ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, X. Blanc, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 4 Mars 2015 (2 heures)

1 Modèle aux moments pour l'équation de transport

1. On pose

$$I_{ij} = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega_i \Omega_j d\Omega.$$

La mesure de Lebesgue sur la sphère (ainsi que la sphère elle-même) est invariante par la symétrie orthogonale d'hyperplan $\{x_j = 0\}$. Par cette symétrie, $\Omega_i \Omega_j$ est changé en son opposé, sauf si $i = j$. Ainsi, $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par ailleurs, l'intégrale

$$I_{jj} = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega_j^2 d\Omega,$$

est indépendante de j, car la mesure de Lebesgue sur la sphère est invariante par toute rotation centrée sur l'origine. Donc

$$I_{jj} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega_k^2 d\Omega \right) = \frac{1}{N} \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \left(\sum_{k=1}^{N} \Omega_k^2 \right) d\Omega = \frac{1}{N}.$$

2. Le premier moment de f se calcule comme suit :

$$\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} f(t,x,\Omega) d\Omega = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} E(t,x) d\Omega + \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega \cdot F(t,x) d\Omega.$$

Pour le premier terme, l'intégrande est constante, et pour le deuxième, c'est une fonction impaire de Ω. Donc

$$\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} f(t,x,\Omega) d\Omega = E(t,x).$$

Pour le deuxième moment, on a :

$$\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega f(t,x,\Omega) d\Omega = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega E(t,x) d\Omega + \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega \left(\Omega \cdot F(t,x) \right) d\Omega.$$

Ici, c'est le premier terme qui est l'intégrale d'une fonction impaire, donc qui est nul. On obtient donc, pour la composante j $(1 \leq j \leq N)$ de ce vecteur,

$$\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega_j f(t,x,\Omega) d\Omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega_j \Omega_i F_i(t,x) d\Omega.$$

En appliquant le résultat de la question précédente, on a donc

$$\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega_j f(t,x,\Omega)d\Omega = \frac{1}{N}F_j(t,x),$$

pour tout indice j, c'est-à-dire

$$\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega f(t,x,\Omega)d\Omega = \frac{1}{N}F(t,x).$$

3. On intègre l'équation vérifiée par f par rapport à Ω, et on a, en divisant le résultat par $|S^{N-1}|$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon\,|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega\cdot\nabla_x f(t,x,\Omega)d\Omega + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}E = \frac{\sigma}{\varepsilon^2}E.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega\cdot\nabla_x f(t,x,\Omega)d\Omega = \mathrm{div}_x\left(\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega f(t,x,\Omega)d\Omega\right) = \mathrm{div}_x\left(\frac{1}{N}F\right).$$

D'où

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon N}\mathrm{div}_x(F) = 0.$$

4. On multiplie l'équation de Boltzmann linéaire par Ω et on prend la moyenne en Ω, ce qui donne :

$$\frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon\,|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega\ \Omega\cdot\nabla_x f(t,x,\Omega)d\Omega + \frac{1}{N}\frac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0,$$

car le membre de gauche de l'équation ne dépend pas de Ω. Le deuxième terme s'écrit aussi

$$\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega\ \Omega\cdot\nabla_x f(t,x,\Omega)d\Omega = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega\ \Omega_j f(t,x,\Omega)d\Omega\right)$$

Calculons, comme précédemment, l'intégrale apparaissant ci-dessus : pour tout indice i, on a

$$\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega_i\Omega_j f(t,x,\Omega)d\Omega = E(t,x)\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega_i\Omega_j d\Omega = E(t,x)\frac{1}{N}\delta_{ij},$$

car le terme $\displaystyle\int_{S^{N-1}} \Omega_i\Omega_j\ \Omega\cdot F d\Omega$ s'annule par imparité en Ω. En reportant cela dans l'équation ci-dessus, on a donc

$$\frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} \Omega_i\ \Omega\cdot\nabla_x f(t,x,\Omega)d\Omega = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ij}E(t,x)\right) = \frac{1}{N}\frac{\partial E}{\partial x_i}.$$

On en déduit donc

$$\frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon N}\nabla_x E + \frac{1}{N}\frac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_x E + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0.$$

2 Limite diffusion pour le modèle aux moments

1. On insère le développement en puissances de ε donné par l'énoncé, à savoir

$$E = E_0 + \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \ldots, \quad F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \ldots,$$

dans le système vérifié par E et F. En identifiant les puissances de ε, on a, pour le terme d'ordre ε^{-2},

$$F_0 = 0.$$

2. De même, pour le terme d'ordre ε^{-1}, on a d'une part $\mathrm{div}_x(F_0) = 0$, qui n'apporte pas d'information supplémentaire, et d'autre part $\nabla_x E_0 + \sigma F_1 = 0$, soit

$$\nabla_x E_0 = -\sigma F_1.$$

3. Enfin, en utilisant l'ordre ε^0 de la première équation, on obtient

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{1}{N}\mathrm{div}_x\,(F_1) = 0,$$

donc, en utilisant la question précédente,

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{1}{N}\mathrm{div}_x\left(\frac{1}{\sigma}\nabla_x E_0\right) = 0,$$

Il s'agit bien là d'une équation de diffusion. Comme on a supposé $\sigma > 0$, on a bien un coefficient de diffusion strictement positif.

3 Schéma numérique pour le modèle aux moments

1. En sommant les deux équations du système, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0.$$

De même, en soustrayant les deux équations, on a

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0.$$

En remarquant que $2F = u - v$, on obtient donc le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon^2}(u - v) = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon^2}(v - u) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

2. Dans le première équation du système (1), la vitesse est égale à $1/\varepsilon$, donc est positive. Le schéma décentré amont consiste à remonter le courant pour les différences finies en espace, donc à décentrer vers la gauche. Au contraire, la vitesse est négative pour la deuxième équation, et on décentre donc vers la droite. Le schéma correspondant s'écrit donc

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\varepsilon \Delta x} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon^2}\left(u_j^n - v_j^n\right) = 0, \\ \dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t} - \dfrac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\varepsilon \Delta x} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon^2}\left(v_j^n - u_j^n\right) = 0. \end{cases}$$

3. Considérons une solution régulière du système, que l'on note (u, v). En utilisant un développement de Taylor, on a

$$\frac{u((n+1)\Delta t, j\Delta x) - u(n\Delta t, j\Delta x)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, j\Delta x) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n\Delta t + \xi_1 \Delta t, j\Delta x), \quad \xi_1 \in]0,1[,$$

$$\frac{u(n\Delta t, j\Delta x) - u(n\Delta t, (j-1)\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, j\Delta x) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, j\Delta x + \xi_2 \Delta x), \quad \xi_2 \in]0,1[.$$

Ce qui donne une erreur de consistance pour la première ligne du système qui vérifie

$$E_1 = O\left(\Delta t\right) + O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon}\right).$$

De même, l'erreur de consistance de la deuxième équation vérifie

$$E_2 = O\left(\Delta t\right) + O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon}\right).$$

4. La limite diffusion étant obtenue en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, l'estimation de la question précédente indique que le schéma ne reproduit pas la limite diffusion.

5. On fait la somme puis la différence des équations définissant le système discrétisé sur u et v, puis on utilise les égalités $u + v = 2E$ et $u - v = 2F$. On obtient alors

$$\begin{cases} \dfrac{E_j^{n+1}-E_j^n}{\Delta t} + \dfrac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \dfrac{2E_j^n - E_{j-1}^n - E_{j+1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \dfrac{F_j^{n+1}-F_j^n}{\Delta t} + \dfrac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \dfrac{2F_j^n - F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon^2}F_j^n = 0, \end{cases}$$

6. On développe au point $\left(t, x_{j+1/2}\right)$:

$$E\left(t, x_j\right) = E\left(t, x_{j+1/2}\right) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial E}{\partial x}\left(t, x_{j+1/2}\right) + \frac{\Delta x^2}{4}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\left(t, x_j + \xi \frac{\Delta x}{2}\right), \quad \xi \in]0,1[.$$

La deuxième équation du système donne, en utilisant que $\partial F / \partial t$ est bornée,

$$\frac{\partial E}{\partial x}(t, x_j) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}F(t, x_j) + O(\varepsilon)$$

Comme de plus $\partial^2 E/\partial x^2$ est bornée, on a donc

$$E\left(t, x_j\right) = E\left(t, x_{j+1/2}\right) + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F(t, x_j) + O(\varepsilon \Delta x) + O\left(\Delta x^2\right).$$

De même, on a

$$E\left(t, x_{j+1}\right) = E\left(t, x_{j+1/2}\right) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E}{\partial x}\left(t, x_{j+1/2}\right) + \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\left(t, x_j + \xi \frac{\Delta x}{2}\right), \quad \xi \in]0,1[.$$

On utilise à nouveau la deuxième équation, et on obtient de là encore

$$E\left(t, x_{j+1}\right) = E\left(t, x_{j+1/2}\right) - \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F(t, x_j) + O(\varepsilon \Delta x) + O\left(\Delta x^2\right).$$

De même, on a $F(t, x_j) = F\left(t, x_{j+1/2}\right) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F}{\partial x}\left(t, x_{j+1/2} + \xi \frac{\Delta x}{2}\right)$, pour un certain $\xi \in]0,1[$. La deuxième équation du système et le fait que E et F sont bornées ainsi que leurs dérivées implique que $\frac{\partial F}{\partial x} = O(\varepsilon)$, donc

$$F(t, x_j) = F\left(t, x_{j+1/2}\right) + O(\varepsilon \Delta x).$$

De même, on obtient

$$F\left(t, x_{j+1}\right) = F\left(t, x_{j+1/2}\right) + O(\varepsilon \Delta x).$$

7. Les équations données par l'énoncé sont équivalentes, après somme et différence, à

$$F_j^n + F_{j+1}^n + E_j^n - E_{j+1}^n = \left(2 + \frac{\sigma \Delta x}{\varepsilon}\right) F_{j+1/2}^n,$$

$$E_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\left(E_j^n + F_j^n + E_{j+1}^n - F_{j+1}^n\right).$$

Ceci donne effectivement une unique valeur du couple $\left(E_{i+1/2}^n, F_{i+1/2}^n\right)$, à savoir

$$F_{j+1/2}^n = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}\left(F_j^n + F_{j+1}^n + E_j^n - E_{j+1}^n\right),$$

$$E_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\left(E_j^n + F_j^n + E_{j+1}^n - F_{j+1}^n\right).$$

Le calcul qui vient d'être fait peut être fait à nouveau en partant des développements de Taylor de la question précédente. Ils donnent alors :

$$\begin{aligned} F\left(n\Delta t, x_{j+1/2}\right) = {} & \frac{\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}\left(F\left(n\Delta t, x_j\right) + F\left(n\Delta t, x_{j+1}\right) + E\left(n\Delta t, x_j\right) - E\left(n\Delta t, x_{j+1}\right)\right) \\ & + O\left(\frac{\varepsilon^2 \Delta x}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \Delta x^2}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(n\Delta t, x_{j+1/2}\right) = {} & \frac{1}{2}\left(E\left(n\Delta t, x_j\right) + F\left(n\Delta t, x_j\right) + E\left(n\Delta t, x_{j+1}\right) - F\left(n\Delta t, x_{j+1}\right)\right) \\ & + O\left(\frac{\varepsilon^2 \Delta x}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \Delta x^2}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}\right). \end{aligned}$$

Les restes tendent bien vers 0 quand $\Delta x \to 0$.

8. On utilise les valeurs de $F^n_{i+1/2}$ et de $E^n_{i+1/2}$ obtenues à la question précédente dans le schéma proposé. On obtient bien

$$\left\{\begin{aligned} \frac{E_j^{n+1}-E_j^n}{\Delta t} + \frac{F^n_{j+1}-F^n_{j-1}}{\Delta x(2\varepsilon+\sigma\Delta x)} + \frac{2E^n_j - E^n_{j-1} - E^n_{j+1}}{\Delta x(2\varepsilon+\sigma\Delta x)} = 0,\\ \frac{F_j^{n+1}-F_j^n}{\Delta t} + \frac{E^n_{j+1}-E^n_{j-1}}{2\varepsilon\Delta x} + \frac{2F^n_j - F^n_{h+1} - F^n_{j-1}}{2\varepsilon\Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}F^n_j = 0,\end{aligned}\right.$$

9. On utilise à nouveau un développement en puissances de ε, et on identifie les puissances dans le schéma. On pose donc

$$E^n_j = E^{n,0}_j + \varepsilon E^{n,1}_j + \varepsilon^2 E^{n,2}_j + \dots, \quad F^n_j = F^{n,0}_j + \varepsilon F^{n,1}_j + \varepsilon^2 F^{n,2}_j + \dots$$

Comme Δt et Δx sont fixés indépendamment de ε, la première ligne ne contient que des termes d'ordre ε^0 ou plus élevé en ε. Pour la deuxième ligne, l'ordre ε^{-2} donne

$$F^{n,0}_j = 0.$$

En reportant cela dans le terme d'ordre ε^0 de la première équation, on a

$$\frac{E_j^{n+1,0}-E_j^{n,0}}{\Delta t} + \frac{2E^{n,0}_j - E^{n,0}_{j-1} - E^{n,0}_{j+1}}{\Delta x(\sigma\Delta x)} = 0,$$

qui est bien une discrétisation consistante de l'équation

$$\frac{\partial E^0}{\partial t} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 E^0}{\partial x^2} = 0.$$

10. En utilisant des développements de Taylor, on a :

$$\frac{E\left((n+1)\Delta t, x_j\right) - E(n\Delta t, x_j)}{\Delta t} = \frac{\partial E}{\partial t}(n\Delta t, x_j) + O\left(\Delta t\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{F\left(n\Delta t, x_{j+1}\right) - F\left(n\Delta t, x_{j-1}\right)}{\Delta x(2\varepsilon+\sigma\Delta x)} = \frac{2}{2\varepsilon+\sigma\Delta x}\frac{\partial F}{\partial x}(n\Delta t, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2\varepsilon+\sigma\Delta x}\frac{1}{3}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(n\Delta t, x_j)\\ + O\left(\frac{\Delta x^4}{2\varepsilon+\sigma\Delta x}\right),\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{2E(n\Delta t, x_j) - E(n\Delta t, x_{j-1}) - E(n\Delta t, x_{j+1})}{\Delta x(2\varepsilon+\sigma\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{2\varepsilon+\sigma\Delta x}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(n\Delta t, x_j)\\ + O\left(\frac{\Delta x^3}{2\varepsilon+\sigma\Delta x}\right).\end{aligned}$$

Dans les estimations ci-dessus, les "O" sont entendus dans la limite $\Delta x \to 0$, de façon uniforme en ε. L'erreur de consistance pour la première ligne du système est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j^n := \frac{E\left((n+1)\Delta t, x_j\right) - E(n\Delta t, x_j)}{\Delta t} + \frac{F\left(n\Delta t, x_{j+1}\right) - F\left(n\Delta t, x_{j-1}\right)}{\Delta x(2\varepsilon + \sigma\Delta x)} \\ + \frac{2E(n\Delta t, x_j) - E(n\Delta t, x_{j-1}) - E(n\Delta t, x_{j+1})}{\Delta x(2\varepsilon + \sigma\Delta x)} - \frac{\partial E}{\partial t}(n\Delta t, x_j) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x}(n\Delta t, x_j),\end{aligned}$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j^n = \frac{-\sigma\Delta x}{\varepsilon(2\varepsilon + \sigma\Delta x)}\frac{\partial F}{\partial x}(n\Delta t, x_j) - \frac{\Delta x}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(n\Delta t, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\frac{1}{3}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(n\Delta t, x_j) \\ + O(\Delta t) + O\left(\frac{\Delta x^4}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\right) + O\left(\frac{\Delta x^3}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\right).\end{aligned}$$

Comme E et F sont solutions du système de départ, on a

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = -\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial^4 E}{\partial t \partial x^2} = O(\varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = -\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = O(\varepsilon),$$

donc

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_j^n = O(\Delta t) + O\left(\frac{\varepsilon^2\Delta x}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\right) + O\left(\frac{\varepsilon\Delta x^2}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\right) + O\left(\frac{\Delta x^3}{2\varepsilon + \sigma\Delta x}\right).$$

On a, de plus,

$$\frac{\varepsilon^2\Delta x}{2\varepsilon + \sigma\Delta x} \leq \frac{1}{2}\varepsilon\Delta x, \qquad \frac{\varepsilon\Delta x^2}{2\varepsilon + \sigma\Delta x} \leq \frac{1}{2}\Delta x^2, \qquad \frac{\Delta x^3}{2\varepsilon + \sigma\Delta x} \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma}.$$

On obtient donc

$$\mathcal{E}_j^n = O\left(\Delta t + \varepsilon\Delta x + \Delta x^2\right).$$