = \frac{V\Delta t}{\Delta x}.$$

Pour  $V > 0$ , la matrice  $A$  est inversible et **triangulaire !**

**Méthode des caractéristiques discrète:** on calcule de proche en proche les valeurs  $u_{j+1/2}^{n+1/2}$  pour  $j$  croissant (si  $V > 0$ ).

**En pratique le schéma est donc explicite !**

## Analyse du schéma diamant

**Lemme 1.** Le schéma diamant est consistant et précis à l'ordre 2 en espace et temps.

**Preuve.** Faire un développement de Taylor autour du point  $(t^{n+1/2}, x_j)$ .

**Lemme 2.** Le schéma diamant est **inconditionnellement** stable et convergent en norme  $L^2$ .

**Lemme 3 (inégalité d'énergie).** La solution  $u(t, x)$  vérifie

$$\int_0^1 u(t, x)^2 dx \leq \int_0^1 u_0(x)^2 dx + \int_0^t V g(t)^2 dt.$$

**Preuve.** Multiplier l'équation de transport par  $u$  et intégrer par parties.

## Analyse du schéma diamant (suite)

### Preuve du lemme 2. Intégration par parties discrètes.

On multiplie le schéma par  $(u_j^{n+1} + u_j^n)$  et on utilise la relation diamant pour le deuxième terme

$$\frac{(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2}{\Delta t} + V \frac{(u_{j+1/2}^{n+1/2})^2 - (u_{j-1/2}^{n+1/2})^2}{\Delta x} = 0.$$

En sommant sur  $j$ , puisque la somme est "téléscopique" en  $j + 1/2$ , on obtient

$$\sum_{j=1}^N (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=1}^N (u_j^n)^2 + \frac{V \Delta t}{\Delta x} (u_{1/2}^{n+1/2})^2.$$

On somme ensuite sur  $n$ , avec encore une somme "téléscopique",

$$\sum_{j=1}^N \Delta x (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=1}^N \Delta x (u_j^0)^2 + V \sum_{k=0}^n \Delta t (u_{1/2}^{k+1/2})^2$$

## Analyse du schéma diamant (fin)

La condition aux limites d'entrée est (tout calcul fait)

$$\begin{aligned} u_{1/2}^{n+1/2} &= \frac{g(t_n) + g(t_{n+1})}{2} + \frac{g(t_n) - g(t_{n+1})}{2 \frac{V\Delta t}{\Delta x}} \\ &= g(t_{n+1/2}) - \frac{\Delta x}{2V} g'(t_{n+1/2}) + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \Delta x\right), \end{aligned}$$

d'où la stabilité  $L^2$

$$\sum_{j=0}^N \Delta x (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=0}^N \Delta x (u_j^0)^2 + V \sum_{k=0}^n \Delta t (g^{k+1/2})^2 + \mathcal{O}\left(\Delta x + (\Delta t)^2\right)$$

**Théorème de Lax.** Le schéma converge en norme  $L^2$ .

**Démonstration.** Voir polycopié.

## (4) Transport stationnaire

Géométrie de **plaque infinie** (“slab”) dans le cas mono-groupe isotrope sans collisions

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) + \sigma(x)u(x, \mu) = f(x, \mu) \text{ pour } (x, \mu) \in (-\ell, +\ell) \times (-1, +1) \\ u(-\ell, \mu) = 0 \text{ pour } \mu > 0, \quad u(+\ell, \mu) = 0 \text{ pour } \mu < 0, \end{cases}$$

où  $\sigma(x) \geq 0$  est la section efficace d'absorption,  $f(x, \mu)$  est un terme source.

On note  $\mu_k \neq 0$  les vitesses discrètes.

On raisonne “vitesse par vitesse”: pour fixer les idées on suppose  $\mu_k > 0$ .

## Attention ! Changement de notations.

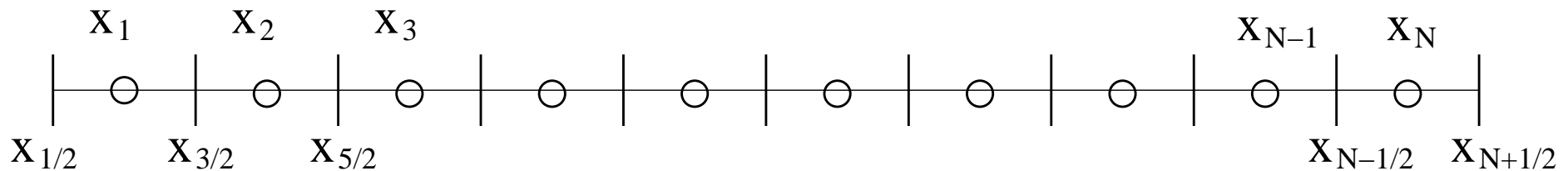
Pour être conforme aux notations usuelles dans la résolution de l'équation de Boltzmann, on change notre définition du maillage.

Les points du maillage délimitent des mailles,

$$x_{j+1/2} = -\ell + j\Delta x \text{ pour } j \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ et } \Delta x = \frac{2\ell}{N},$$

Les points milieux sont maintenant définis comme centre des mailles par

$$x_j = -\ell + (j - 1/2)\Delta x \text{ pour } j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$



Ce changement s'interprète comme une méthode de volumes finis.

## Schéma diamant stationnaire

Avec la notation  $\sigma_j \approx \sigma(x_j)$  et  $f_j^k \approx f(x_j, \mu_k)$

$$\mu_k \frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = f_j^k \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

avec la formule “diamant”

$$u_j^k = \frac{u_{j+1/2}^k + u_{j-1/2}^k}{2}.$$

Condition aux limites

$$u_{1/2}^k = 0 \text{ pour } \mu_k > 0$$

**Méthode des caractéristiques discrètes:** on calcule les valeurs  $u_{j+1/2}^k$  pour  $j$  croissant (équivalent à la résolution d'un système linéaire triangulaire).

## Schéma diamant stationnaire (suite)

On doit **éviter la valeur 0** pour la vitesse discrète  $\mu_k$  si  $\sigma_j \equiv \sigma$  peut s'annuler.

$$u_{j+1/2}^k = \frac{(2\mu_k - \sigma_j \Delta x) u_{j-1/2}^k + 2\Delta x f_j^k}{2\mu_k + \sigma_j \Delta x}$$

$$u_{j+1/2}^k = \frac{2\Delta x}{2\mu_k + \sigma \Delta x} \sum_{i=1}^j (A_k)^{j-i} f_i^k \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{2\mu_k - \sigma \Delta x}{2\mu_k + \sigma \Delta x}$$

**Lemme.** Le schéma diamant est consistant et précis d'ordre 2 en espace. Il est inconditionnellement stable  $L^\infty$  (donc convergent), au sens où

$$|u_{j+1/2}^k| \leq \frac{2\ell}{|\mu_k|} \max_{x \in (-\ell, +\ell)} |f(x, \mu_k)| \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Il vérifie le principe du maximum discret sous la condition (restrictive)

$$\Delta x \leq \frac{2 \min_k |\mu_k|}{\sigma}.$$



## Analyse du schéma diamant

**Remarque.** Si on tient absolument au principe du maximum discret il faut utiliser le schéma décentré amont ou bien une hybridation de ce schéma avec celui diamant.

**Remarque.** Si  $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ , on peut montrer que le schéma diamant est stable  $L^2$ .