Théorie du calcul critique
Approche analytique ou continue

Nous appliquons à divers problèmes les méthodes duales (ou adjointes) pour le calcul critique. Les étapes de justification pourront s'effectuer si nécessaire sur les problèmes discrets.

Exercice I.

Soit le modèle structuré en âge pour une population de cellules

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x n = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ n(t, x = 0) = \int_0^\infty B(y) n(t, y) dy, & \\ n(t = 0, x) = n_0(x). & \end{cases}$$

Le coefficient de natalité B vérifie

$$0 \le B(y) \le C, \quad 1 < \int_0^\infty B(y) dy < \infty.$$

1. Écrire le problème spectral direct (de solution λ, N). Montrer qu'il possède une unique solution $\lambda > 0$, $N > 0$.

2. Écrire le problème spectral adjoint (de solution ϕ). Montrer qu'il possède une unique solution $\phi > 0$. Calculer ϕ pour $B(x) = 1.2\ \mathbf{I}_{\{x<1\}}$, et pour $B(x) = 3\ \mathbf{I}_{\{0.5<x<1\}}$.

3. Comment s'appelle ϕ dans un calcul de neutronique ?

4. Écrire formellement ce que vaut $n(t, \cdot)$ pour t grand. La preuve complète se trouve dans *Transport Equations in Biology*, page 64.

Exercice II.

Un problème avec source. Soit le problème à deux groupes de neutrons

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (d_1 \nabla \phi_1) + \sigma_{a1} \phi_1 = \nu \sigma_{f2} \phi_2 + s(x), \\ -\nabla \cdot (d_2 \nabla \phi_2) + \sigma_{a2} \phi_2 = \sigma_r \phi_1. \end{cases}$$

On considère des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord du domaine. Les coefficients sont constants avec les encadrements

$$\sigma_{a1} > \sigma_r, \quad \sigma_{a2} > \sigma_{f2}.$$

Le nombre de neutrons rapides ϕ_1 créés lors d'une fission est $\nu > 1$. La source est positive ou nulle $s(x) \ge 0$.

1. On prend $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0$. Montrer que la suite

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (d_1 \nabla \phi_1^{(p+1)}) + \sigma_{a1} \phi_1^{(p+1)} = \nu \sigma_{f2} \phi_2^{(p)} + s(x), \\ -\nabla \cdot (d_2 \nabla \phi_2^{(p+1)}) + \sigma_{a2} \phi_2^{(p+1)} = \sigma_r \phi_1^{(p)} \end{cases}$$

est positive.

2. Montrer que la convergence géométrique de la suite vers une limite est possible, à condition que ν soit suffisamment petit. Quels sont les liens avec le calcul critique ?

3. Que se passe-t-il pour

$$\sigma_{a1} \le \sigma_r, \quad \sigma_{a2} \le \sigma_{f2} \ ?$$

Exercice III. Analyse de sensibilité.

On suppose que le réacteur (décrit à l'exercice II) est légèrement sous critique. Au cours du fonctionnement normal, les paramètres (source, les matériaux sont usés, ...) vont changer légèrement. Il faut alors recaler le réacteur.

1. On note $(\sigma_{a_1}, \nu) \mapsto \lambda$ la fonction égale au facteur effectif. Montrer que

$$\partial_\nu \lambda = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Expliquer pourquoi cette relation est triviale et sans intérêt.

2. Montrer que

$$\partial_{\sigma_{a_1}} \lambda < 0.$$

Interpréter physiquement.

3. Quelle action faut-il tenter de faire si λ est plus petit au bout d'un an en fonctionnement normal ?

Exercice IV.

Nous reprenons l'exercice **I** avec des hypothèses différentes. Soit le modèle structuré en taille dans lequel les cellules de taille x se décomposent en deux cellules de taille $\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + \partial_x n(t,x) + B(x)n(t,x) \\ \qquad\qquad = 4B(2x)n(t,2x), \qquad t>0,\ x>0, \\ n(t,x=0)=0, \\ n(t=0,x)=n_0(x). \end{cases}$$

Il n'y a pas de création de cellules de taille $x=0$.

1. Vérifier que le nombre total de cellules

$$\int_0^\infty n(t,x)dx$$

et la taille totale

$$\int_0^\infty xn(t,x)dx$$

sont croissants.

2. Écrire les équations pour les problèmes critiques direct et adjoint, dont les solutions sont notées (λ, N, ϕ).

Écrire formellement la solution asymptotique en temps du problème de départ. Expliquer pourquoi la valeur propre λ est aussi appelée paramètre de Malthus.

3. On étudie le cas $B(x)=b$ constant dans lequel les calculs sont explicites. Montrer que les solutions sont $\lambda=b$, $\phi(x)=1$ et

$$N(x) = \overline{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n e^{-2^{n+1}bx}$$

avec $\alpha_0=1$ et $\alpha_n=\frac{2}{2^n-1}\alpha_{n-1}$.

4. Montrer que $N(x)>0$ pour $2bx\geq 1$.

5. À partir de l'égalité

$$\partial_x|N(x)| + 2b|N(x)| = 4bN(2x)\mathrm{sgn}(\mathrm{N(x)}),$$

montrer que

$$\int_0^\infty |N(x)|dx = \int_0^\infty N(x)\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\frac{\mathrm{x}}{2}))\mathrm{dx}.$$

En déduiré que $N(x)>0$ pour tout $x>0$.

Exercice V.

Nous considérons un calcul critique à un groupe de neutrons

$$-\nabla.(d(x)\nabla\phi(x)) + \sigma_a(x)\phi(x) = \frac{\nu\sigma_f(x)}{\lambda}\phi(x).$$

La structure en espace est hétérogène (en pratique 40 000 crayons c de combustibles)

$$\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_c \Omega_c}$$

C'est pourquoi les fonctions d, σ_s et $s\sigma_f$ sont variables en espace. L'exercice qui suit est tiré de "Méthodes mathématiques en neutronique" par J. Planchard.

La méthode de factorisation consiste à écrire

$$\phi(x) = u(x)\psi(x)$$

dans lequel ψ est le flux neutronique obtenu par un calcul critique crayon par crayon (avec une condition de Neumann homogène au bord de chaque crayon).

1. Écrire les équations pour ψ.

2. Montrer que l'équation réduite pour u s'écrit

$$-\nabla.(d\psi\nabla u) + \frac{\psi}{\lambda_c}\nu\sigma_f u - d\nabla\psi.\nabla u = \frac{\psi}{\lambda}\nu\sigma_f u.$$

le paramètre λ_c est la valeur propre critique sur chaque crayon, c'est donc une fonction constante par morceaux (sur chaque crayon).

Expliquer pourquoi $\psi>0$ (par analogie avec le cas discret).

3. Montrer que les conditions aux bords entre le crayon a et le crayon b s'écrivent à l'interface ($x\in\overline{\Omega_a}\cap\overline{\Omega_b}$)

$$\psi_a(x)u_a(x) = \psi_b(x)u_b(x),$$

et

$$d_a(x)\psi_a(x)(\partial_n u_a)(x) = d_b(x)\psi_b(x)(\partial_n u_b)(x).$$